О растущей нижней оценке функции Шеннона длины единичного проверяющего теста при константных неисправностях на выходах элементов в формулах над базисами, близкими к стандартному

Чж. Цуй[1], Д. С. Романов[2]

В статье установлены асимптотически равные числу переменных нижние оценки функций Шеннона длины единичного проверяющего теста при константных неисправностях на выходах элементов в булевых формулах над базисами $\{x\&y,\ x\vee y,\ \bar{x}\}$, $\{x\&y,\ \bar{x}\}$, $\{x\vee y,\ \bar{x}\}$, $\{x\,\&\,\bar{y},\ \bar{x}\}$, $\{x\vee\bar{y},\ \bar{x}\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Ключевые слова: проверяющий тест, константные неисправности, булева формула

1. Введение

В настоящей работе демонстрируется эффект, показывающий наличие качественной разницы (для базисов $B_0 = \{x\,\&\,y,\ x\vee y,\ \bar{x}\}$, $B_{0,1} = \{x\,\&\,y,\ \bar{x}\}$, $B^*_{0,1} = \{x\vee y,\ \bar{x}\}$, $B_{0,2} = \{x\,\&\,\bar{y},\ \bar{x}\}$, $B^*_{0,2} = \{x\vee\bar{y},\ \bar{x}\}$) между поведениями функций Шеннона длины единичного проверяющего теста при константных неисправностях на выходах элементов в булевых формулах и в схемах из функциональных элементов (СФЭ). Именно, указанные функции Шеннона для СФЭ ограничены сверху константами для любого значения аргумента, тогда как в случае формул эти функции Шеннона растут асимптотически не медленнее, чем число n переменных, от которых зависят булевы функции.

Все определения, не введенные в этой статье, можно почерпнуть из книг [1, 2].

[1] *Цуй Чжэнюй* — асп. факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: ourobros1234@gmail.com.

Cui Zhenyu — postgraduate student of CMC Faculty, Lomonosov MSU

[2] *Романов Дмитрий Сергеевич* — проф. факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: romanov@cs.msu.ru.

Romanov Dmitrii Sergeevich — professor of CMC Faculty, Lomonosov MSU

Булева формула может быть представлена как СФЭ (над тем же базисом, что и формула) с одним выходом без ветвлений на выходах функциональных элементов (ФЭ) [1, §§ 2–3 гл. 2]. Поэтому при описании формул (как СФЭ формульного типа) будет повсеместно использоваться схемная терминология. Будем в любой базис неявно включать тождественную функцию.

Пусть на реализовывавшую булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ СФЭ S над полным базисом B подействовал источник неисправностей U, превратив схему S в любую схему из конечного содержащего схему S множества H схем. Обычно источник неисправностей сохраняет множество входов и множество выходов исходной схемы и определяется теми поломками, которые он может произвести в схеме. При тестовом исследовании схемы анализируются значения на выходе схемы, являющиеся откликом схемы на подачу на входы схемы входных наборов.

Константная неисправность на выходе ФЭ есть результат замены исходного ФЭ на функциональный элемент, реализующий константу. Через O_1^{c} (IO_1^{c}) обозначается источник одиночных произвольных константных неисправностей на выходах ФЭ (соответственно, источник одиночных произвольных константных неисправностей на входах и выходах ФЭ).

Множество T входных наборов схемы S является *проверяющим тестом* для схемы S относительно источника неисправностей U тогда и только тогда, когда для любой схемы S' из множества H имеет место импликация: если S' реализует булеву функцию $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, не равную f, то в T найдется набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) \neq g(\tilde{\alpha})$.

Число наборов в тесте T обозначается через $L(T)$ и называется *длиной* теста T. *Минимальный тест* — это тест минимальной длины. Длина минимального проверяющего теста для схемы S относительно источника неисправностей U будет обозначаеться через $L^{\mathrm{dt}}(U, S)$.

