Реализация алгоритмов схемами из функциональных элементов

М. В. Носов[1]

В работе построена схема из функциональных элементов для машины Тьюринга с сохранением условия полиномиальности, если таким свойством обладала машина.

Ключевые слова: машина Тьюринга, схема из функциональных элементов.

Пусть есть задача, которая всегда имеет определённый ответ. Есть алгоритм решения этой задачи, соответствующая машина Тьюринга всегда останавливается в заключительном состоянии и ответ задачи — содержимое соответствующей ячейки ленты. Задача имеет характеристики и входные параметры. Например, возьмём известную задачу: можно ли набор натуральных чисел разделить на два набора с одинаковой суммой чисел. Эта задача всегда имеет определённый ответ. В такой постановки имеется две характеристики: количество чисел в исходном наборе и верхняя граница чисел. Входные параметры — сами целые числа в диапазоне от 1 до верхней границы.

Сложность алгоритма — минимальное количество шагов машины Тьюринга при определённых характеристиках и любых допустимых наборах параметров; пусть сложность строго мажорируется величиной r, зависящей от характеристик. Пусть машина имеет алфавит из m символов, перенумеруем их числами $1, \ldots, m$. Пусть машина имеет k состояний, перенумеруем их числами $1, \ldots, k$, причём k — номер заключительного состояния. Имеется три движения: 1 — вправо, 2 — влево, 3 — отсутствие движения. В начальный момент головка стоит на самом левом непустом символе,тогда зона работы машины всегда находится между ячейкой, расположенной от начальной ячейки на r ячеек влево и на r ячеек вправо. Таким образом, головка может находится только в ячейках, расположенных среди этих $2r + 1$ ячейках, так и перенумеруем их слева направо $1, \ldots, 2r + 1$, но головка никогда не попадёт в ячейки с номерами 1 и $2r + 1$ в силу выбора r.

Первая задача состоит в построении схемы из функциональных элементов в классическом базисе, которая будет выдавать такой же результат, как и машина Тьюринга и, главное, если алгоритм полиномиален, то

[1] *Носов Михаил Васильевич* — с.н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mvnosov@rambler.ru.

Nosov Michail Vasilevich-senior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

полиномиальной будет схема. В начале изложим очень грубо идею построения схемы с некоторой вольностью в символах чтобы не загромождать формулы. Пусть машина Тьюринга имеет n команд $(q'aq''bd)_t, t = 1, \ldots, n$. В грубой схеме будет $2(2r+1)+5n+2$ входов, на первые $2(2r+1)$ входов подаются номера соответствующих ячеек и их содержимое, на вторые $5n$ входов подаются команды и на последние два входа подаются начальное состояние и номер ячейки в начальном состоянии.Грубая схема состоит из r пар рядов. Первый ряд каждой пары имеет $2r+1$ блоков, имеется соответствие между ячейкой и блоком с тем же номером. На вход каждого блока поступает следующее:

1. содержимое соответствующей ячейки (или выхода соответствующего блока) на текущий момент a_{in};

2. номер ячейки (блока) s;

3. текущее состояние управляющего устройства q_{in};

4. номер ячейки, на которой сейчас стоит головка l_{in};

5. все команды программы, т.е. $5n$ чисел.

Выходом каждого блока первого ряда пары является следующее:

1. содержимое соответствующей ячейки a_{out};

2. состояние управляющего устройства q_{out}, если оно работает в этой ячейк,и или число 0, если управляющее устройство не работает в этой ячейке, или число k, если попали в заключительное сосотояние;

3. номер новой ячейки нового положения головки l_{out}, если головка работает в текущей ячейке, иначе число 0 или положение головки, если попали в заключительное состояние;

Введём обозначение $\chi(u=v)=1$, если $u=v$, иначе равно $\chi(u=v)=0$. Функция выходов задаётся следующей формулой:

$$\begin{gathered} a_{out} = a_{in}(1-\chi(l_{in}=s))(1-\chi(q_{in}=k)) + \\ + \sum_{(q'aq''bd)_i, i=1,\ldots,n} \chi(l_{in}=s)\chi(q_{in}=q')\chi(a_{in}=a)b + \\ + a_{in}\chi(q_{in}=k). \end{gathered} \tag{1}$$

Значит

$$a_{out} = \begin{cases} a_{in}, & q_{in} \neq k, l_{in} \neq s, \\ b, & q_{in} \neq k, l_{in} = s, \\ a_{in}, & q_{in} = k. \end{cases}$$

