

О функциональной системе, полученной из алгебры множеств добавлением индикаторов мощности

Ю. С. Капустин¹

В данной работе исследуются свойства функциональной системы C_n с носителем $2^{\mathbb{Z}}$, порождённой теоретико-множественными функциями и индикаторами мощности $\mathbf{card}_0(x) \dots \mathbf{card}_n(x)$.

Ключевые слова: функциональная система, предполный класс, алгебра множеств, критерий полноты.

1. Введение

В работе [1] изучалась алгебраическая система с носителем $\mathbb{Z} \cup 2^{\mathbb{Z}}$, образованная отношениями и операциями, выразимыми с помощью логических связок, описателей и кванторов через отношение принадлежности. Было установлено, что любая кванторно определяемая функция над множествами в этой системе может быть выражена через обычные теоретико-множественные функции и индикаторы мощности $\mathbf{card}_i(x)$, принимающие значение \mathbb{Z} , если множество x содержит ровно i элементов, и значение \emptyset иначе.

Это привлекло внимание к изучению функциональной системы C_n с носителем $2^{\mathbb{Z}}$, порождённой теоретико-множественными функциями и индикаторами мощности $\mathbf{card}_0(x) \dots \mathbf{card}_n(x)$.

Получен ряд важных свойств этой функциональной системы. Найдено число функций в системе, предложен алгоритм решения уравнений в системе. Интересно, что число функций от заданного числа переменных в C_n имеет существенно больший порядок роста, чем для функций конечнозначных логик P_2 и P_k , в связи с чем её изучение не сводится к изучению указанных функциональных систем.

2. Основные понятия

Пусть \mathbb{Z} — множество целых чисел. В качестве универсума возьмём $2^{\mathbb{Z}}$ — множество его подмножеств.

¹Капустин Юрий Сергеевич — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: kapustin.iu@yandex.ru

Kapustin Iurii Sergeevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

На множестве $2^{\mathbb{Z}}$ естественным образом определены двухместные функции $a \cap b, a \cup b, a \setminus b$ и нульместная функция-константа \mathbb{Z} .

Запись $|x|$ обозначает число элементов в x .

Определим на этом множестве также счётное число функций $\mathbf{card}_k(a)$ (k — целый неотрицательный параметр) следующим образом:

$$\mathbf{card}_k(a) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } |a| = k \\ \emptyset, & \text{если } |a| \neq k. \end{cases}$$

Обозначим S_n — множество функций

$\{a \cap b, a \cup b, a \setminus b, \mathbb{Z}, \mathbf{card}_0(a), \dots, \mathbf{card}_n(a)\}$, определённых на множестве $2^{\mathbb{Z}}$.

Обозначим через C_n функциональную систему с носителем $2^{\mathbb{Z}}$, порождённую функциями из S_n , то есть содержащую все функции, выразимые над S_n при помощи суперпозиции, и только их. Определение суперпозиции можно посмотреть в книге [3].

Обозначим S_C — множество функций $\{a \cap b, a \cup b, a \setminus b, \mathbb{Z}\}$. Функциональную систему с носителем $2^{\mathbb{Z}}$, порождённую функциями из S_C , обозначим через C . Как будет доказано далее, она изоморфна P_2 .

Будем называть два терма равносильными, если они выражают одну и ту же функцию.

Через x^σ будем обозначать терм x , если σ — булева константа 1, и $(\mathbb{Z} \setminus x)$, если σ — булева константа 0. Обозначение $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$ будет использоваться для терма $x_1^{\sigma_1} \cap \dots \cap x_m^{\sigma_m}$.

Пусть рассматриваются функции из C_n от m переменных $x_1 \dots x_m$, где n, m — фиксированные натуральные числа. Атомарным индикатором называется терм вида

$$\mathbf{card}_k(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})$$

для $0 \leq k \leq n$ или

$$\mathbb{Z} \setminus (\mathbf{card}_0(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}) \cup \dots \cup \mathbf{card}_n(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})).$$

Для простоты будем обозначать $\mathbb{Z} \setminus (\mathbf{card}_0(x) \cup \dots \cup \mathbf{card}_n(x))$ как $\mathbf{card}_{>n}(x)$. Значение этого выражения равно \mathbb{Z} , если множество x содержит более n элементов, и \emptyset иначе.

Здесь и далее, когда упоминается функция $\mathbf{card}_l(x)$, где $l > n$, под ней подразумевается функция $\mathbf{card}_{>n}(x) \cap \mathbf{card}_{>n}(\mathbb{Z} \setminus x)$.

Например, если рассматриваются функции от переменных x_1, x_2 в C_2 , терм

$$\mathbf{card}_1(x_1 \cap (\mathbb{Z} \setminus x_2))$$

— атомарный индикатор, а терм

$$\mathbf{card}_0(x_2)$$

— нет, так как не содержит переменной x_1 .

Составным индикатором называется терм

$$\bigcap_{\sigma \in \{0,1\}^m} \mathbf{card}_{k_\sigma}(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}),$$

где \mathbf{card}_{k_σ} может означать $\mathbf{card}_0, \mathbf{card}_1, \dots, \mathbf{card}_n$ или $\mathbf{card}_{>n}$.

Например, если рассматриваются функции от переменной x_1 в C_2 , терм

$$\mathbf{card}_1(x_1) \bigcap \mathbf{card}_2(\mathbb{Z} \setminus x_1)$$

— составной индикатор, а терм

$$\mathbf{card}_0(x_1)$$

— нет, так как не содержит атомарного индикатора для $\mathbb{Z} \setminus (x_1)$ (то есть для x_1^0).