Схема S считается *неизбыточной* относительно источника неисправностей U, если при любой меняющей хоть на каком-то входном наборе значение на выходе хоть какого-то функционального элемента порожденной источником U одиночной поломке функционального элемента (т. н. нетривиальной поломке) полученная схема реализует функцию, не равную исходной функции f (реализуемой S в при отсутствии поломок). Под *длиной минимального проверяющего теста* для реализуемой СФЭ (формулами) над базисом B булевой функции f относительно источника неисправностей U понимается величина $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},B}(U, f)$ (соответственно $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(U, f)$), представляющая собой минимум по всем неизбыточным реализующим f схемам (соответственно формулам) S над базисом B величин $L^{\mathrm{dt}}(U, S)$. Если для функции f отсутствуют реализующие ее неизбыточные относительно источника неисправностей U СФЭ (формулы) над базисом B, то будем считать, что $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},B}(U, f) = 0$ (соответственно

$L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(U,f)=0$). *Функцией Шеннона длины проверяющего теста относительно источника неисправностей* U для СФЭ (формул) над базисом B называется величина $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},B}(U,n)=\max\limits_{f\in P_2(n)} L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},B}(U,f)$ (соответственно $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(U,n)=\max\limits_{f\in P_2(n)} L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(U,f)$).

Перечислим результаты, связанные с оцениванием функций Шеннона длины единичного проверяющего теста относительно произвольных константных неисправностей на выходах функциональных элементов в СФЭ. Если не оговорено иное, оценки функций Шеннона приведены для произвольного целого положительного n.

В [4] фактически установлено, что в базисе $B_1=\{x\,\&\,y,\ x\oplus y,\ 1\}$ любая булева функция n переменных моделируется формулой (с одной добавочной переменной), обладаающей универсальным единичным проверяющим тестом длины не более $n+4$ относительно IO^{c}_1. В [5] эта верхняя оценка понижается до $n+3$, а в [2, стр. 113–116] фактически доказано неравенство $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B_1}(IO^{\mathrm{c}}_1,n)\leqslant n+3$. В работах [6]–[9] продемонстрировано, что $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},B}(O^{\mathrm{c}}_1,n)\leqslant n+3$ в произвольном полном базисе B (в ряде базисов, по существу, строятся формулы, а не СФЭ). В [10] для базиса $B'_1=\{x\,\&\,y,\ x\oplus y,\ x\sim y\}$ получено неравенство $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},B'_1}(IO^{\mathrm{c}}_1,n)\leqslant 16$. В [11] установлено, что $2\leqslant L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},B}(O^{\mathrm{c}}_1,n)\leqslant 4$ для произвольного конечного полного базиса B. В [12] доказано, что при $n\geq 3$ в любом полном базисе B, содержащемся в множестве элементарных конъюнкций с одинаковыми степенями переменных, линейных функций двух переменных и функций, представляющих собой конъюнкцию $x_1\bar{x}_2$ и некоторой функции, $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},B}(O^{\mathrm{c}}_1,n)\geqslant 3$. В [13] установлено точное значение $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},\{xy,\,\bar{x},\,x\oplus y\oplus z\}}(O^{\mathrm{c}}_1,n)=2$. В [14] доказано, что $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},\{xy,\,x\oplus y,\,1,\,0\}}(O^{\mathrm{c}}_1,n)\leqslant 3$. Отметим, что в работах [3]–[8], [12]–[14] применяется иное определение неизбыточности схемы, не делающее исключений для тривиальных поломок неконстантных ФЭ.

2. Формулировка и доказательство основного результата

В данной статье устанавливается следующее утверждение о значениях функции Шеннона длины единичного проверяющего теста относительно одиночных константных неисправностей на выходах элементов для формул над базисами $B_0=\{x\&y,\ x\vee y,\ \bar{x}\}$, $B_{0,1}=\{x\&y,\ \bar{x}\}$, $B^*_{0,1}=\{x\vee y,\ \bar{x}\}$, $B_{0,2}=\{x\,\&\,\bar{y},\ \bar{x}\}$, $B^*_{0,2}=\{x\vee\bar{y},\ \bar{x}\}$.

Теорема 1. *Для любого базиса* B *из множества* $\{B_0,\ B_{0,1},\ B^*_{0,1},\ B_{0,2},\ B^*_{0,2}\}$ *при* $n\to\infty$ *для почти всех булевых функций*

$f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет место следующая асимптотическая нижняя оценка: $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O^{\mathrm{c}}_1, f(x_1, \ldots, x_n)) \geq n \cdot (1 + o(1))$.

