

# Изменение формы КАМ созвездий на стороне передатчика в беспроводном канале с фиксированным алгоритмом декодирования.

Д. А. Юдаков<sup>1</sup>

В работе исследуется оптимизация геометрии сигнальных созвездий для повышения пропускной способности в беспроводных системах связи. Рассматривается подход, при котором созвездия могут быть неравномерно распределены для улучшения эффективности передачи. Оптимизация выполняется на стороне базовой станции, а ее эффективность подтверждается численными экспериментами с использованием LDPC кодирования, OFDM модуляции и технологии ММО.

**Ключевые слова:** Беспроводная связь, Сигнальное созвездие, Изменение формы созвездий, Взаимная информация.

## 1. Введение

На производительность систем связи большое влияние оказывает процесс модуляции, в том числе выбор схемы модуляционного кодирования (СМК). Выбор СМК сопровождается выбором кодовой скорости и созвездия. Основным подходом в системах беспроводной связи является использование квадратурной амплитудной модуляции (КАМ, Quadrature Amplitude Modulation, QAM) [6]. Во многих статьях предлагается изменить часть передачи сигнала, относящуюся к созвездиям [3, 8, 10, 7]. В созвездиях можно оптимизировать как геометрию созвездия (путём изменения координат точек созвездия), так и вероятности точек. В англоязычной литературе эти подходы известны как *geometric shaping* и *probabilistic shaping*, соответственно. Геометрия созвездия обычно фиксирована, например, используется КАМ. Идея работы состоит в том, чтобы изменить координаты этого созвездия на стороне базовой станции во время передачи по нисходящей линии связи.

В оптической и беспроводной связи было предложено несколько геометрий созвездий, которые улучшают пропускную способность канала,

---

<sup>1</sup> Юдаков Даниил Андреевич — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: d.yudakov43@gmail.com.

Yudakov Daniil Andreevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

учитывая входное распределение сигнала. В [13] созвездия изменяются для беспроводных каналов обратной связи, основываясь на показатели частоты ошибок в кадрах, с использованием мягкого и жесткого декодирования с использованием кодов WiMAX и DVB-S2 LDPC. Как вероятностные, так и геометрические методы формирования показывают значительные преимущества по сравнению с равномерно распределенной передачей символов.

В этой работе мы сосредоточимся на оптимизации геометрии созвездий. Этот подход хорошо изучен. Например, созвездие из 256 точек в [15] обеспечивает усиление отношения сигнала к шуму (ОСШ) до 1,18 дБ по сравнению со стандартными созвездиями КАМ. В [3] предложены форматы модуляции с применением созвездий на основе решётки в многомерном евклидовом пространстве, а также описаны быстрые алгоритмы модуляции и демодуляции с низкой сложностью. Для оптимизации геометрии созвездий часто используются методы машинного обучения [1]. В [14] для получения новых созвездий используется автоэнкодер.

Во всех похожих статьях на эту тему предполагается, что мы можем изменять алгоритм модуляции и демодуляции на стороне передатчика и приемника соответственно. Это невозможно реализовать в существующих стандартах систем беспроводной связи. Передача сигнала в беспроводных сетях осуществляется от базовой станции к пользовательскому оборудованию (ПО). Большинство принимающих устройств работают в соответствии с уже установленными стандартами, например, 3GPP TS 38.211 V15.4.0 [5]. Изменить процедуры модуляции (для восходящего канала) и демодуляции (для нисходящего канала) довольно сложно, поэтому нужно изменять сами стандарты, что является довольно сложным процессом.

В данной статье мы рассматриваем тип передачи по нисходящему каналу. Для нисходящего канала базовая станция преобразует последовательность битов в последовательность комплексных чисел с использованием неоднородного созвездия. Пользователь получает этот сигнал и преобразует его в последовательность отношений правдоподобия битов (Likelihood Ratio, LLR) при помощи стандартного КАМ созвездия. И в конечном итоге последовательность LLR-ов преобразуется в последовательность битов. Весь процесс передачи может быть реализован с использованием существующей технологии и не требует изменения стандарта 3GPP. Мы рассматриваем реалистичные коды с малой плотностью проверки чётности (Low-Density Parity-Check, LDPC) и систему OFDM 5G MIMO, проводя численные эксперименты в симуляторе Sionna на уровне физической системы связи [2].

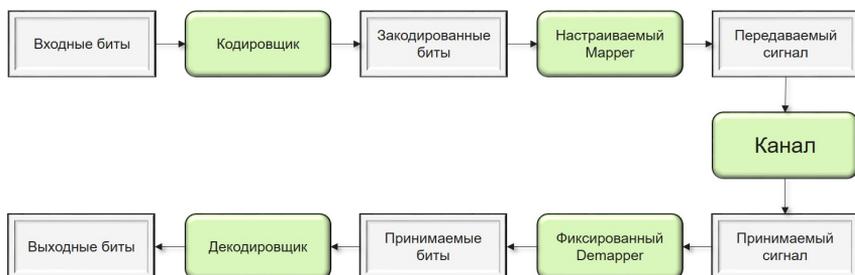


Рис. 1. Схема передачи сигнала с фиксированной процедурой декодирования на стороне пользователя.

## 2. Модель системы

Рассмотрим реалистичную передачу данных "точка-точка" между пользователем и базовой станцией. Система, которую мы будем настраивать, показана на рисунке. 1. Основным отличием от модели кодированной модуляции с перемешиванием битов (bit-interleaved coded modulation, BICM) [16] является изменение геометрии созвездия на стороне передатчика в низходящем канале и на стороне приёмника в восходящем канале.

В рассматриваемой модели канала на стороне базовой станции к равномерно распределенной последовательности битов (Входные биты) добавляются проверочные биты с помощью LDPC кодирования. Затем последовательность битов преобразуется в аналоговый сигнал, которому соответствует последовательность комплексных значений, обозначающих амплитуду и фазу передаваемого сигнала (Настраиваемый Mapper). Во время процедуры преобразования вся двоичная последовательность делится на части длиной  $m$ , и каждая часть преобразуется из битовой последовательности в комплексное число  $\mu : \{0, 1\}^m \rightarrow \mathbb{C}$ . Это отображение  $\mu$  обычно представляется в виде созвездия. Пример созвездия можно увидеть на рис. 4. Полученная последовательность комплексных чисел преобразуется в аналоговый сигнал, проходит через канал с аддитивным белым гауссовым шумом (АБГШ), попадает на приёмник и преобразуется обратно в цифровой вид.

На стороне приёмника линейный эквалайзер минимальной среднеквадратичной ошибки (Linear Minimum Mean Squared Error, LMMSE) уменьшает межсимвольные помехи от принимаемого сигнала. Для этого комплексные значения преобразуются в логарифмические отношения правдоподобия (Likelihood Ratio, LLR) битов, а декодер, наконец, преоб-

разует последовательность LLR в последовательность битов. Качество принимаемого сигнала может быть описано функциями взаимной информации между последовательностью входных символов и последовательностью LLR.