Далее будет доказано, что если составной индикатор A_i не содержит $\mathbf{card}_{>n}$, то его значение — константа \emptyset (поскольку объединение конечного число конечных множеств не может быть бесконечным множеством \mathbb{Z}).

Стандартной формой функции из C от переменных x_1, \dots, x_m назовём терм вида $B_1 \cup \dots \cup B_j$, где каждое B_i имеет вид $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$. Эта форма является аналогом ДНФ. Для функции-константы \emptyset стандартной формой назовём терм $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$. В дальнейшем этот терм будет обозначаться как \emptyset .

Нормальной формой m -местной функции из C_n называется терм вида $\bigcup_i (A_i \bigcap D_i)$, где A_i — составной индикатор, в терме участвуют все возможные составные индикаторы от m переменных, D_i — терм, выраженный в C . Если все термы D_i являются стандартной формой, назовём такую нормальную форму стандартной нормальной формой.

Пример: Пусть рассматривается функция от одной переменной x в C_0 . Тогда терм

$$\begin{aligned} & (\mathbf{card}_0(x) \bigcap \mathbf{card}_0(\mathbb{Z} \setminus (x)) \bigcap \mathbb{Z}) \cup \\ & (\mathbf{card}_0(x) \bigcap (\mathbb{Z} \setminus (\mathbf{card}_0(\mathbb{Z} \setminus (x)) \bigcap x)) \cup \\ & ((\mathbb{Z} \setminus (\mathbf{card}_0(x))) \bigcap (\mathbb{Z} \setminus (\mathbf{card}_0(\mathbb{Z} \setminus (x)) \bigcap \mathbb{Z})) \cup \\ & ((\mathbb{Z} \setminus (\mathbf{card}_0(x))) \bigcap \mathbf{card}_0(\mathbb{Z} \setminus (x)) \bigcap \emptyset) \end{aligned}$$

является нормальной формой, а терм

$$\begin{aligned} & (\mathbf{card}_0(x) \bigcap \mathbf{card}_0(\mathbb{Z} \setminus (x)) \bigcap \mathbb{Z}) \cup \\ & (\mathbf{card}_0(x) \bigcap (\mathbb{Z} \setminus (\mathbf{card}_0(\mathbb{Z} \setminus (x)) \bigcap x)) \cup \\ & ((\mathbb{Z} \setminus (\mathbf{card}_0(x))) \bigcap (\mathbb{Z} \setminus (\mathbf{card}_0(\mathbb{Z} \setminus (x)) \bigcap \mathbb{Z})) \end{aligned}$$

— нет, так как содержит не все составные индикаторы.

3. Основные результаты

В данной статье доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Любую функцию из C_n можно выразить термом в стандартной нормальной форме.

Теорема 2. Две стандартные нормальные формы $\bigcup(A_i \cap D_i)$ и $\bigcup(A_i \cap D'_i)$ задают одну и ту же функцию тогда и только тогда, когда для каждого i (где индекс i параметризует всё множество составных индикаторов) верно одно из следующих утверждений:

- 1) A_i не содержит $\mathbf{card}_{>n}$.
- 2) $D_i \equiv D'_i$
- 3) Все термы вида $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$, где присутствуют все x_m , которые содержатся в только одном из термов D_i и D'_i , присутствуют в D_i в атомарном индикаторе $\mathbf{card}_0(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})$.

Теорема 3. Число функций от m переменных x_1, \dots, x_m в C_n равно $2^{(n+1) \cdot 2^m \cdot (n+2)^{2^m-1} - n \cdot 2^m \cdot (n+1)^{2^m-1}}$

Пусть $O_1(x, y_1, \dots, y_m), O_2(x, y_1, \dots, y_m)$ — термы в C_n . Выражение $O_1(x, \bar{y}) = O_2(x, \bar{y})$ назовём уравнением относительно выбранной переменной x с параметрами \bar{y} . Пусть SP — некоторое множество предикатов. Будем говорить, что уравнение $O_1(x, \bar{y}) = O_2(x, \bar{y})$ имеет решение в множестве SP относительно переменной x , если предикат $O_1(x, \bar{y}) = O_2(x, \bar{y})$ выразим некоторой формулой над предикатами из SP . Эту формулу назовём решением уравнения $O_1(x, \bar{y}) = O_2(x, \bar{y})$ в множестве SP относительно переменной x .

Теорема 4. Любое уравнение в C_n относительно переменной x с параметрами x_1, \dots, x_m имеет решение в множестве предикатов вида

$$\mathbf{card}_{n_j}(x \bigcap F_j(x_1 \dots x_m)) = \mathbb{Z}$$

и

$$\mathbf{card}_{n_j}(F_j(x_1 \dots x_m) \setminus x) = \mathbb{Z},$$

где F_j — функция из C . При этом существует алгоритм, позволяющий найти это решение.

4. Число функций от m переменных в C_n

Чтобы определить число функций от m переменных, найдём стандартную форму, в которой выражается каждая функция из C , и нормальную форму, в которой выражается любая функция из C_n . Также найдём

необходимое и достаточное условие, при котором две стандартные формы задают одну и ту же функцию.