Из этого утверждения мгновенно вытекает теорема 2.

Теорема 2. *Для любого базиса B из множества $\{B_0, B_{0,1}, B^*_{0,1}, B_{0,2}, B^*_{0,2}\}$ при $n \to \infty$ имеет место следующая асимптотическая нижняя оценка: $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O^{\mathrm{c}}_1, n) \geq n \cdot (1 + o(1))$.*

Для доказательства теоремы 1 докажем несколько лемм, вводя некоторые понятия.

Лемма 1. *Для любой тождественно не равной константе булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ существует реализующая ее неизбыточная формула над произвольным базисом B из множества $\{B_0, B_{0,1}, B^*_{0,1}, B_{0,2}, B^*_{0,2}\}$.*

Доказательство. Пусть $D_f = K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_s$ — формула над базисом B_0, представляющая собой какую-то тупиковую ДНФ функции f так, что слагаемые реализованы цепочками конъюнкторов (на незадействованные в цепочках входы конъюнкторов подаются переменные или отрицания переменных) и собраны в указанном порядке в логическую сумму цепочкой дизъюнкторов. В силу тупиковости D_f найдется такой набор α, что $K_1(\alpha) = 1$, тогда как $K_2(\alpha) = \cdots = K_s(\alpha) = 0$. На наборе α обнаруживаются все неисправности типа 0 на выходах всех дизъюнкторов. Так как $f \not\equiv const$, найдется набор β такой, что $f(\beta) = 0$. На наборе β обнаруживаются все неисправности типа 1 на выходах всех дизъюнкторов. В силу тупиковости ДНФ D_f для каждого $i = \overline{1, s}$ найдется такой набор α_i, что $K_i(\alpha_i) = 1$, тогда как остальные слагаемые на этом наборе обращаются в 0. На этом наборе обнаруживаются все неисправности типа 0 на выходах конъюнкторов из K_i и всех инверторов из K_i. В силу тупиковости ДНФ D_f для каждого множителя $x_j^{\xi_j}$ произвольной простой импликанты K_i ($i = \overline{1, s}$) найдется такой набор $\beta_{i,j}$, что $f(\beta_{i,j}) = 0$, $x_j = \bar{\xi}_j$, но при выбрасывании множителя $x_j^{\xi_j}$ из слагаемого K_i полученная элементарная конъюнкция (или константа 1, если множитель единственный) будет обращаться в 1. На этом наборе $\beta_{i,j}$ обнаруживается неисправность типа 1 на выходе того конъюнктора из K_i, на вход которого подается буква $x_j^{\xi_j}$, и того инвертора (если $\xi_j = 0$) из K_i, который связан с входом x_j. Таким образом, для случая базиса B_0 все неисправности обнаружены.

Переход к базису $B_{0,1}$ осуществляется заменой цепочки дизъюнкторов на отрицание цепочки конъюнкторов, на входы которых подаются отрицания слагаемых, упоминавшихся в предыдущем абзаце. Ясно, что тест для тупиковой ДНФ над базисом B_0 окажется и тестом для перестроенной указанным образом формулы над базисом $B_{0,1}$. Доказательство утверждения для базиса $B^*_{0,1}$ осуществляется теперь по принципу двойственности.

Переход от базиса $B_{0,1}$ к базису $B_{0,2}$ осуществляется добавлением части инверторов и избавлением от иной части инверторов включением отрицания в базисную функцию $x \,\&\, \bar{y}$. Тест не изменит своего вида. Доказательство утверждения для базиса $B^*_{0,2}$ осуществляется теперь по принципу двойственности. Лемма доказана. $\square$

Нагруженным ФЭ формулы Σ над базисом B из ФЭ с не более чем двумя входами называется всякий из двухвходовых ФЭ в Σ, к каждому входу которого проведена дуга от функционального элемента.

Под *нагруженной сложностью* $\check{\mathcal{C}}(\Sigma)$ (*нагруженной глубиной* $\check{\mathcal{D}}(\Sigma)$) формулы Σ над базисом B из ФЭ с не более чем двумя входами понимается количество нагруженных ФЭ в Σ (соответственно, максимум — по всем ориентированным цепям в Σ — количества нагруженных элементов цепи).