Наша цель - оптимизировать модулирующую часть следующей схемы передачи сигнала:

$$s \xrightarrow{\text{Mapper}} x \xrightarrow{\text{Channel}} Hx+n \xrightarrow{\text{Equalizer}} G(Hx+n) = y \xrightarrow{\text{Demapper}} llr \xrightarrow{\text{Decoder}} \tilde{s}$$

где  $s$  и  $\tilde{s}$  — передаваемая и принимаемая последовательность битов,  $x$  и  $y$  — передаваемая и принимаемая последовательность комплексных чисел,  $H$ ,  $G$  — предрасчитанные комплексные матрицы канала и LMMSE эквалайзера соответственно; обычно можно подразумевать, что  $GH \sim I$  (в этом случае сигнал не меняется при нулевом шуме),  $n$  — случайный гауссовский шум (т.е.  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ),  $llr$  — последовательность действительных чисел, полученная при помощи функций логарифмического отношения правдоподобия:

$$llr_i(y) = \log_2 \frac{P(b_i(x) = 0|y)}{P(b_i(x) = 1|y)} = \log_2 \left( \frac{\sum_{x \in \mathcal{X}_0^i} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}|y-x|^2)}{\sum_{x \in \mathcal{X}_1^i} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}|y-x|^2)} \right) \quad (1)$$

где  $\mathcal{X}_0^i$  и  $\mathcal{X}_1^i$  это непересекающиеся множества точек созвездия. Для  $x \in \mathcal{X}_0^i$  бит  $i$  равен 0, а для  $x \in \mathcal{X}_1^i$  бит  $i$  равен 1.

Заметим, что в случае фиксированной процедуры демодуляции, LLR зависит от созвездия приемника. Для нисходящей передачи этим созвездием является КАМ, которое берётся из стандарта 3GPP (и мы имеем зависимость  $llr_i(x, y)$ , где  $x$  это координаты КАМ созвездия, а  $y$  это принимаемое комплексное число). Реальные и мнимые координаты точек КАМ созвездия можно определить как декартово произведение двух равномерно распределённых на прямой множеств точек.

## 2.1. Взаимная информация как функция потерь

Для произвольного канала от  $X \rightarrow Y$  и входного распределения  $P_X(x)$  мы рассматриваем ансамбль  $(X, Y)$  с распределением  $P_{(X,Y)}(x, y)$ . Мерой информации в этом случае является взаимная информация  $I(X; Y)$ :

$$I(X; Y) := H(X) - H(X|Y) = \mathbb{E}_{(X,Y)} \left( \log_2 \frac{P_{(X,Y)}(x, y)}{P_X(x)P_Y(y)} \right), \quad (2)$$

где  $H(X)$  — информационная энтропия входной последовательности комплексных чисел и  $H(X|Y)$  — условная энтропия.

Математическое ожидание может быть вычислено в виде суммы или интеграла, в зависимости от того, является ли распределение дискретным или непрерывным. Согласно теореме Шеннона [4],  $I(X; Y)$  — это строгая верхняя граница пропускной способности канала при использовании оптимальных кодов. Современные LDPC-коды из стандарта [5] позволяют приблизиться к этому пределу с предсказуемыми средними потерями в скорости передачи сигнала.

В этой работе мы хотим сосредоточиться на увеличении взаимной информации ВИСМ, которая была рассчитана в [16]:

$$I^{BICM}(X; Y) = \sum_{j=1}^m \mathbb{E}_{Y, B} \left( \log_2 \frac{\sum_{x \in \mathcal{X}_B^j} P_{Y|X}(y|x)}{\frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{X}} P_{Y|X}(y|x)} \right), \quad (3)$$

где  $m$  — количество битов, соответствующее одной точке созвездия,  $Y$  — непрерывная случайная величина, сопоставляемая принятой точке на комплексной плоскости,  $B$  — зависящая от  $Y$  случайная величина, показывающая какой  $j$ -й бит передавался,  $\mathcal{X}$  — все точки созвездия,  $\mathcal{X}_B^j$  — все точки созвездия, в которых  $j$ -й бит равен  $B$ .

Наш подход предполагает изменение созвездия только на стороне пользователя. Для нисходящей передачи данное созвездие отвечает за распределение сигнала, принимаемого пользователем от базовой станции  $P_Y(y)$ . Изменение этого созвездия влечет за собой изменение функции взаимной информации. С другой стороны, созвездие КАМ, предназначенное для демодуляции сигнала на стороне приёмника, фиксировано.

Мы можем объяснить факт изменения взаимной информации следующим образом:  $y$  — это сигнал, полученный пользователем после прохождения по каналу. Распределение  $P_Y(y)$  описывает вероятность обнаружения данного сигнала в определенной области. Для канала АБГШ это распределение представлено в виде облаков шума вокруг точек созвездия. Таким образом, если мы изменяем передаваемые точки созвездия, то изменяется само распределение  $P_Y(y)$  (см. рис. 2). Перемещение одной точки созвездия приводит к увеличению помех для других точек и уменьшению для других. Функция взаимной информации помогает нам правильно выбрать созвездие. Отображенные точки созвездия показывают ожидаемый сигнал.

Пользователь будет декодировать сигнал с учетом точек КАМ. Это означает, что приёмник подразумевает, что испускаемый сигнал имеет не изменённую геометрию. Итак, чтобы минимизировать функцию взаимной информации, нам нужно максимизировать (3) с фиксированными множествами  $\mathcal{X}_B^j$ .

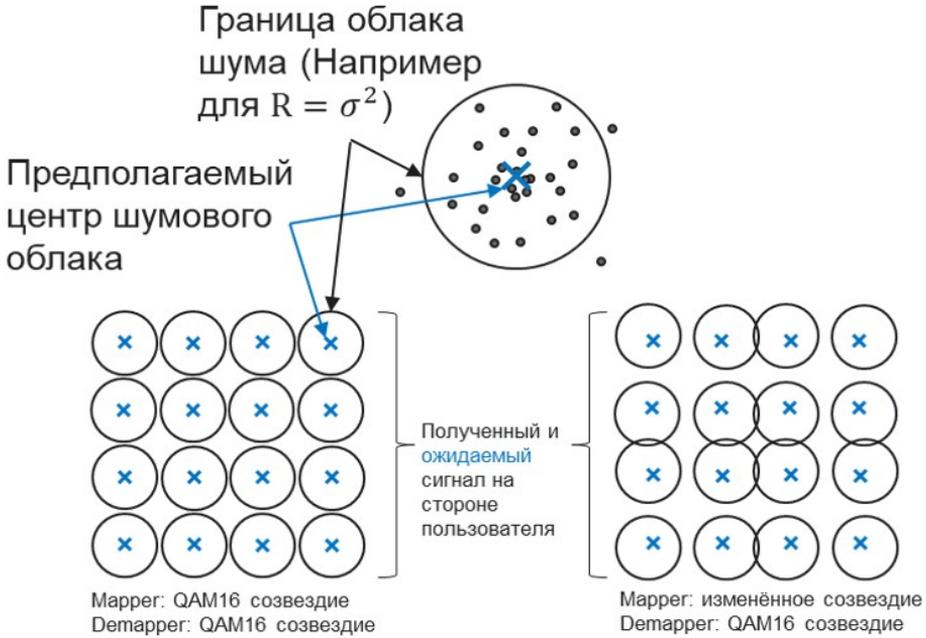


Рис. 2. Иллюстрация изменений на стороне пользователя. Здесь пользователь считает, что принятый сигнал распределен как гауссовский шум вокруг точек созвездия QAM (вокруг синего креста). Процедура декодирования вычисляет LLR на основе этого предположения. Но реальный сигнал имеет разное распределение для разных созвездий. На рисунках эти распределения представлены в виде окружностей. Можно сказать, что математическое ожидание каждой группы полученных точек, связанных с фиксированной точкой созвездия, будет находиться в центре некоторой окружности. Радиус  $R$  этой окружности показывает дисперсию этого шума. Из-за гауссовой природы шума мы не можем построить строгую границу шума (некоторые точки могут находиться за пределами окружности).