Во-первых, заметим, что проскользку

$$a \setminus b = a \bigcap (\mathbb{Z} \setminus b),$$

функции системы C порождаются также системой функций

$\{a \bigcap b, a \bigcup b, \mathbb{Z} \setminus b, \mathbb{Z}\}$. Рассмотрим формулы алгебры логики над набором функций:

$$a \& b, a|b, \neg b, 1$$

Рассмотрим оператор $G(f)$, сопоставляющий по индукции формуле алгебры логики над набором функций $\{a \& b, a|b, \neg b, 1\}$ терм из C_n над системой операций $\{a \bigcap b, a \bigcup b, \mathbb{Z} \setminus b, \mathbb{Z}\}$. Определим его (и обратное отображение) по индукции по длине формулы:

$$G(x_i) = x_i, G^{-1}(x_i) = x_i, \text{ если } x \text{ — переменная.}$$

$$G(1) = \mathbb{Z}, G^{-1}(\mathbb{Z}) = 1.$$

Если a, b — формулы алгебры логики над $\{a \& b, a|b, \neg b, 1\}$, c, d — термы над $\{a \bigcap b, a \bigcup b, \mathbb{Z} \setminus b, \mathbb{Z}\}$, то

$$G(a|b) = G(a) \bigcup G(b), G^{-1}(c \bigcup d) = G^{-1}(c) | G^{-1}(d),$$

$$G(a \& b) = G(a) \bigcap G(b), G^{-1}(c \bigcap d) = G^{-1}(c) \& G^{-1}(d),$$

$$G(\neg a) = \mathbb{Z} \setminus G(a), G^{-1}(\mathbb{Z} \setminus c) = \neg G^{-1}(c).$$

Лемма 1. *Отображение G множества функций алгебры логики на множество функций в системе C , корректно определено и обратное отображение также корректно определено. То есть если две формулы f_1 и f_2 задают одну и ту же функцию алгебры логики, то термы $G(f_1)$ и $G(f_2)$ задают одну и ту же функцию. И наоборот, если два терма g_1 и g_2 в C_n задают одну и ту же функцию, то термы $G_1^{(-1)}(g_1)$ и $G_1^{(-1)}(g_2)$ задают одну и ту же функцию алгебры логики.*

Доказательство леммы.

Рассмотрим произвольную формулу алгебры логики $f_1(x_1 \dots x_n)$ над $\{\&, |, 1, \setminus\}$. Докажем индукцией по длине терма, что $e \in \mathbb{Z}$ принадлежит результату функции, выражаемой термом $G(f_1(x_1 \dots x_n))$ при тех и только тех значениях набора $x_1 \dots x_n$, при которых истинен результат формулы $f_1(y_1 \dots y_n)$, где $y_i = (e \in x_i)$.

База индукции — $(e \in x_i) \iff e \in (x_i)$ — очевидно выполняется.

Шаг индукции. Пусть a, b — два терма над $\{\bigcap, \bigcup, \setminus, \mathbb{Z}\}$. Тогда:

$$e \in (a \bigcup b) \iff (e \in a) | (e \in b);$$

$$e \in (a \bigcap b) \iff (e \in a) \& (e \in b);$$

$$e \in \mathbb{Z} \iff 1;$$

$$e \in (\mathbb{Z} \setminus b) \iff \neg(e \in b) \text{ — эти утверждения также выполнены.}$$

Следовательно, e принадлежит результату функции, выражаемой термом $G(f_1(x_1 \dots x_n))$ при тех и только тех значениях набора $x_1 \dots x_n$,

при которых истинен результат формулы $f_1(y_1 \dots y_n)$, где $y_i = (e \in x_1)$. Перейдём к доказательству самой леммы.

→) Допустим, что две формулы f_1 и f_2 задают одну и ту же функцию. Результат функции, задаваемой термом $G(f_1)$ по доказанному ранее равен множеству тех элементов $e \in \mathbb{Z}$, для которых истинно значение формулы $f_1(y_1 \dots y_n)$, при $y_i = (e \in x_1)$, что полностью определяет эту функцию. Результат функции, задаваемой термом $G(f_2)$ равен множеству тех e из \mathbb{Z} , для которых истинно значение формулы $f_2(y_1 \dots y_n)$ при $y_i = (e \in x_1)$. Поскольку формулы f_1 и f_2 задают одну и ту же функцию, то множества e из \mathbb{Z} , для которых значения $f_2(y_1 \dots y_n)$ и $f_1(y_1 \dots y_n)$ истинны, совпадают. Следовательно, термы $G(f_1)$ и $G(f_2)$ задают одну и ту же функцию.

←) Допустим, что два терма g_1 и g_2 в C_n задают одну и ту же функцию, e — элемент \mathbb{Z} . Для любого набора $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ можно рассмотреть набор $(y_1, \dots, y_n) \in (2^{\mathbb{Z}})^n$:

$$y_i = \begin{cases} \{e\}, & \text{если } x_1 = 1 \\ \emptyset, & \text{если } x_1 = 0. \end{cases}$$

Тогда $G^{-1}(g_1(x_1 \dots x_n)) = e \in g_1(y_1 \dots y_n) = e \in g_2(y_1 \dots y_n) = G^{-2}(g_1(x_1 \dots x_n))$.

Отсюда из равенства функций, задаваемых термами g_1 и g_2 следует равенство значений функций, задаваемых формулами $G^{-1}(g_1)$ и $G^{-1}(g_2)$, на любом наборе $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$. Следовательно, эти функции равны, ч.т.д.