Под *нагруженной сложностью* $\check{\mathcal{C}}^{\mathrm{F}}_B(f)$ (*нагруженной глубиной* $\check{\mathcal{D}}^{\mathrm{F}}_B(f)$) реализации функции f формулами над базисом B из ФЭ с не более чем двумя входами понимается минимум — по всем реализующим f формулам Σ над базисом B — величины $\check{\mathcal{C}}(\Sigma)$ (соответственно величины $\check{\mathcal{D}}(\Sigma)$).

Лемма 2. *Пусть Σ — неизбыточная относительно O^{c}_1 формула над базисом B ($B \in \{B_0,\ B_{0,1},\ B^*_{0,1},\ B_{0,2},\ B^*_{0,2}\}$), реализующая отличную от тождественной константы булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда $L^{\mathrm{dt}}(O^{\mathrm{c}}_1, \Sigma) \geq \check{\mathcal{D}}(\Sigma)$.*

Доказательство. Если в формуле Σ имеются ФЭ, на выходах которых реализуются константы, осуществим приведение формулы Σ, последовательно заменяя ФЭ, на входы которых подаются константы, на константы, проводники или инверторы и удаляя висячие ФЭ до тех пор, пока не получится неизбыточная формула Σ', в которой нет ФЭ, на выходах которых реализуются константы (это возможно в силу того, что $f \not\equiv const$). Очевидно, $L^{\mathrm{dt}}(O^{\mathrm{c}}_1, \Sigma) \geq L^{\mathrm{dt}}(O^{\mathrm{c}}_1, \Sigma')$.

Будем теперь предполагать, что в неизбыточной формуле Σ нет функциональных элементов, на выходах которых реализуются константы. Тогда для любого единичного проверяющего теста для Σ относительно O^{c}_1 на наборах этого теста на выходах каждого ФЭ Σ будут появляться оба булевых значения. Рассмотрим цепь P максимальной нагруженной глубины в Σ и произвольный нагруженный ФЭ E в ней, которому приписана булева функция $(x \,\&\, y^{\sigma_1})^{\sigma_2}$ из базиса B.

Если передача сигналов вдоль цепи P осуществляется через левый вход E, то для проверки неисправности типа σ_1 на выходе того ФЭ, дуга от которого подается на правый вход E, в тест должен входить такой набор, что на входах E на этом наборе возникают значения $(1, \bar{\sigma}_1)$. Но на этом наборе в силу того, что $(x \mathbin{\&} \bar{\sigma}_1^{\sigma_1})^{\sigma_2} = \bar{\sigma}_2$, никакая неисправность нагруженного ФЭ, лежащего на цепи P выше E, не может быть обнаружена.

Аналогично, если передача сигналов вдоль цепи P осуществляется через правый вход E, то для проверки неисправности типа 1 на выходе того ФЭ, дуга от которого подается на левый вход E, в тест должен входить такой набор, что на входах E на этом наборе возникают значения $(0, \sigma_1)$. Но на этом наборе в силу того, что $(0 \mathbin{\&} y^{\sigma_1})^{\sigma_2} = \bar{\sigma}_2$, никакая неисправность нагруженного ФЭ, лежащего на цепи P выше E, также не может быть обнаружена.

Значит, для каждого следующего нагруженного ФЭ цепи P в тест должен входить по крайней мере один новый набор, откуда с очевидностью следует утверждение леммы. $\square$

Примитивной цепью в формуле Σ назовем всякую максимальную по включению функциональных элементов и входов схемы цепь в Σ, не содержащую нагруженных ФЭ (в случае двух последовательных нагруженных ФЭ в некоторой цепи будем считать, что примитивная цепь между этими элементами не содержит ФЭ).

Через $||\check{\mathcal{U}}_B^{\mathrm{F}}(\check{\mathcal{C}}, n)||$ обозначим число попарно неравных булевых функций вида $f(x_1, \ldots, x_n)$, реализуемых формулами над базисом B, имеющими нагруженную сложность не выше $\check{\mathcal{C}}$. В следующей лемме приводится асимптотическая нижняя оценка величины $\check{\mathcal{C}}_B^{\mathrm{F}}(f)$ для почти всех булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ (то есть для такой доли функций из множества $P_2(n)$ всех булевых функций от переменных $(x_1, \ldots, x_n)$, которая стремится к 1 при $n \to \infty$).