## 2.2. Одномерные созвездия как частный случай двумерных

Для упрощения рассуждений важно рассмотреть не только двумерные, но и одномерные созвездия. Интересно, что на практике они являются репрезентацией созвездий для амплитудной модуляции.

Одномерное созвездие определяется как набор точек на вещественной прямой. Как и в случае двумерных созвездий, любому количеству битов  $m$  соответствует  $2^m$  точек созвездия (у нас имеется отображение  $\mu : \{0, 1\}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ). По аналогии с КАМ созвездиями, можно ввести базовую модуляцию как одномерные равномерно распределённые на отрезке точки.

В дальнейших рассуждениях точки одномерных созвездий будут обозначаться с верхним подчёркиванием, например  $\bar{y}$ . Соответствующие множества данных точек тоже будут обозначаться с верхним подчёркиванием, например  $\bar{\mathcal{X}}_B^j$ .

## 2.3. Кодирование кодами Грея точек КАМ созвездия

Перед постановкой задачи важно определить, как задаются множества  $\mathcal{X}_B^j$  для КАМ созвездий. В это случае используется специальная техника кодирования точек созвездия кодами Грея. Её основное свойство: соседние (по вертикали или горизонтали) точки созвездия отличаются ровно в одном бите.

Суть алгоритма состоит в симметричном отображении.

Допустим наши точки созвездия имеют координаты  $\{y_{re} + iy_{im} | y_{re}, y_{im} \in \{1, \dots, M\}\}$ , где  $M = 2^{\frac{m}{2}}$ . Тогда процедура построения кодов Грея может быть описана следующим индуктивным алгоритмом:

1. База индукции: для  $m = 2$ . Тогда определим

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_0^1 &= \{(1, 1); (1, 2)\}; & \mathcal{X}_1^1 &= \{(2, 1); (2, 2)\}; \\ \mathcal{X}_0^2 &= \{(1, 1); (2, 1)\}; & \mathcal{X}_1^2 &= \{(1, 2); (2, 2)\}; \end{aligned}$$

2. Шаг индукции: пусть для  $m = n - 2$  мы получили множества  $\mathcal{X}_B^{j'}$ . Тогда определим  $\mathcal{X}_B^j$  для  $m = n$  следующим образом:

$$\mathcal{X}_B^j = \left\{ (y_{re}, y_{im}) \mid \begin{array}{l} y_{re} \in \{y'_{re}, m - y'_{re} + 1\} \\ y_{im} \in \{y'_{im}, m - y'_{im} + 1\} \end{array}, (y'_{re}, y'_{im}) \in \mathcal{X}_B^{j'} \right\}$$

для  $j \leq m - 2$

$$\mathcal{X}_0^{m-1} = \{(y_{re}, y_{im}) | y_{re} \in \{1, \dots, M\}, y_{im} \in \{1, \dots, \frac{M}{2}\}\}$$

$$\mathcal{X}_1^{m-1} = \{(y_{re}, y_{im}) | y_{re} \in \{1, \dots, M\}, y_{im} \in \{\frac{M}{2} + 1, \dots, M\}\}$$

$$\mathcal{X}_0^m = \{(y_{re}, y_{im}) | y_{re} \in \{1, \dots, \frac{M}{2}\}, y_{im} \in \{1, \dots, M\}\}$$

$$\mathcal{X}_1^m = \{(y_{re}, y_{im}) | y_{re} \in \{\frac{M}{2} + 1, \dots, M\}, y_{im} \in \{1, \dots, M\}\}$$

В реальности координаты созвездия могут быть любыми, но для произвольных координат  $\{x + iy | x \in \{x_1, \dots, x_M\}, y \in \{y_1, \dots, y_M\}\}$  при условии  $x_i \leq x_j, y_i \leq y_j$  при  $i < j$  коды Грея строятся аналогично.

Для одномерных созвездий также существует процедура кодирования кодами Грея. Она очень просто определяется через коды Грея двумерного созвездия. Если мы возьмём из двумерного созвездия подмножество точек с одинаковой координатой  $y_{im}$  (назовём их  $\mathcal{Y}$ ) и биты  $j$ , в которых  $\mathcal{Y} \not\subset \mathcal{X}_0^j$  и  $\mathcal{Y} \not\subset \mathcal{X}_1^j$ . Тогда множества  $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_0^j$  и  $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_1^j$  будут определять кодирование кодами Грея соответствующих одномерных точек созвездия.

## 2.4. Постановка задачи и её решение для нисходящей передачи

Из рассуждений, приведенных в предыдущих главах, мы можем сделать вывод, что наша главная цель - выбрать нормализованное созвездие задаваемое отображением

$\mu : \{0, 1\}^m \rightarrow \mathbb{C}$ , которое максимизирует взаимную информацию:

$$\sum_{j=1}^m \mathbb{E}_{Y(\mu), B} \left( \log_2 \frac{\sum_{x \in \mathcal{X}_B^j} P_{Y|X}(Y|x)}{\sum_{x \in \mathcal{X}} P_{Y|X}(Y|x)} \right) \rightarrow \max_{\mu} \quad (4)$$

$$s.t. \quad \frac{1}{2^m} \sum_{s \in \{0,1\}^m} \|\mu(s)\|^2 = 1 \quad (5)$$

Важно отметить, что математическое ожидание берётся от зависимых случайных величин  $Y(\mu)$  и  $B$ . Случайная величина  $Y(\mu) = \frac{1}{2^m} \sum_{i=1}^{2^M} Y_i(\mu)$ , где  $Y_i(\mu) = \mathcal{N}(y_i(\mu), \sigma^2)$  является нормальной случайной величиной, соответствующей передаче  $i$ -той точке созвездия. Случайная величина  $B$  соответствует  $j$ -тому биту  $i$ -той точки созвездия.

Можно заметить, что целевая функция взаимной информации не является выпуклой. Например, при варьировании только одной точки и фиксации всех остальных, мы можем понять, как функция зависит от своих двух параметров. Из рис. 3 видно, что у функции двух переменных есть как области выпуклости вверх, так и области выпуклости вниз. Невыпуклость функции приводит к проблемам с локальным максимумом. Это увеличивает сложность оптимизации.