Следствие 1. В системе C 2^{2^m} различных m -местных функций.

В моей статье [1] при доказательстве леммы 4 из теорем было доказано следующее утверждение:

Лемма 2. (О разложении) Для любого терма T от переменных x_1, \dots, x_m в C можно найти такой набор $N(T)$ термов вида $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$, что при любом значении набора переменных x_1, \dots, x_m значения термов из $N(T)$ — непересекающиеся множества и значение их объединения равно значению T .

1) Для любых $a_1, \dots, a_m \in 2^{\mathbb{Z}}$ и двух различных термов $T = x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$ и $T' = x_1^{\sigma'_1} \dots x_m^{\sigma'_m}$ значения этих двух термов — непересекающиеся множества.

Действительно, пусть, без ограничения общности, $\sigma'_i \neq \sigma_i$, $\sigma'_i = 1$, $\sigma_i = 0$. Тогда $T(a_1, \dots, a_m) = a_1^{\sigma_1} \dots a_m^{\sigma_m} \in \mathbb{Z} \setminus a_i$ $T'(a_1, \dots, a_m) = a_1^{\sigma'_1} \dots a_m^{\sigma'_m} \in a_i$. Так как a_i и $\mathbb{Z} \setminus a_i$ не пересекаются, $T'(a_1, \dots, a_m)$ и $T(a_1, \dots, a_m)$ не пересекаются.

2) Пусть T – терм в над S_C . К нему можно последовательно применить следующие преобразования:

– заменить все подтермы вида $a \setminus b$, где a, b – термы, $a \neq \mathbb{Z}$ на подтермы $a \cap (Z \setminus b)$.

– заменить все подтермы вида $Z \setminus (a \cup b)$ на $(Z \setminus a) \cap (Z \setminus b)$ и все подтермы вида $Z \setminus (a \cap b)$ на $(Z \setminus a) \cup (Z \setminus b)$. Повторять процедуру, пока не останется операций $Z \setminus$, внешних по отношению к \cap, \cup .

– заменить все подтермы вида $Z \cap (a \cup b)$ на $(Z \cup a) \cap (Z \cup b)$. Повторять процедуру, пока не останется операций \cap , внешних по отношению к \cup . Получим терм вида $B_1 \cup B_n$ (или B_1), где B_i имеет вид пересечения термов $x_i^{\sigma_{ij}}$ и $Z \setminus Z$.

– Если пересечение B_i содержит $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$, то он равносильен \emptyset и его можно убрать из пересечения. Если при этом B_i единственный, то исходный терм тождественно равен пустому объединению.

– Если пересечение B_i не содержит $x_i^{\sigma_i}$, заменить его на $(B_i \cap x_i) \cup (B_i \cap (Z \setminus x_i))$.

В результате получим терм-объединение термов вида $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$. Значение его на любом наборе значений переменных равно объединению их значений. Лемма доказана.

Лемма доказана.

Теперь найдём такую форму, что для каждой функции в C_n , найдётся терм в этой форме.

Обозначение x^σ будет использоваться для терма:

x , если $\sigma = 1$;

$(Z \setminus x)$, если $\sigma = 0$.

Обозначение $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$ будет использоваться для терма

$$x_1^{\sigma_1} \cap x_2^{\sigma_2} \dots \cap x_m^{\sigma_m}.$$

Лемма 3. Для каждой функции из C_n от переменных $x_1 \dots x_m$, найдётся выражающий её терм над S_n , в котором операция **card** применяется только к термам вида $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$.

Доказательство.

Допустим, некоторая функция выражается термом g в C_n . Покажем, что её можно выразить термом, в котором нет вложенных **card**.

Действительно, если в терм g входит терм **card** $_l(g')$, то терм g задаёт ту же функцию, что и терм

$$(\mathbf{card}_l(g') \cap g|_{\mathbf{card}_l(g')=\mathbb{Z}}) \cup (g|_{\mathbf{card}_l(g')=\emptyset} \setminus \mathbf{card}_l(g')),$$

где через

$$g|_{\mathbf{card}_l(g')=\mathbb{Z}}$$

обозначен терм, получающийся из g путём замены $\mathbf{card}_l(g')$ на \mathbb{Z} ; константа \emptyset выражается как $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$. Назовём замену этого типа заменой вынесения $\mathbf{card}_l(g')$. Эта замена не меняет выражаемую термом функцию, поскольку для тех значений переменных, для которых значение терма g равно \mathbb{Z} , значение обоих термов равно значению терма $g|_{\mathbf{card}_l(g')=\mathbb{Z}}$, а для тех значений переменных, для которых значение терма g равно \emptyset , значение обоих термов равно значению терма $g|_{\mathbf{card}_l(g')=\emptyset}$.

Пусть максимальная вложенность операций \mathbf{card} в терме T равна k , $k > 1$. Тогда если последовательно применить к терму T замену вынесения $\mathbf{card}_l(g')$ для каждого подтерма вида $\mathbf{card}_l(g')$, где g не содержит операций \mathbf{card} , получим терм с максимальной вложенностью операций \mathbf{card} , равной $k - 1$. Повторяя эту процедуру, получим терм (обозначим его g''), в котором операция \mathbf{card} будет применяться только к термам над S_C .