Функция состояния задаётся следующей формулой:

$$\begin{gathered} q_{out} = \sum_{(q'aq''bd)_i, i=1,\ldots,n} \chi(l_{in}=s)\chi(q_{in}=q')\chi(a_{in}=a)q'' + \\ + k\chi(q_{in}=k). \end{gathered} \tag{2}$$

Значит

$$q_{out} = \begin{cases} 0, & q_{in} \neq k, l_{in} \neq s, \\ q'', & q_{in} \neq k, l_{in} = s, \\ k, & q_{in} = k. \end{cases}$$

Функция номера новой ячейки положения головки (сдвиг вправо $d = 1$, сдвиг влево $d = -1$, отсутствие движения $d = 0$) задаётся следующей формулой:

$$l_{out} = \sum_{(q'aq''bd)_i, i=1,\ldots,n} \chi(l_{in} = s)\chi(q_{in} = q')\chi(a_{in} = a)(s + d) + \\ + l_{in}\chi(q_{in} = k). \qquad (3)$$

Значит

$$l_{out} = \begin{cases} 0, & q_{in} \neq k, l_{in} \neq s, \\ s + d, & q_{in} \neq k, l_{in} = s, \\ l_{in}, & q_{in} = k. \end{cases}$$

Второй ряд каждой пары кроме последней представлен одним блоком, имеет две группы входов. Первая группа состоит из $2r + 1$ входов, куда постпает q_{out} с каждого блока первого ряда пары, вторая группа имеет $2r + 1$ входов, куда поступает l_{out} с каждого блока первого ряда пары. Пока машина не попала в заключительное состояние на $2r$ входов первой группы будут поступать 0 и только на один вход поступит q'',в блоке выберется максимум, т.е. то состояние, в котором находится сейчас машина. На входах второй группы аналогично произойдёт выбор нового положения головки машины. Состояние и положение головки — два выхода второго ряда пары. Если в попадаем в заключительное состояние, то дальше оно не меняется, аналогично не меняется номер ячейки положения головки. Так как пар рядов больше чем число шагов машины, то попадание в заключительное состояние произойдёт обязательно. Последний ряд последней пары выдаёт содержимое ячейки с номером l_{out}.Это можно представить следующей формулой

$$a_{out} = \sum_{s=1,\ldots,2r+1} \chi(l_{in} = s)a_{in}^s \qquad (4)$$

Это и будет ответом задачи в соответствующих значениях параметров.

Переходим к построению схемы из функциональных элементов в классическом базисе. Закодируем алфавит машины следующим образом:

1-ый символ алфавита — $\underbrace{0\ldots001}_{\text{m}}$

2-ой символ алфавита — $\underbrace{0\ldots011}_{\text{m}}$

. . . .
m-ый символ алфавита — $\underbrace{1\dots111}_{\text{m}}$
Аналогично закодируем k состояний:
1-ый символ множества состояний — $\underbrace{0\dots001}_{\text{k}}$
2-ой символ множества состоянийа — $\underbrace{0\dots011}_{\text{k}}$
. . . .
k-ый символ множества состояний — $\underbrace{1\dots111}_{\text{k}}$
Закодируем сдвиги:
сдвиг вправо — 01
сдвиг влево — 10
отсутствие движения — 11
Закодируем номера ячеек машины Тьюринга:
1-ая ячейка ленты — $\underbrace{0\dots001}_{2r+1}$
2-ая ячейка ленты — $\underbrace{0\dots011}_{2r+1}$
. . . .
$(2r+1)$-ая ячейка ленты — $\underbrace{1\dots111}_{2r+1}$

Головка в начальный момент находится в $(r+1)$-ой ячейке.Введём обозначение для команд программы

$$\{(((q'_1,\dots,q'_k),(a_1,\dots,a_m),(q''_1,\dots,q''_k)(b_1,\dots,b_m),(d_1,d_2))_t, t=1,\dots n\}$$

Схема будет иметь $m(2r+1)$ входов — это коды содержимых ячеек.Из первого входа создаём 0 и 1 и затем из них коды номеров всех ячеек, коды всех команд программы, код номера $(r+1)$ ячейки — положение головки в начальный момент и код номера начального состояния согласно кодировки.