Несмотря на это, можно увидеть, что функция имеет несколько хороших свойств, в том числе она выпукла вверх в некоторой окрестности КАМ созвездия.

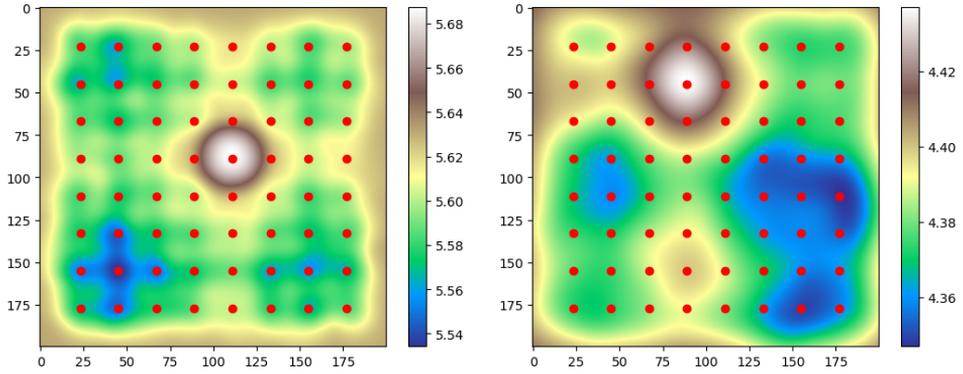


Рис. 3. Зависимость функции взаимной информации от двух параметров — действительной и мнимой координаты одной из точек созвездия. Левый график показывает зависимость для малого шума, а правый — для большого

**Утверждение 2.1.** При нормальном шуме со среднеквадратическим отклонением  $\sigma$  меньше, чем половина расстояния между соседними точками КАМ созвездия  $d_x = \min_{i \neq j} \left( \frac{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|}{2} \right)$ , функция взаимной информации одномерного созвездия

$$I(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{2^m}) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbb{E}_{\bar{y}, B} \log_2 \frac{\sum_{\bar{x} \in \bar{\mathcal{X}}_B^j} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} |\bar{y} - \bar{x}|^2\right)}{\frac{1}{2} \sum_{\bar{x} \in \bar{\mathcal{X}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} |\bar{y} - \bar{x}|^2\right)}$$

строго выпукла вверх в области

$$\bar{y}_k \in [\bar{x}_k - d_x, \bar{x}_k + d_x]$$

*Доказательство.*

Для простоты обозначим

$$f_k(\bar{y}) = \sum_{j=1}^m \log_2 \frac{\sum_{\bar{x} \in \bar{\mathcal{X}}_B(\bar{x}_k)^j} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} |\bar{y} - \bar{x}|^2\right)}{\sum_{\bar{x} \in \bar{\mathcal{X}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} |\bar{y} - \bar{x}|^2\right)}$$

Заметим, что плотность входного распределения равна

$$p(\bar{y}) = \frac{1}{2^m} \sum_{t=1}^{2^m} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \|\bar{y} - \bar{y}_t\|^2}$$

Из этого

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{y}_k} = \frac{1}{2^{m+1}\pi\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\bar{y} - \bar{y}_k}{\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\bar{y} - \bar{y}_k)^2} f_k(\bar{y}) d\bar{y}$$

Далее

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \bar{y}_k^2} = \frac{1}{2^{m+1}\pi\sigma^4} \int_{\mathbb{R}} \left( \left( \frac{\bar{y} - \bar{y}_k}{\sigma} \right)^2 - 1 \right) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\bar{y} - \bar{y}_k)^2} f_k(\bar{y}) d\bar{y}$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \bar{y}_{k_1} d\bar{y}_{k_2}} = 0$$

Следуя условиям выпуклости функции и факту, что  $\int_{\mathbb{R}} (x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$ , для доказательства утверждения достаточно доказать, что

$$\sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}} \left( \left( \frac{\bar{y} - \bar{y}_k}{\sigma} \right)^2 - 1 \right) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\bar{y} - \bar{y}_k)^2} f_k(\bar{y}) d\bar{y} < 0$$

Рассмотрим свойства функции  $f_k(\bar{y})$ . Она будет выпукла в области  $[\bar{x}_k - 2d_x, \bar{x}_k + 2d_x]$  и принимать свой максимум в области  $[\bar{x}_k - d_x, \bar{x}_k + d_x]$ .

Условие  $\sigma < d_x$  позволяет сделать разницу  $\exp\left(-\frac{(2d_x)^2}{2\sigma^2}\right)$  между экспонентами от соседних точек пренебрежительно малой. Таким образом, из-за природы функции  $f_k(\bar{y})$ , в окрестностях точек КАМ созвездия, отличных от  $\bar{x}_k$ , будет преобладать экспонента знаменателя одного из слагаемых. Поэтому для внутренних точек (с индексами  $1 < k < 2^m$ ) значение этой функции при  $\bar{y} > \bar{x}_k + 2d_x$  будет меньше, чем  $f_k(\bar{x}_k + 2d_x)$ . Аналогично, значение при  $\bar{y} < \bar{x}_k - 2d_x$  будет меньше, чем  $f_k(\bar{x}_k - 2d_x)$ .

Для внешних точек ( $k \in \{1, 2^m\}$ ) данное свойство не будет выполнено, но, используя то же свойство внутренних точек для одного из лучей ( $\bar{y} < \bar{x}_k - 2d_x$  или  $\bar{y} > \bar{x}_k + 2d_x$ ) и пренебрежительно малое значение  $f_k(\bar{y})$  на другом луче, можно показать, что  $f_k(\bar{y}_k - \Delta) + f_k(\bar{y}_k + \Delta) < f_k(\bar{y}_k - d_x) + f_k(\bar{y}_k + d_x)$  при  $\Delta > d_x$ . То же свойство будет выполнено для внутренних точек.

Функция  $\left( \left( \frac{\bar{y} - \bar{y}_k}{\sigma} \right)^2 - 1 \right) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\bar{y} - \bar{y}_k)^2}$  симметрична относительно  $\bar{y}_k$  и принимает отрицательные значения при  $\bar{y}_k - \sigma < \bar{y} < \bar{y}_k + \sigma$  и положительные на лучах  $\bar{y} < \bar{y}_k - \sigma$  и  $\bar{y} > \bar{y}_k + \sigma$ . Применяя свойство выпуклости  $f_k(\bar{y}_k)$  в области  $[\bar{x}_k - 2d_x, \bar{x}_k + 2d_x]$ , мы получаем что  $f_k(\bar{y}_k - \Delta) + f_k(\bar{y}_k + \Delta) < f_k(\bar{y}_k - \sigma) + f_k(\bar{y}_k + \sigma)$  для  $|\Delta| < \sigma$  и  $f_k(\bar{y}_k - \Delta) + f_k(\bar{y}_k + \Delta) > f_k(\bar{y}_k - \sigma) + f_k(\bar{y}_k + \sigma)$  для  $|\Delta| > \sigma$ . Таким образом