Например,

$$\mathbf{card}_0(x_1 \cup (\mathbf{card}_1(x_2))) = (\mathbf{card}_1(x_2) \cap \mathbf{card}_0(x_1 \cup \mathbb{Z})) \cup (\mathbf{card}_0(x_1 \cup \emptyset) \setminus \mathbf{card}_1(x_2)).$$

Пусть терм g'' содержит подтерм $\mathbf{card}_l(g''')$. По лемме о разложении, существует множество $N(g''')$ термов вида $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$, значения которых при любом значении переменных — непересекающиеся множества и в объединении дают значение g'' . Пусть $N(g''')$ содержит k термов g_j . Пусть (l_{i1}, \dots, l_{ik}) — все возможные наборы целых неотрицательных чисел, сумма которых равна l .

Тогда терм $\mathbf{card}_l(g''')$ равносильен терму

$$\bigcap_i (\mathbf{card}_{l_{i1}}(g_1) \cup \dots \cup \mathbf{card}_{l_{ik}}(g_k)).$$

Таким образом терм $\mathbf{card}_l(g''')$ равносильен терму, выразимому через термы $\mathbf{card}_{n_i}(g_i)$, где все g_i имеют вид $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$ и принадлежат $N(g''')$, а все n_i не больше l .

Например,

$$\mathbf{card}_2(x_2) = (\mathbf{card}_0(x_2 \cap x_1) \cap \mathbf{card}_2(x_2 \setminus x_1)) \cup (\mathbf{card}_1(x_2 \cap x_1) \cap \mathbf{card}_1(x_2 \setminus x_1)) \cup (\mathbf{card}_2(x_2 \cap x_1) \cap \mathbf{card}_0(x_2 \setminus x_1)).$$

Таким образом каждую функцию в C_n можно выразить термом над S_n , в котором операция \mathbf{card} применяется только к термам вида $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$. Лемма доказана.

Чтобы найти точное число функций в C_n от m переменных, найдём стандартную форму для таких термов.

Назовём терм $\mathbf{card}_k(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})$ или $\mathbb{Z} \setminus (\mathbf{card}_0(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}) \cup \dots \cup \mathbf{card}_n(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}))$ атомарным индикатором, если $x_1 \dots x_m$ — все переменные. Для простоты будем обозначать $\mathbb{Z} \setminus (\mathbf{card}_0(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}) \cup \dots \cup \mathbf{card}_n(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}))$ как $\mathbf{card}_{>n}(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})$. Поскольку существует 2^m возможных значений для $\sigma_1 \dots \sigma_m$ и $n + 2$ различных операций $\mathbf{card}_0, \dots, \mathbf{card}_n, \mathbf{card}_{>n}$, всего существует $(n + 2) \cdot (2^m)$ атомарных индикаторов от m данных переменных в C_n .

Составным индикатором назовём терм $\bigcap_{\sigma \in \{0,1\}^m} \mathbf{card}_{k_\sigma}(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})$, в котором функцией \bigcap соединены атомарные индикаторы для всех значений параметров $\sigma \in \{0,1\}^m; \{0,1\}^m$ — булев куб; \mathbf{card}_{k_σ} может означать $\mathbf{card}_0, \dots, \mathbf{card}_n$ или $\mathbf{card}_{>n}$. При этом будем считать равными составные индикаторы, которые различаются лишь порядком множителей во внешней операции пересечения. Всего существует $(n + 2)^{(2^m)}$ различных составных индикаторов, поскольку каждый индикатор определяется 2^m параметрами k_σ , каждый из которых может принимать одно из $n + 2$ значений — либо число от 0 до n , либо " $> n$ ".

Также заметим, что атомарные и составные индикаторы могут принимать только значения \mathbb{Z} или \emptyset .

Пусть составные индикаторы параметризуются индексом i . Нормальной формой функции из C_n называется терм вида $\bigcup_i (A_i \cap D_i)$, где A_i — составной индикатор, соответствующий параметру i , D_i — формула, выраженная в C , в терме используются все возможные составные индикаторы. Если все D_i выражены в стандартной форме, назовём такую нормальную форму стандартной нормальной формой.

Лемма 4. Любую функцию из C_n можно выразить термом в нормальной форме.

Доказательство. Для каждого набора значений переменных $x'_1 \dots x'_m$ каждый из термов $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$ имеет одно значение — множество, имеющее определённое конечное или счётное число элементов $|x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}|$. Каждому набору значений переменных $x'_1 \dots x'_m$ таким образом можно сопоставить ровно один составной индикатор $\bigcap_{\sigma \in \{0,1\}^m} \mathbf{card}_{|x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}|}(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})$, значение которого на этом наборе равно \mathbb{Z} (здесь $\mathbf{card}_{|x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}|}$ считается принимающим значение или до n или значение $> n$). Значение остальных составных индикаторов на этом наборе равно \emptyset . Следовательно, два различных составных индикатора не могут принимать значение, не равное \emptyset , на одном наборе значений переменных.

Пример. Набору значений переменных $x'_1 = \{1\}, x'_2 = \{1, 2\}$ в C_1 соответствует составной индикатор

$$\mathbf{card}_0(x_1 \cap (\mathbb{Z} \setminus x_2)) \cap \mathbf{card}_1(x_1 \cap x_2) \cap \mathbf{card}_{>1}((\mathbb{Z} \setminus x_1) \cap (\mathbb{Z} \setminus x_2))$$

Составной индикатор — пересечение атомарных индикаторов, которые (поскольку для них **card** — внешняя функция) могут принимать только значения \mathbb{Z} или \emptyset . Если атомарный индикатор $\mathbf{card}_l(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})$ входит в составной индикатор I , то на наборе значений переменных (x'_1, \dots, x'_m) , на котором составной индикатор принимает значение \mathbb{Z} , атомарный индикатор принимает значение \mathbb{Z} .