Согласно описанной выше грубой модели на вход блока поступает по содержимому ячейки (или выхода блока) $a_{in} = (a_{in\,1},\dots,a_{in\,m})$, тогда первое слагаемое в формуле (1) для a_{out} реализуется следующей формулой:

$$p_i^1 = a_{in\,i}\cdot\rceil(\bigwedge_{j=1}^{2r+1}(l_{in\,j}\sim s_j))\cdot\rceil(\bigwedge_{j=1}^{k}(q_{in\,j}\sim 1)),$$
$$i=1,\dots,m.$$

Для реализации достаточно $m(14r+k+11)$ элементов. Второе слагаемое реализуется следующей формулой:

$$p_i^2 = \bigvee_{t=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{2r+1} (l_{in\,j} \sim s_j) \right) \cdot \left(\bigwedge_{j=1}^{k} (q_{in\,j} \sim q'_{jt}) \right) \cdot \left(\bigwedge_{j=1}^{m} (a_{in\,j} \sim a_{jt}) \right) \cdot b_{it},$$
$$i = 1, \ldots, m.$$

Для реализации достаточно $m(14rn + 7kn + 7mn + 10n)$ элементов. Третье слагаемое реализуется формулой:

$$p_i^3 = a_{in\,i} \cdot \left(\bigwedge_{j=1}^{k} (q_{in\,j} \sim 1) \right),$$
$$i = 1, \ldots, m.$$

Для реализации достаточно mk элементов. Тогда

$$a_{out} = (p_1^1 \bigvee p_1^2 \bigvee p_1^3, \ldots, p_m^1 \bigvee p_m^2 \bigvee p_m^3).$$

Для реализации достаточно $m(14r + 2k + 14rn + 7kn + 7mn + 19n + 11)$ элементов.

Далее аналогично, согласно описанной выше грубой модели на вход блока поступает по текущему состоянию $q_{in} = (q_{in\,1}, \ldots, q_{in\,k})$, тогда первое слагаемое в формуле (2) для q_{out} реализуется следующей формулой:

$$u_i^1 = \bigvee_{t=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{2r+1} (l_{in\,j} \sim s_j) \right) \cdot \left(\bigwedge_{j=1}^{k} (q_{in\,j} \sim q'_{jt}) \right) \cdot \left(\bigwedge_{j=1}^{m} (a_{in\,j} \sim a_{jt}) \right) \cdot q''_{it},$$
$$i = 1, \ldots, k.$$

Для реализации достаточно k(14rn+7kn+7mn+10n) элементов. Второе слагаемое реализуется формулой:

$$u_i^2 = \bigwedge_{j=1}^{k} (q_{in\,j} \sim 1),$$
$$i = 1, \ldots, k.$$

Для реализации достаточно k^2 элементов.Тогда

$$q_{out} = (u_1^1 \bigvee u_1^2, \ldots, u_k^1 \bigvee u_k^2).$$

Для реализации достаточно $k(14rn + 7kn + 7mn + 10n + k + 1)$ элементов.

Наконец, согласно описанной выше грубой модели на вход блока поступает по текущему положению головки $l_{in} = (l_{in\,1}, \ldots, l_{in\,(2r+1)})$, тогда первое слагаемое в формуле (3) для l_{out} согласно кодировке сдвига кодировки номеров ячеек реализуется последовательностью следующих формул:

$$g_i(s_1,\ldots,s_{2r+1}) = s_i \bigvee s_{i+1}, \qquad i=1,\ldots,2r.$$
$$g_{2r+1}(s_1,\ldots,s_{2r+1}) = s_{2r+1}.$$
$$h_i(s_1,\ldots,s_{2r+1}) = s_{i-1} \bigwedge s_i, \qquad i=2,\ldots,2r+1.$$
$$h_1(s_1,\ldots,s_{2r+1}) = s_1.$$
$$f_{it}(d_1,d_2,s_1,\ldots,s_{2r+1}) = (\rceil d_{1\,t}) d_{2\,t} g_i(s_1,\ldots,s_{2r+1}) \bigvee$$
$$\bigvee d_{1\,t}(\rceil d_{2\,t}) h_i(s_1,\ldots,s_{2r+1}) \bigvee d_{1\,t} d_{2\,t} s_i,$$
$$v_i^1 = \bigvee_{t=1}^{n} (\bigwedge_{j=1}^{2r+1} (l_{in\,j} \sim s_j)) \cdot (\bigwedge_{j=1}^{k} (q_{in\,j} \sim q'_{jt}))\cdot$$
$$\cdot(\bigwedge_{j=1}^{m} (a_{in\,j} \sim a_{jt})) \cdot f_{it}(d_1,d_2,s_1,\ldots,s_{2r+1}),$$
$$i=1,\ldots,2r+1.$$

Для реализации этой последовательности формул достаточно $(2r+1)n(18r+7k+7m+24)$ элементов. Второе слагаемое реализуется формулой:

$$v_i^2 = l_{in\,i} \cdot \bigwedge_{j=1}^{k} (q_{in\,j} \sim 1),$$
$$i=1,\ldots,2r+1.$$

Для реализации достаточно $(2r+1)k$ элементов.Тогда

$$l_{out} = (v_1^1 \bigvee v_1^2, \ldots, v_{2r+1}^1 \bigvee v_{2r+1}^2).$$

Для реализации достаточно $(2r+1)(18rn+7kn+7mn+20n+k)$ элементов.