Лемма 3. *Для почти всех булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ из множества $P_2(n)$ при $n \to \infty$ и $B \in \{B_0,\, B_{0,1},\, B_{0,1}^*,\, B_{0,2},\, B_{0,2}^*\}$ имеет место асимптотическая нижняя оценка*

$$\check{\mathcal{C}}_B^{\mathrm{F}}(f(x_1, \ldots, x_n)) \geq \frac{2^n}{2n \log n} \cdot (1 + o(1)).$$

Доказательство. Занумеруем нагруженные ФЭ формулы Σ в порядке обхода в глубину. Ясно, что на каждый вход нагруженного элемента подается некоторая примитивная цепь, и от выхода ближайшего к корню формулы ФЭ до корня формулы Σ ведет примитивная цепь. Если примитивная цепь начинается от входа схемы, то этот вход схемы всегда относится к примитивной цепи, даже если иных вершин в примитивной цепи нет. Если примитивная цепь начинается после нагруженного ФЭ, будем использовать новую переменную x_0 для кодирования нагруженного ФЭ, после которого начинается примитивная цепь. Используя стандартные эквивалентные преобразования формул, легко показать, что произвольная не равная константе булева функция, реализуемая примитивной цепью, допускает реализацию бесповторной примитивной цепью (без повторов одинаковых переменных). Но, как мы, фактически, видели в доказательстве леммы 2, для реализации неконстантных булевых функций можно обойтись без констант, реализуемых примитивными цепями. Используя правила де Моргана, всякую неконстантную булеву функцию, реализуемую примитивной цепью над базисом B, можно представить в виде $((\cdots((x_0^{\tau_0} \circ_0 x_{i_1}^{\tau_1}) \circ_1 x_{i_2}^{\tau_2}) \circ_2 \cdots) \circ_{t-1} x_t^{\tau_t})$ или в виде $((\cdots(x_{i_1}^{\tau_1} \circ_1 x_{i_2}^{\tau_2}) \circ_2 \cdots) \circ_{t-1} x_t^{\tau_t})$, где $\circ_j$ — конъюнкция или дизъюнкция, $\tau_j \in \{0,1\}$, $i_1, \ldots, i_t$ — попарно различные числа из множества $\{1, \ldots, n\}$ ($j = \overline{0,t}$, $t \le n$). Поставим формуле Σ в соответствие вектор $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{\check{\mathcal{C}}})$ длины $\check{\mathcal{C}} + 1$, в котором γ_0 — булева функция g_0, реализуемая или примитивной цепью, ведущей от выхода ближайшего к корню формулы ФЭ до корня формулы Σ, или самой формулой Σ, если в Σ нет нагруженных ФЭ, а $\gamma_\nu = (\varphi_\nu, g'_\nu, g''_\nu)$ ($\nu = \overline{1, \check{\mathcal{C}}(\Sigma)}$), где φ_ν — тип ν-го нагруженного ФЭ (функция из B), g'_ν (g''_ν) булева функция, реализуемая примитивной цепью, подающейся на левый (соответственно правый) вход ν-го нагруженного ФЭ. Элементы γ_ν ($\nu = \overline{\check{\mathcal{C}}(\Sigma) + 1, \check{\mathcal{C}}}$) устроены аналогично предыдущим, но произвольны (то есть строятся для фиктивных ФЭ и примитивных цепей). Заметим: количество видов каждой из булевых функций g_0, g'_1, $g''_1, \ldots,$ $g'_{\check{\mathcal{C}}}$, $g''_{\check{\mathcal{C}}}$ не превосходит величины $n! \cdot 2^n \cdot 3^{n+1} = 3 \cdot n! \cdot 6^n$ ($n!$ — число перестановок переменных с x_1 по x_n, 2^n — количество способов расстановки n конъюнкторов или дизъюнкторов, 3^{n+1} — количество способов вхождения переменных с x_0 по x_n: каждая переменная либо входит без отрицания, либо входит с отрицанием, либо не входит в представление булевой функции). Очевидно, что количество $||\check{\mathcal{U}}_B^{\mathrm{F}}(\check{\mathcal{C}}, n)||$ не больше числа наборов γ, а, значит, удовлетворяет неравенствам:

$$||\check{\mathcal{U}}_B^{\mathrm{F}}(\check{\mathcal{C}}, n)|| \le (3 \cdot n! \cdot 6^n)^{2\check{\mathcal{C}}+1} \cdot 2^{\check{\mathcal{C}}} + 2 \le (18 \cdot (n!)^2 \cdot 36^n)^{\check{\mathcal{C}}+1}. \qquad (1)$$

Занумеруем все функции f из $P_2(n)$ по неубыванию значения $\check{\mathcal{C}}_B^{\mathrm{F}}(f)$ их нагруженной сложности в классе формул над базисом B и обозначим через $\hat{f}$ функцию с номером $\lceil 2^{2^n}/n \rceil$, тогда для нагруженной сложности функции $\hat{f}$ в качестве $\check{\mathcal{C}}$ будет, очевидно, выполняться неравенство

$$||\check{\mathcal{U}}_B^{\mathrm{F}}(\check{\mathcal{C}}_B^{\mathrm{F}}(\hat{f}), n)|| \ge 2^{2^n}/n. \qquad (2)$$

Сличая (1) и (2), получим:

$$(18 \cdot (n!)^2 \cdot 36^n)^{\check{\mathcal{C}}_B^{\mathrm{F}}(\hat{f})+1} \ge 2^{2^n}/n,$$

$$(\check{\mathcal{C}}_B^{\mathrm{F}}(\hat{f}) + 1) \cdot \log(18 \cdot (n!)^2 \cdot 36^n) \ge 2^n - \log n,$$

а, значит, для почти всех функций $f(x_1,\ldots,x_n)$ из $P_2(n)$ будет иметь место неравенство:

$$\check{\mathcal{C}}_B^{\mathrm{F}}(f(x_1,\ldots,x_n)) \geq \frac{2^n}{2n\log n}\cdot(1+o(1)).$$

$\square$

В полной аналогии со стандартным неравенством между сложностью и глубиной формулы [1, лемма 2.1 на стр. 83] из предыдущей леммы мгновенно получаем следующее утверждение.

Лемма 4. *Для почти всех булевых функций $f(x_1,\ldots,x_n)$ из множества $P_2(n)$ при $n\to\infty$ и $B\in\{B_0,\ B_{0,1},\ B^*_{0,1},\ B_{0,2},\ B^*_{0,2}\}$ имеет место асимптотическая нижняя оценка*

$$\check{\mathcal{D}}_B^{\mathrm{F}}(f(x_1,\ldots,x_n)) \geq n\cdot(1+o(1)).$$

Теперь утверждение теоремы 1 получается последовательным применением лемм 1, 2 и 4.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Сергею Андреевичу Ложкину за полезные советы и внимание к работе.

Список литературы

[1] С. А. Ложкин, *Лекции по основам кибернетики*, Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, М., 2004.

[2] Н. П. Редькин, *Надежность и диагностика схем*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1992.

[3] Н. П. Редькин, “Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов”, *Матем. вопр. киберн.*, Физматлит, М., 2003, 217–230.

[4] S. M. Reddy, “Easily testable realization for logic functions”, *IEEE Trans. Comput.*, **C-21**:11 (1972), 1183–1188.

[5] K. L. Kodandapani, “A note on easily testable realizations for logic functions”, *IEEE Trans. Comput.*, **C-23**:3 (1974), 332–333.

[6] С. С. Коляда, “О единичных проверяющих тестах для константных неисправностей на выходах функциональных элементов”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех.*, 2011, №6, 47–49.

[7] С. С. Коляда, “Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в базисах из элементов, имеющих не более двух входов”, *Дискр. анализ и иссл. операций*, **20**:2 (2013), 58–74.

[8] С. С. Коляда, “Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех.*, 2013, № 4, 32–34.

[9] С. С. Коляда, *Верхние оценки длины проверяющих тестов для схем из функциональных элементов*, Дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.09, М., 2013.