Если же этот атомарный индикатор не входит в I , то в него входит другой индикатор $\mathbf{card}_l(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})$, $l_i \neq l$. Поскольку $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$ не может иметь различное число элементов при одном и том же значении $x_1 \dots x_m$, то на наборе значений переменных, на котором составной индикатор принимает значение \mathbb{Z} , атомарный индикатор значение \emptyset .

Следовательно, для каждого составного индикатора и каждого атомарного индикатора на всех наборах значений переменных, на которых составной индикатор принимает значение \mathbb{Z} , атомарный индикатор принимает одно и то же значение. Это значение — \mathbb{Z} , если атомарный индикатор входит в составной, и \emptyset иначе.

Рассмотрим функцию $O(x_1, \dots, x_m)$. По предыдущей лемме без ограничения общности можно считать, что она выражена термом $O'(x_1, \dots, x_m)$, в котором под **card** находятся только термы $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$. То есть все вхождения **card** в этот терм — атомарные индикаторы. Для каждого составного индикатора A_i обозначим за D_i терм, который получается из $O'(x_1, \dots, x_m)$ путём замены содержащихся в A_i атомарных индикаторов на \mathbb{Z} , а не содержащихся — на \emptyset . В этом случае каждое D_i выражено только через функции из S_C , и $\bigcup(A_i \cap D_i)$ — нормальная форма. Покажем, что $\bigcup(A_i \cap D_i)$ — нормальная форма для O , то есть выражает O .

Действительно, рассмотрим набор значений N переменных x_1, \dots, x_m . Пусть A_k — тот единственный составной индикатор, который на данном наборе принимает значение \mathbb{Z} . Тогда значение $(A_i \cap D_i)(N)$ равно \emptyset при i не равно k , а значение $\bigcup(A_k \cap D_k)$ равно $D_k(N)$. Из определения D_k , $D_k(N) = O(N)$. Следовательно, на любом наборе N $O(N) = \bigcup(A_i \cap D_i)(N)$. То есть нормальная форма $\bigcup(A_i \cap D_i)$ задаёт функцию O , ч.т.д.

Будем называть две нормальные формы $\bigcup(A_i \cap D_i)$ и $\bigcup(A_i \cap D'_i)$ равными, если термы D_i и D'_i выражают одну и ту же функцию для каждого

i. В противном случае будем называть их различными. Стандартной нормальной формой назовём такую форму, где каждое D_i выражено в виде, аналогичном ДНФ, то есть в виде $\bigcup(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_1^{\sigma_n})$. Несложно убедиться, что для любой нормальной формы существует равная ей стандартная нормальная форма.

Заметим, что две различные нормальные формы могут задавать одну и ту же функцию. Например, в C_0

$$\bigcup_i (A_i \bigcup \emptyset),$$

$$(\mathbf{card}_0(x) \bigcap \mathbf{card}_{>0}(\mathbb{Z} \setminus x) \bigcap x) \bigcup (\bigcup_j (A_j \bigcup \emptyset))$$

и

$$(\mathbf{card}_0(x) \bigcap \mathbf{card}_0(\mathbb{Z} \setminus x) \bigcap \mathbb{Z}) \bigcup (\bigcup_k (A_k \bigcup \emptyset))$$

задают одну и ту же функцию. Но можно показать, что подобные пары форм — единственные различные формы, выражающие одну и ту же функцию.

Лемма 5. $\bigcup_{(\sigma_1 \dots \sigma_m) \in \{0,1\}^m} (x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}) = \mathbb{Z}$ для любого значения переменных $x_1 \dots x_m$

Докажем индукцией по числу m переменных. Если $m = 1$, $(\mathbb{Z} \setminus x_1) \bigcup x_1 = \mathbb{Z}$ — утверждение леммы верно.

Если утверждение леммы верно для m , то для $m' = m + 1$

$$\begin{aligned} & \bigcup_{(\sigma_1 \dots \sigma_{m'}) \in \{0,1\}^{m'}} (x_1^{\sigma_1} \dots x_{m'}^{\sigma_{m'}}) = \mathbb{Z} = \\ & ((\bigcup_{(\sigma_1 \dots \sigma_m) \in \{0,1\}^m} (x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})) \bigcap (x_{m'})) \bigcup \\ & ((\bigcup_{(\sigma_1 \dots \sigma_m) \in \{0,1\}^m} (x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})) \bigcap (\mathbb{Z} \setminus x_{m'})) = \\ & ((\bigcup_{(\sigma_1 \dots \sigma_m) \in \{0,1\}^m} (x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})) \bigcap (x_{m'} \bigcup (\mathbb{Z} \setminus x_{m'}))) = \\ & = ((\bigcup_{(\sigma_1 \dots \sigma_m) \in \{0,1\}^m} (x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})) = \mathbb{Z}. \text{ Лемма доказана.} \end{aligned}$$

Лемма 6. Если составной индикатор A_i не содержит $\mathbf{card}_{>n}$, то $A_i \equiv \emptyset$

Доказательство. Поскольку по предыдущей лемме объединение конечного числа множеств $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$ равно бесконечному множеству \mathbb{Z} . Следовательно, хотя бы одно из них — пусть это будет $x_1^{\sigma'_1} \dots x_m^{\sigma'_m}$ бесконечно. Тогда соответствующий атомарный индикатор $\mathbf{card}_i(x_1^{\sigma'_1} \dots x_m^{\sigma'_m})$ принимает значение \emptyset , и весь составной индикатор A_i принимает значение \emptyset .