На вход второго блока поступают $q_{out}^w = (q_{out\,1}^w, \ldots, q_{out\,k}^w)$ с каждого блока первого ряда пары, здесь w — номер блока, $w=1,\ldots,2r+1$,выбирается максимум Q_{out} — текущее состояние машины по следующей формуле:

$$Q_{out\,i} = \bigvee_{w=1}^{2r+1} q_{out\,i}^w, \qquad i=1,\ldots,k.$$

Для реализации достаточно $k(2r+1)$ элементов.

Аналогично, на вход второго блока поступают $l_{out}^w = (l_{out\,1}^w, \ldots, l_{out\,k}^w)$ с каждого блока первого ряда пары, здесь w — номер блока, $w=1,\ldots,2r+1$,выбирается максимум L_{out} — текущее положение головки по следующей формуле:

$$L_{out\,i} = \bigvee_{w=1}^{2r+1} l_{out\,i}^w, \qquad i=1,\ldots,2r+1.$$

Для реализации достаточно $(2r+1)^2$ элементов.

Теперь второй ряд последней пары рядов схемы. Формула (4) для a_{out} реализуется следующей формулой:

$$a_{out\,i} = \bigvee_{s=1}^{2r+1} \bigwedge_{j=1}^{2r+1} (l_{in\,j} \sim s_j) a^s_{in\,i}$$
$$i = 1, \ldots, m.$$

Сложность полученной схемы есть полином от r, m, k.

Рассмотрим вторую задачу. Пусть есть алгоритм решения задачи. Пусть алфавит соответствующей машины Тьюринга содержит символы 0 и 1. В начальный момент на ленте присутствуют только 0, 1 и пустой символ. Как было сказано в начале, известна верхняя оценка числа шагов. Пусть при любых значениях параметров задачи на ленте входные символы занимают фиксированное число ячеек. Выбрана кодировка алфавита числами 0 и 1 как в первой задаче. Машина всегда останавливается в заключительном состоянии и содержимое соответствующей ячейки 0 или 1. Этой машине поставим в соответствие схему из функциональных элементов. Входов у схемы будет столько, сколько в начальный момент символов 0 и 1 на ленте. Далее в схеме производится переход к схеме описанной в первой задаче: кодируются 0, 1 и пустой символ согласно выбранной кодировке. Для кодировки выбирается количество ячеек ленты исходя из верхней оценки числа шагов. Далее строится схема, как в первой задаче. После получения ответа — кода 0 или 1, происходит переход от кода к кодируемому символу 0 или 1. Если алгоритм полиномиален, то и схема полиномиальна. Сложность этой схемы не меньше, чем сложность минимальной схемы. Следовательно, если алгоритм полиномиален, то и минимальная схема полиномиальна. Обратно, по любой схеме можно построить машину Тьюринга, причём, если схема полиномиальна, то и машина Тьюринга полиномиальна. Если минимальный алгоритм не полиномиален, то при установленной системы кодировки минимальная схема не может быть полиномиальной. Относительно построения по схеме машины можно посмотреть [1]. По вопросу определения сложности минимальной схемы для известной булевской функции можно посмотреть [2] и скорректировать на частичную булевскую функцию, которая появляется при кодировании.

Список литературы

[1] Носов М.В., "О соответствии сложности СФЭ и числа шагов машины Тьюринга", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **25**:3, 189-190.

[2] Носов М.В., "Об аналитическом представлении функции сложности минимальной схемы в базисе из штриха Шеффера", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21**:2, 193-196.

Implementation of algorithms by schemes of functional elements

Nosov M.V.

In this paper, a scheme of functional elements for a Turing machine is constructed while maintaining the polynomial condition, if the machine possessed such a property.

Keywords: Turing machine, a scheme of functional elements.

References

[1] Nosov M.V., "On the correspondence between the complexity of the SFE and the number of steps of the Turing machine", *Intelligent systems. Theory and Applications*, **25**:3 (2021), 189–190 (In Russian).

[2] Nosov M.V., "On the analytical representation of the function of the complexity of the minimum scheme in the basis of the Sheffer stroke", *Intelligent systems. Theory and Applications*, **21**:2 (2017), 193–196 (In Russian).