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} \left( \left( \frac{\bar{y} - \bar{y}_k}{\sigma} \right)^2 - 1 \right) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\bar{y} - \bar{y}_k)^2} f_k(\bar{y}) = \\
& = \int_{\frac{\bar{y}_k}{\sigma}}^{\infty} \left( \left( \frac{\bar{y} - \bar{y}_k}{\sigma} \right)^2 - 1 \right) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\bar{y} - \bar{y}_k)^2} (f_k(-\bar{y}) + f_k(\bar{y})) d\bar{y} < \\
& < \int_{\frac{\bar{y}_k}{\sigma}}^{\infty} \left( \left( \frac{\bar{y} - \bar{y}_k}{\sigma} \right)^2 - 1 \right) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\bar{y} - \bar{y}_k)^2} (f_k(\bar{y}_k - d_x) + f_k(\bar{y}_k + d_x)) d\bar{y} = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

что и требовалось для завершения доказательства.  $\square$

**Утверждение 2.2.** Функция взаимной информации одномерного созвездия

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbb{E}_{\bar{y}, B} \log_2 \frac{\sum_{x \in \bar{\mathcal{X}}_B^j} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}|y - x|^2\right)}{\frac{1}{2} \sum_{x \in \bar{\mathcal{X}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}|y - x|^2\right)}$$

симметрична.

*Доказательство.* Пусть у нас даны точки исходного одномерного созвездия  $\mathcal{Y}'$ . Докажем, что созвездие с точками

$$\mathcal{Y} = \{\bar{y}_k | \bar{y}_k = -\bar{y}'_{m-k+1}, \bar{y}'_{m-k+1} \in \mathcal{Y}'\}$$

имеет то же значение взаимной информации.

Заметим, что для  $\bar{y}_k$  и  $\bar{y}'_{m-k+1}$  все соответствующие множества  $\bar{\mathcal{X}}_B^j$  симметричны. Из этого следует, что соответствующие математические ожидания будут совпадать:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\bar{y}_k, B} \log_2 \frac{\sum_{x \in \bar{\mathcal{X}}_B^j} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}|y - x|^2\right)}{\frac{1}{2} \sum_{x \in \bar{\mathcal{X}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}|y - x|^2\right)} &= \\
&= \mathbb{E}_{\bar{y}'_{m-k+1}, B} \log_2 \frac{\sum_{x \in \bar{\mathcal{X}}_B^j} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}|y - x|^2\right)}{\frac{1}{2} \sum_{x \in \bar{\mathcal{X}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}|y - x|^2\right)}
\end{aligned}$$

Из этого следует равенство итоговых математических ожиданий (так как из равномерности точек созвездия следует  $\mathbb{E}_{\bar{y}, B} = \frac{1}{2^m} \sum_{k=1}^{2^m} \mathbb{E}_{\bar{y}_k, B}$ ).  $\square$

Данные утверждения имеет практическое применение. Как видно из постановки задачи, количество оптимизационных параметров у (4) равно удвоенному количеству точек созвездия. То есть для кодировки  $m$  битов нужно оптимизировать  $2^{m+1}$  действительных переменных (или  $2^m$  комплексных). Это число довольно большое. Из-за специфики задачи это число можно существенно снизить.

**Теорема 2.1.** При нормальном шуме со среднеквадратическим отклонением  $\sigma$  меньше, чем половина расстояния между соседними точками КАМ созвездия  $d_x$ , внутри области

$$y_k \in \left\{ y_{re} + iy_{im} \mid \begin{array}{l} y_{re} \in [(y_k)_{re} - d_x, (y_k)_{re} + d_x] \\ y_{im} \in [(y_k)_{im} - d_x, (y_k)_{im} + d_x] \end{array} \right\}$$

существует оптимальное созвездие, являющееся декартовым произведением двух одинаковых и симметричных одномерных созвездий.

*Доказательство.*

Введём обозначения  $y = y_{re} + i \cdot y_{im}$  и  $x = x_{re} + i \cdot x_{im}$ . Заметим, что  $\|y-x\|^2 = \|y_{re}-x_{re}\|^2 + \|y_{im}-x_{im}\|^2$ . Это ведёт к следующему разложению:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{X}_B^j} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}|y-x|^2\right) &= \\ \sum_{x \in \mathcal{X}_B^j} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}|y_{re}-x_{re}|^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}|y_{im}-x_{im}|^2\right) &= \\ \left( \sum_{x_{re} \in (\mathcal{X}_B^j)_{re}} \exp\left(-\frac{|y_{re}-x_{re}|^2}{2\sigma^2}\right) \right) \left( \sum_{x_{im} \in (\mathcal{X}_B^j)_{im}} \exp\left(-\frac{|y_{im}-x_{im}|^2}{2\sigma^2}\right) \right) & \quad (7) \end{aligned}$$

где  $(X_B^j)_{re}$  и  $(X_B^j)_{im}$  являются множествами реальных и мнимых частей множества  $X_B^j$  соответственно. Это разложение верно при условии, что само множество  $X_B^j$  является декартовым произведением одномерных множеств.

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{X}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}|y-x|^2\right) &= \\ &= \left( \sum_{x_{re} \in \mathcal{X}_{re}} \exp\left(-\frac{|y_{re}-x_{re}|^2}{2\sigma^2}\right) \right) \left( \sum_{x_{im} \in \mathcal{X}_{im}} \exp\left(-\frac{|y_{im}-x_{im}|^2}{2\sigma^2}\right) \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Используя свойство логарифма в итоге получаем, что наше математическое ожидание раскладывается на сумму двух отвечающих за действительную и мнимую части соответственно:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \mathbb{E}_y \log_2 \frac{\sum_{x \in \mathcal{X}_B^j} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}|y-x|^2\right)}{\frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{X}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}|y-x|^2\right)} &= \\ &= \sum_{j=1}^m \mathbb{E}_{y_{re}} \log_2 \frac{\sum_{x_{re} \in (\mathcal{X}_B^j)_{re}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}|y_{re}-x_{re}|^2\right)}{\frac{1}{2} \sum_{x_{re} \in \mathcal{X}_{re}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}|y_{re}-x_{re}|^2\right)} + \\ &+ \sum_{j=1}^m \mathbb{E}_{y_{im}} \log_2 \frac{\sum_{x_{im} \in (\mathcal{X}_B^j)_{im}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}|y_{im}-x_{im}|^2\right)}{\frac{1}{2} \sum_{x_{im} \in \mathcal{X}_{im}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}|y_{im}-x_{im}|^2\right)} \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь вспомним про наше ограничение (4):

$$\sum_{k=1}^{2^m} \|y_k\|^2 = \sum_{k=1}^{2^m} \|(y_k)_{re}\|^2 + \sum_{k=1}^{2^m} \|(y_k)_{im}\|^2 = N_{re} + N_{im} = 2^m$$

Из выпуклости функции (9) (по утверждению 2.1) следует, что в оптимальном решении  $N_{re} = N_{im}$ . Если это не так, то сделаем подстановку  $(y_k)_{re} \rightarrow \frac{(y_k)_{re} + (y_k)_{im}}{2}$ ,  $(y_k)_{im} \rightarrow \frac{(y_k)_{re} - (y_k)_{im}}{2}$  и это увеличит значение взаимной информации.