Лемма 7. Две стандартные нормальные формы $\bigcup(A_i \cap D_i)$ и

$\bigcup(A_i \cap D'_i)$ задают одну и ту же функцию тогда и только тогда, когда для каждого i (где индекс i параметризует всё множество составных индикаторов) верно одно из следующих утверждений:

1) A_i не содержит $\mathbf{card}_{>n}$.

2) $D_i \equiv D'_i$

3) Все термы вида $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$, где присутствуют все x_m , которые содержатся в только одном из термов D_i и D'_i , присутствуют в D_i в атомарном индикаторе $\mathbf{card}_0(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})$.

Доказательство. \leftarrow Пусть две формы $\bigcup(A_i \cap D_i)$ и $\bigcup(A_i \cap D'_i)$ таковы, что для каждого i одно из утверждений (1) – (3) верно. Рассмотрим набор значений переменных N и соответствующий ему составной индикатор A_i , который принимает на нём значение \mathbb{Z} .

Для этого набора согласно предыдущей лемме не может выполняться 1).

Если для него выполняется 2), то, поскольку $D_i \equiv D'_i$, верно равенство $A_i(N) \cap D_i(N) = A_i(N) \cap D'_i(N)$.

Если для него выполняется 3), то $(A_i \cap D_i)(N) \equiv (A_i \cap D'_i)(N)$, поскольку обе части являются объединением одних и тех же непустых множеств и некоторого количества пустых.

Следовательно, $\bigcup(A_i \cap D_i)$ и $\bigcup(A_i \cap D'_i)$ принимают одно и то же значение на любом значении переменных N , и выражаемые этими термами функции совпадают.

\rightarrow От противного. Пусть две стандартные нормальные формы $\bigcup(A_i \cap D_i)$ и $\bigcup(A_i \cap D'_i)$ задают одну и ту же функцию. Пусть существует i , для которого A_i содержит $\mathbf{card}_{>n}$, и, без ограничения общности, в терме D_i содержится терм $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$, который не содержится в D'_i и присутствует в A_i в атомарном индикаторе $\mathbf{card}_k(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})$, где k не равно 0.

Пусть $x_1 \dots x_m$ — набор значений переменных, соответствующий A_i (то есть тот, на котором $A_i = \mathbb{Z}$). Такой набор существует, поскольку можно найти 2^m непересекающихся множеств с заданным числом элементов у каждого (хотя бы одно из которых бесконечно), объединение которых равно \mathbf{Z} . $(A_i \cap D_i)(N)$ содержит элемент из множества $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$, $(A_i \cap D'_i)(N)$ не содержит элемент из $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$. При этом никакие другие A_i не содержат элемент из $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$. Следовательно, $\bigcup(A_i \cap D_i)$ и $\bigcup(A_i \cap D'_i)$ задают разные функции. Лемма доказана.

С учётом этой леммы найдём число функций в C_n от m переменных.

Теорема 1. Число функций от m переменных x_1, \dots, x_m в C_n равно $2^{(n+1) \cdot 2^m \cdot (n+2)^{2^m-1} - n \cdot 2^m \cdot (n+1)^{2^m-1}}$

Доказательство.

Как было указано ранее, всего существует $(n + 2)^{(2^m)}$ различных составных индикаторов.

Зафиксируем A_i и найдём количество функций типа $(A_i \cap D)$. Обозначим его $F(i)$. Если A_i не содержит $\mathbf{card}_{>n}$, то значение A_i всегда равно \emptyset , $(A_i \cap D) — константа \emptyset , $F(i) = 1$. Если A_i содержит $\mathbf{card}_{>n}$, и $j — число \mathbf{card}_0 в A_i , то $F(i) = 2^{k-j}$ (поскольку наличие или отсутствие в D подтерма $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$, для которого A_i имеет подтерм $\mathbf{card}_0(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})$, не влияет на значение функции), и $k - j = \log_2(F(i))$.$$

Количество же всех m -местных функций $N(n, m)$ равно $\prod_i F(i) = 2^{\sum_i \log_2(F(i))}$. (*)

Обозначим $l = n + 2 — число различных индексов для \mathbf{card} , включая $> n$.$

Поскольку в составном индикаторе A_i при фиксированных j и k есть:

— C_k^j различных вариантов, где расположены j различных нулевых \mathbf{card} ,

— $(l - 1)^{k-j}$ варианта для значения ненулевых параметров \mathbf{card} ,

— $(l - 2)^{k-j}$ варианта для значения ненулевых параметров \mathbf{card} , в

которых нет $\mathbf{card}_{>n}$,

— $(l - 1)^{k-j} - (l - 2)^{k-j}$ варианта для значения ненулевых параметров

\mathbf{card} , среди которых есть хотя бы одно $\mathbf{card}_{>n}$,

получим:

$$N(n, m) = 2^{\sum_i \log_2(F(i))} = 2^{\sum_{j=0}^k C_k^j \cdot ((l-1)^{k-j} - (l-2)^{k-j}) \cdot (k-j)} = \\ 2^{\sum_{j=0}^k C_k^{k-j} \cdot ((l-1)^{k-j} - (l-2)^{k-j}) \cdot (k-j)} = 2^{\sum_{j'=0}^k C_k^{j'} \cdot ((l-1)^{j'} - (l-2)^{j'}) \cdot (j')} \quad (*)$$