[10] Д. С. Романов, Е. Ю. Романова, “Метод синтеза неизбыточных схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины”, *Дискр. матем.*, **29**:4 (2017), 87–105.

[11] Д. С. Романов, “Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины”, *Дискр. матем.*, **26**:2 (2014), 100–130.

[12] К. А. Попков, “Нижние оценки длин единичных тестов для схем из функциональных элементов”, *Дискр. матем.*, **29**:2 (2017), 53–69.

[13] К. А. Попков, “Короткие единичные тесты для схем при произвольных константных неисправностях на выходах элементов”, *Дискр. матем.*, **30**:3 (2018), 99–116.

[14] К. А. Попков, “Короткие единичные тесты для схем в базисе Жегалкина при произвольных константных неисправностях элементов”, *Матем. заметки*, **117**:5 (2025), 736–749.

The Growing Lower Bound for the Shannon Function of the Detection Test Set Cardinality with Respect to Single Stuck-at Faults at the Outputs of Gates in Formulas over Bases Close to the Standard One

Cui Zh., Romanov D.S.

Lower bounds asymptotically equal to the number of variables are established for Shannon functions of the cardinality of single fault detection test set with respect to stuck-at faults at outputs of gates in Boolean formulas over bases $\{x \,\&\, y,\, x \vee y,\, \bar{x}\}$, $\{x \,\&\, y,\, \bar{x}\}$, $\{x \vee y,\, \bar{x}\}$, $\{x \,\&\, \bar{y},\, \bar{x}\}$, $\{x \vee \bar{y},\, \bar{x}\}$.

The paper was published with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement No 075-15-2022-284.

Keywords: fault detection test set, stuck-at faults, Boolean formula

References

[1] S. A. Lozhkin, *Lectures on Fundamentals of Cybernetics*, Publishing Dept. of CMC Faculty of Lomonosov Moscow State University, Russia, Moscow, 2004 (In Russian).

[2] N. P. Red'kin, *Reliability and Diagnostics of Circuits*, Moscow University Publishing House, Russia, Moscow, 1992 (In Russian).

[3] N. P. Red'kin, "Single fault detection test sets for circuits with respect to inverse faults of gates", *Matematicheskie Voprosy Kibernetiki*, Fizmatlit, Russia, Moscow, 2003, 217–230 (In Russian).

[4] S. M. Reddy, "Easily testable realization for logic functions", *IEEE Trans. Comput.*, **C-21**:11 (1972), 1183–1188.

[5] K. L. Kodandapani, "A note on easily testable realizations for logic functions", *IEEE Trans. Comput.*, **C-23**:3 (1974), 332–333.

[6] S. S. Kolyada, "Single checking output tests under constant faults for functional elements", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2011, № 6, 47–49 (In Russian).

[7] S. S. Kolyada, "Single checking tests for circuits of functional elements in fan-in 2 bases", *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **20**:2 (2013), 58–74 (In Russian).

[8] S. S. Kolyada, "Single checking tests for circuits of functional elements", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2013, № 4, 32–34 (In Russian).

[9] S. S. Kolyada, *Upper bounds fof length of checking tests for circuits of functional elements*, Thesis. ... cand. phys.-math. sciences: 01.01.09, Moscow, 2013 (In Russian).

[10] D. S. Romanov, E. Yu. Romanova, "A method of synthesis of irredundant circuits admitting single fault detection tests of constant length", *Discrete Math. Appl.*, **29**:1 (2019), 35–48.

[11] D. S. Romanov, "Method of synthesis of easily testable circuits admitting single fault detection tests of constant length", *Discrete Math. Appl.*, **24**:4 (2014), 227–251.

[12] K. A. Popkov, "Lower bounds for lengths of single tests for Boolean circuits", *Discrete Math. Appl.*, **29**:1 (2019), 23–33.

[13] K. A. Popkov, "Short single tests for circuits with arbitrary stuck-at faults at outputs of gates", *Discrete Math. Appl.*, **29**:5 (2019), 321–333.

[14] K. A. Popkov, "Short single fault tests for circuits in Zhegalkin basis with arbitrary stuck-at faults of gates", *Matem. zametki*, **117**:5 (2025), 736–749 (In Russian).