Так как  $N_{re} = N_{im}$ , то задача (4) распадается на две одинаковые подзадачи, имеющие одинаковое решение. И их итоговое решение также будет одинаковым.

Симметричность созвездия следует из симметричности функции взаимной информации (утверждение 2.2). Здесь также, если мы возьмём решение  $y^1$  и симметричное к нему  $y^2$  (отличное от  $y^1$ ) с той же взаимной информацией, то созвездие  $y = \frac{y^1 + y^2}{2}$  будет иметь большую взаимную информацию. □

Данная теорема позволяет существенно облегчить оптимизацию функции внутри окрестности КАМ созвездия. Она позволяет существенно сократить количество переменных. В обычной оптимизационной задаче (4)

у нас  $2^{m+1} - 1$  независимых и одна зависимая переменная. Представление созвездия в виде декартова произведения позволяет преобразовать эту задачу, сократив количество независимых переменных до  $2^{\frac{m}{2}} - 1$ .

Например для оптимизации созвездия для 4 бит нам потребуется всего один оптимизационный параметр, для 6 бит понадобится 3 параметра, а для 8 бит нам понадобится 7 параметров.

Заметим, что теорема доказывает существование оптимального созвездия только для шумов с среднеквадратичным отклонением  $\sigma < d_x$ , которые соответствуют случаям, которые встречаются на практике. При больших же шумах данная теорема не работает. В этом случае точки оптимального созвездия начинают склеиваться и оптимальная точка в этом случае может быть очень далеко от соответствующей точки КАМ созвездия. Но несмотря на это, свойство декартовости оптимального созвездия сохраняется.

### 3. Результаты симуляций

Тесты проводились на симуляционной платформе Sionna [2]. Первая часть моделирования была проведена для упрощенного канала. Здесь были получены оптимальные созвездия путем максимизации взаимной информации (смотрите некоторые примеры созвездий на рис. 4).

---

**Algorithm 3.1** Алгоритм Adam для оптимизации созвездия картографов

---

**Input**

$SNR, QAM\_Constellation$  ▷ ОСШ и КАМ созвездие

**Output**

$Mapper\_Constellation$

$Mapper\_Constellation \leftarrow QAM\_Constellation$

$Demapper\_Constellation \leftarrow QAM\_Constellation$

**for**  $t = 1 : T$  **do** ▷  $T$  это число эпох Adam

$bits \leftarrow BinarySource()$  ▷ Генерация случайной последовательности

$x \leftarrow Mapper(bits, Mapper\_Constellation)$

$y \leftarrow AWGN\_Channel(x, SNR)$  ▷ Прохождение сигнала через

АБГШ канал

$llrs \leftarrow Demapper(y, Demapper\_Constellation)$

$loss \leftarrow BinaryCrossentropy(bits, llrs)$

$Mapper\_Constellation \leftarrow AdamUpdate(Mapper\_Constellation, loss)$

**end for**

**return**  $Mapper\_Constellation$

---

Обучение созвездий проводилось с использованием оптимизатора Adam [9]. Мы описываем процесс обучения в алгоритме 3.1. Мы можем

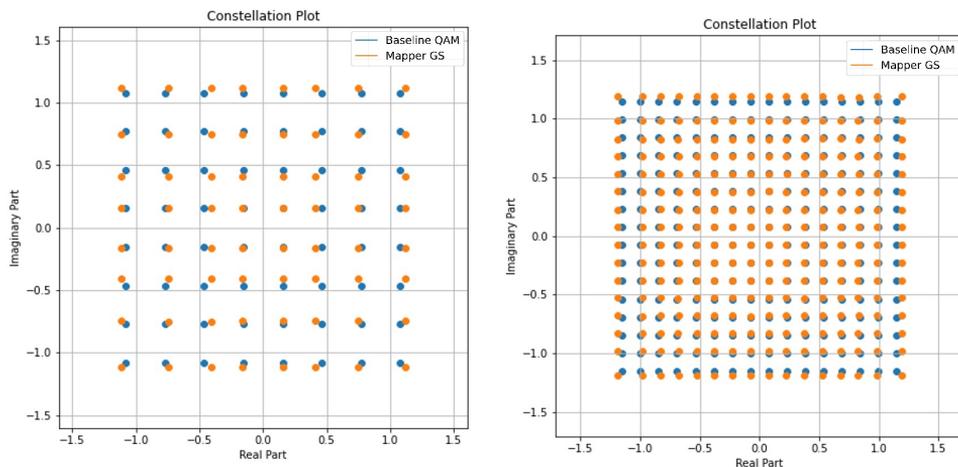


Рис. 4. Примеры созвездий. Синие точки обозначают базовое созвездие КАМ. Оранжевые точки обозначают изменённое созвездие

применить этот алгоритм к любому уровню сигнала-шум (ОСШ) и начать с любого базового созвездия КАМ. Здесь функция взаимной информации рассчитывается методом Монте-Карло [17]. Для случайной битовой последовательности с использованием отображения  $\mu$  мы получаем последовательность комплексных значений  $x$ , которая с дополнительным шумом преобразуется в последовательность комплексных значений  $y$ . Используя (1), мы получаем  $llr$  и, наконец, вычисляем функцию потерь как двоичную перекрестную энтропию. Сложность этого подхода зависит от требуемой точности. Но точки созвездия вычисляются в автономном режиме и не влияют на скорость передачи.

Для каждого ОСШ и каждого начального КАМ-созвездия был рассчитан объем передаваемой информации в случаях однородных и неоднородных созвездий (см. рис. 5). Здесь мы рассмотрим соотношение пропускной способности между "Baseline QAM", "Mapper GS" и "Shannon limit". "Baseline QAM" - это алгоритм с фиксированной системой созвездий (стандартная КАМ модуляция), "Mapper GS" - алгоритм с неоднородной системой созвездий, который максимизирует функцию взаимной информации, а "Shannon limit" максимальную теоретическую скорость передачи данных. Мы видим, что созвездия "Mapper GS" имеют выигрыш во взаимной информации до 1,5% при высоких значениях ОСШ (отношения сигнал/шум).

Полученные созвездия были протестированы на более сложных сценариях. Сначала был рассмотрен сценарий, в котором был учтён эффект LDPC-кодирования. Симулятор Sionna использует LDPC-коды из стан-

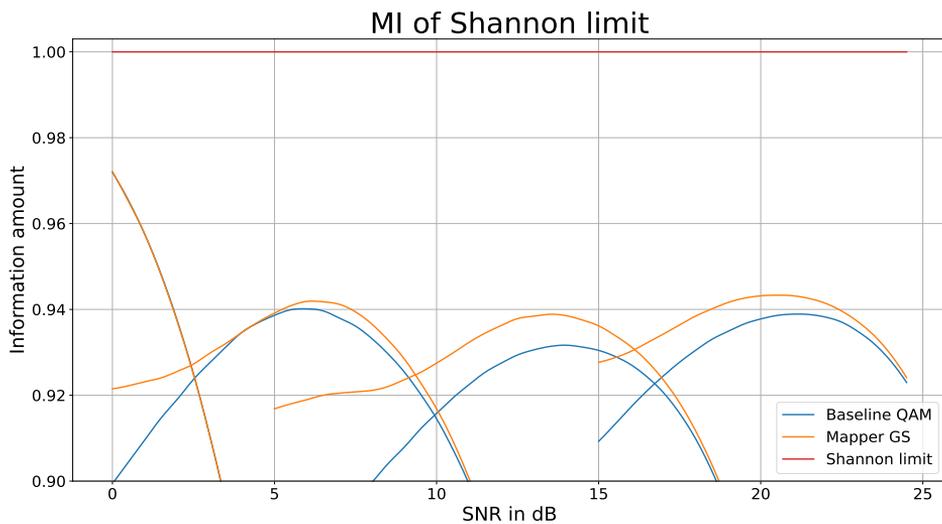


Рис. 5. Взаимная информация. Ось x представляет собой частоту ОСШ в дБ. Ось y представляет процент дополнительной информации, которую мы можем передать пользователю, по сравнению с пределом Шеннона. Здесь синяя линия показывает процент передачи для базовой КАМ-модуляции. Оранжевая линия показывает процент передачи с помощью изменённого созвездия.

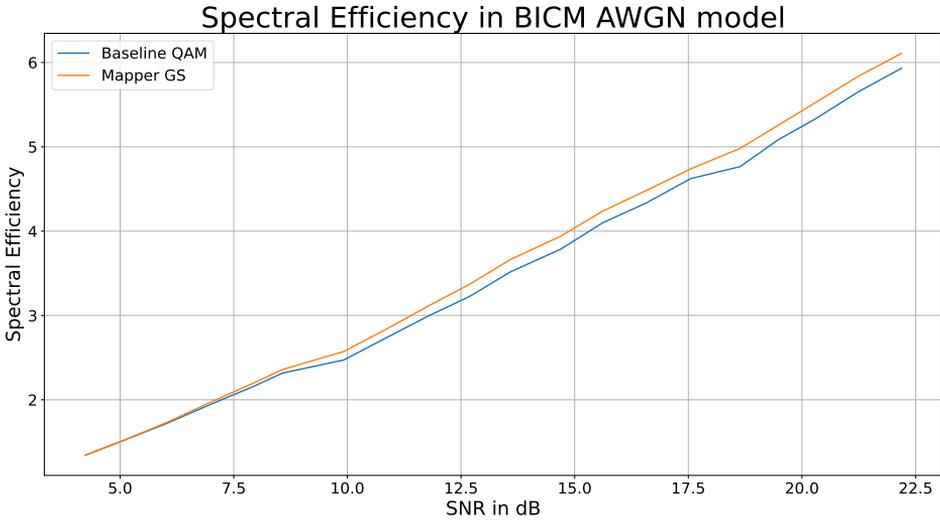


Рис. 6. Спектральная эффективность. По оси x отложено значение ОСШ в дБ. По оси y - количество информации, которое мы можем передать пользователю за единицу времени. Здесь синяя линия показывает количество информации, передаваемой с помощью базовой КАМ-модуляции. Оранжевая линия показывает объем информации, передаваемой с помощью изменённого созвездия.

дарт 3GPP TS 38.211 V17.0.0 (2021-12). Результат можно увидеть на рис. 6.

Спектральная эффективность (в битах на единицу времени) является показателем эффективности полосы пропускания. В нашем случае она определяется как

$$SE = (1 - BLER) \cdot Coderate \cdot num\_bits$$

где  $BLER$  (Block Error Rate) это вероятность ошибки при передаче одного блока LDPC,  $Coderate$  это скорость кодирования на основе СМК,  $num\_bits$  это количество битов, кодирующих созвездие. Например, для КАМ16:  $num\_bits = \log_2(16) = 4$ . Значение  $num\_bits$  также зависит от СМК.

Значения  $Coderate$  и  $num\_bits$  получены из 3GPP стандарта. Значение  $BLER$  было получено путём симуляции LDPC кодирования.

Для сравнения со старым подходом, рассматривается график относительного выигрыша (Рис. 7).

$$SE_{gain} = \frac{SE_{after}}{SE_{before}} - 1$$

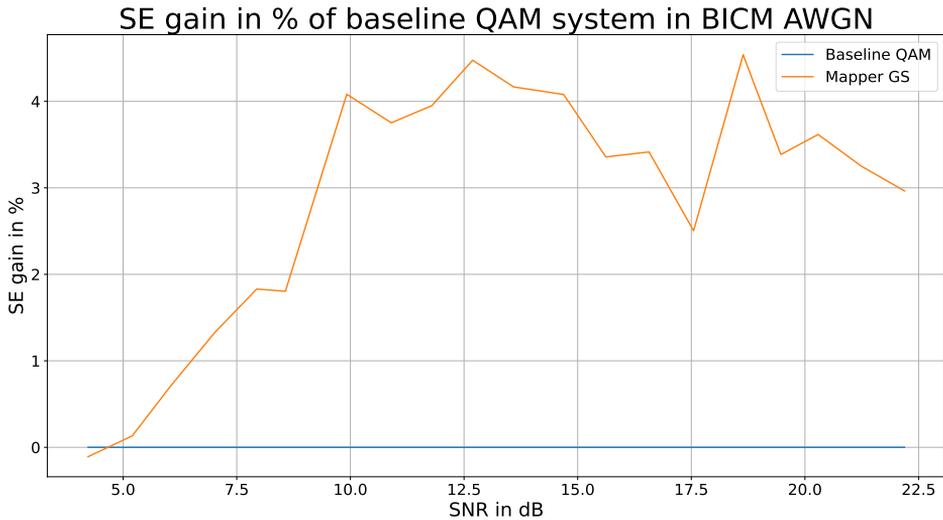


Рис. 7. График относительного выигрыша в спектральной эффективности. По оси x отложено значение ОСШ в дБ. По оси y - процент дополнительной информации, которую мы можем передать пользователю, по сравнению с базовой подходом с модуляцией КАМ. Оранжевая линия показывает процент передачи с использованием формованного созвездия.

В этой серии экспериментов мы получаем выигрыш в размере до 4%.

Вторая серия экспериментов была проведена с учетом модуляции с ортогональным частотным мультиплексированием (Orthogonal frequency-division multiplexing, OFDM). Архитектура системы состоит из LDPC-кода с прямой коррекцией ошибок, устройства перемешивания битов, средства преобразования цифрового сигнала и обратно, средства оценки канала методом наименьших квадратов, эквалайзера LMMSE, модулятора OFDM. В системе используются различные модели беспроводных каналов 3GPP с кластеризованной линией задержки (Clustered delay line, CDL) вне зоны прямой видимости (Non-Line-of-Sight, NLoS): A, B, C; и модели каналов прямой видимости (Line-of-Sight, LoS) CDL: D, E (Fig. 8) [11]. Временные модели моделируются в режиме реального времени с учетом помех между символами и разными частотами, в то время как частотные

модели моделируются непосредственно в частотной области без учета ЭТИХ помех.

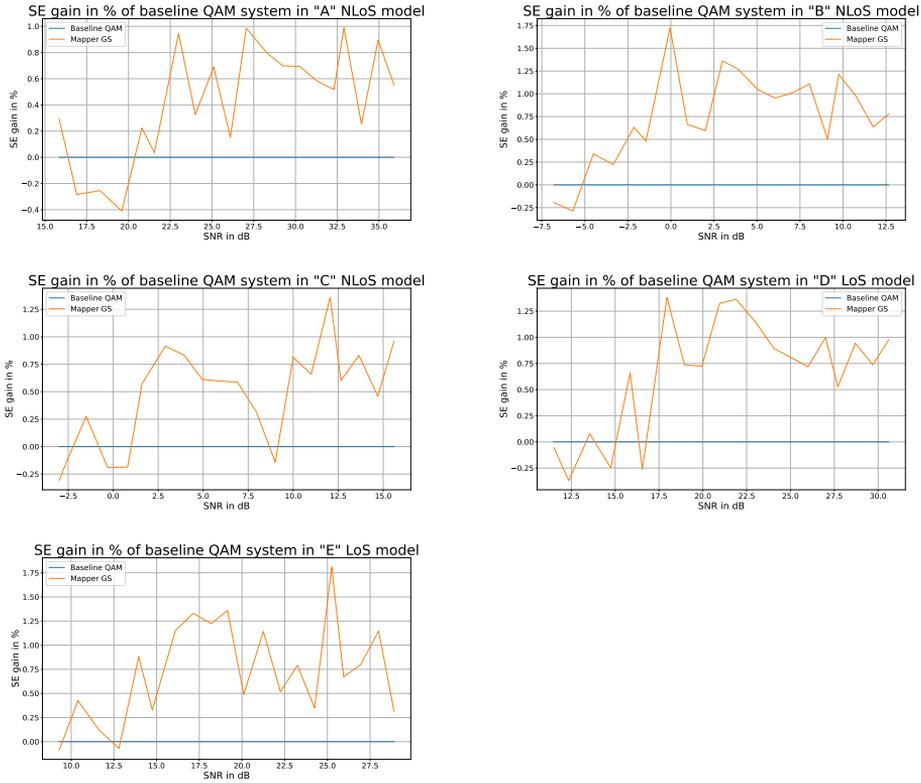


Рис. 8. Графики относительного выигрыша в спектральной эффективности для моделей беспроводных каналов CDL 3GPP: NLoS A, NLoS B, NLoS C, LoS D, LoS E.

Для этих серий экспериментов мы получаем выигрыш в размере до 1.75%.

## 4. Заключение

В этой статье представлено решение проблемы формирования созвездий с условием, что оно может быть изменено только на одной стороне. Созвездия, оптимизированные на простой модели, улучшают функцию спектральной эффективности на более сложных моделях, которые учитывают различные кодирования. Было показано, что такой подход может дать выигрыш около 4% для простых моделей каналов АБГШ с кодом LDPC и около 1,5% для моделей OFDM LoS и NLoS.

# Geometric shaping of the QAM constellation on the transmitter side in a wireless channel with a fixed decoding algorithm.

Yudakov D.A.

The paper explores the optimization of constellation geometry to improve throughput in wireless communication systems. It presents an approach where constellations can be unevenly distributed to enhance transmission efficiency. The optimization is performed on the base station side, and its effectiveness is validated through numerical experiments using LDPC coding, OFDM modulation, and MIMO technologies.

**Keywords:** Wireless, Constellation diagram, Geometric Shaping, Mutual Information.

## References

- [1] O'shea Timothy, Hoydis Jakob, "An introduction to deep learning for the physical layer", *IEEE Transactions on Cognitive Communications and Networking*, **3:4** (2017), 563–575.
- [2] Hoydis Jakob, Cammerer Sebastian, Aoudia Fay, Vem Avinash, Binder Nikolaus, Marcus Guillermo, Keller Alexander, "Sionna: An open-source library for next-generation physical layer research", *arXiv preprint arXiv:2203.11854*, 2022.
- [3] Mirani Ali, Agrell Erik, Karlsson Magnus, "Low-complexity geometric shaping", *Journal of Lightwave Technology*, **39:2** (2020), 363–371.
- [4] Shannon Claude E, "A mathematical theory of communication", *The Bell system technical journal*, **27:3** (1948), 379–423.
- [5] Channels, NR Physical, "Modulation (Release 15), V15. 4.0, document TS 38.211, 3GPP, Dec. 2018".
- [6] Svensson Arne, "An introduction to adaptive QAM modulation schemes for known and predicted channels", *Proceedings of the IEEE*, **95:12** (2007), 2322–2336.
- [7] Bobrov Evgeny, Dordzhiev Adyan, "On Probabilistic QAM Shaping for 5G MIMO Wireless Channel with Realistic LDPC Codes", *arXiv e-prints*, 2023.
- [8] Qu Zhen, Djordjevic Ivan B, "On the probabilistic shaping and geometric shaping in optical communication systems", *IEEE Access*, **7** (2019), 21454–21464.

- [9] Da Kingma, “A method for stochastic optimization”, *arXiv preprint arXiv:1412.6980*, 2014.
- [10] Hu Fangchen, Zou Peng, Li Guoqiang, Yu Weixiang, Chi Nan, “Enhanced performance of CAP-modulated visible light communication system utilizing geometric shaping and rotation coding”, *IEEE Photonics Journal*, **11**:5 (2019), 1–12.
- [11] Barb Gordana, Otesteanu Marius, “On the influence of delay spread in tdl and cdl channel models for downlink 5g mimo systems”, *2019 IEEE 10th Annual Ubiquitous Computing, Electronics & Mobile Communication Conference (UEMCON)*, **5** (2019), 0958–0962.
- [12] Chen Dechao, Zhang Jingwen, Zhao Rui, “Adaptive modulation and coding in satellite-integrated 5G communication system”, *2021 IEEE 21st International Conference on Communication Technology (ICCT)*, **6** (2021), 1402–1407.
- [13] Hassan Najeeb Ul, Xu Wen, Kakkavas Anastasios, “Applying Coded Modulation with Probabilistic and Geometric Shaping for Wireless Backhaul Channel”, *2018 IEEE 29th Annual International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC)*, **5** (2018), 1–5.
- [14] Jones Rasmus T, Yankov Metodi P, Zibar Darko, “End-to-end learning for GMI optimized geometric constellation shape”, *45th European Conference on Optical Communication (ECOC 2019)*, **4** (2019), 1–4.
- [15] Chen Bin, Okonkwo Chigo, Hafermann Hartmut, Alvarado Alex, “Increasing achievable information rates via geometric shaping”, *2018 European Conference on Optical Communication (ECOC)*, **3** (2018), 1–3.
- [16] Caire Giuseppe, Taricco Giorgio, Biglieri Ezio, “Bit-interleaved coded modulation”, *Proceedings of ICC'97-International Conference on Communications*, **3** (1997), 1463–1467.
- [17] Rubinstein Reuven Y, Kroese Dirk P, *Simulation and the Monte Carlo method*, John Wiley & Sons, 2016.