Чтобы найти эту сумму, найдём значение суммы $\sum_{i=0}^n (C_n^i \cdot x^i \cdot i)$ для произвольного натурального i и вещественного x . Для этого воспользуемся фактом из математического анализа, что производная суммы дифференцируемых функций равна сумме их производных:

$$\sum_{i=0}^n (C_n^i \cdot x^i \cdot i) = x \cdot \sum_{i=0}^n (C_n^i \cdot x^{i-1} \cdot i) = x \cdot \sum_{i=0}^n (C_n^i \cdot (x^i)'_x) = x \cdot (\sum_{i=0}^n C_n^i \cdot (x^i)'_x) = x \cdot ((x+1)^n)'_x = x \cdot n \cdot (x+1)^{n-1} \quad (**)$$

Таким образом, значение выражения (*) равно

$$2^{(l-1)*k*l^{k-1} - (l-2)*k*(l-1)^{k-1}} = 2^{(n+1) \cdot 2^m \cdot (n+2)^{2^m-1} - n \cdot 2^m \cdot (n+1)^{2^m-1}}$$

Теорема доказана.

5. Уравнения в C_n

Пусть $O_1(x, y_1, \dots, y_m), O_2(x, y_1, \dots, y_m) — термы в C_n . Выражение $O_1(x, \bar{y}) = O_2(x, \bar{y})$ назовём уравнением относительно выбранной переменной x с параметрами \bar{y} . Пусть $SP — некоторое множество предикатов. Будем говорить, что уравнение $O_1(x, \bar{y}) = O_2(x, \bar{y})$ имеет решение в множестве SP относительно переменной x , если предикат $O_1(x, \bar{y}) = O_2(x, \bar{y})$$$

выразим некоторой формулой над предикатами из SP . Эту формулу назовём решением уравнения $O_1(x, \bar{y}) = O_2(x, \bar{y})$ в множестве SP относительно переменной x .

Теорема 2. Любое уравнение в C_n относительно переменной x с параметрами x_1, \dots, x_m имеет решение в множестве предикатов вида

$$\mathbf{card}_{n_j}(x \bigcap F_j(x_1 \dots x_m)) = \mathbb{Z}$$

и

$$\mathbf{card}_{n_j}(F_j(x_1 \dots x_m) \setminus x) = \mathbb{Z},$$

где F_j — функция из C . При этом существует алгоритм, позволяющий найти это решение.

Доказательство. Сначала докажем лемму

Лемма 8. Существует алгоритм, с помощью которого любой терм $T(x, x_1, \dots, x_n)$ можно привести к стандартной форме (то есть найти терм в стандартной форме, выражающий ту же функцию).

Один из возможных алгоритмов выглядит следующим образом:

1) Рассмотреть все составные индикаторы A_i от переменных x, x_1, \dots, x_n . Записать терм $\bigcup_i (A_i \bigcap T)$.

2) Преобразовать каждый терм $A_i \bigcap T_i$ следующим образом (терм T_i может меняться между шагами алгоритма):

— Пока в рассматриваемый терм T_i входит \mathbf{card} :

— Найти в нём вхождение вида $\mathbf{card}_k(T')$, где в T' не входит никакой другой \mathbf{card} (то есть T' выражается над $\{\mathbb{Z}, \bigcap, \bigcup\}$)

— Найти, объединением каких пересечений вида $x_1^{\sigma_1} \bigcap \dots \bigcap x_m^{\sigma_m}$ является T' (из изоморфизма C и P_2 это делается аналогично приведению формулы из P_2 к СКНФ), просуммировать по j индексы k_{ij} из входящих в A_i термов $\mathbf{card}_{k_{ij}}(a_i)$.

— Если результат равен индексу k (или $> n$, если k — индекс " $> n$ "), заменить в рассматриваемом терме $\mathbf{card}_k(T')$ на \mathbb{Z} . Иначе заменить его на \emptyset .

В результате получим равносильный T терм $\bigcup_i (A_i \bigcap T'_i)$ в нормальной форме.

3) Аналогично алгоритму приведения функции алгебры логики к СКНФ, привести T_i к виду, аналогичному СКНФ.

В результате получится терм, равносильный T и имеющий стандартную нормальную форму, ч.т.д. Лемма доказана.

Как следует из леммы, без ограничения общности можно считать, что в выражении $O_1(x, x_1, \dots, x_m) = O_2(x, x_1, \dots, x_m)$ оба терма O_1 и O_2

записаны в стандартной форме. То есть достаточно решать уравнения вида $\bigcup(A_i \cap D_i) = \bigcup(A_i \cap D'_i)$.

Как было показано ранее, чтобы набор x_1, \dots, x_n , на котором выполнено $A_j(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{Z}$, удовлетворял равенству $\bigcup(A_i \cap D_i) = \bigcup(A_i \cap D'_i)$, необходимо и достаточно, чтобы любой атомарный терм $x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n}$, который входит в D_i , но не в D'_i , или наоборот, входил в A_i в виде $\mathbf{card}_0(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n})$. Рассмотрим B — множество всех A_i , для которых любой атомарный терм $x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n}$, который входит в D_i , но не в D'_i , или наоборот, входит в A_i в виде $\mathbf{card}_0(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n})$.

Если на наборе (x'_1, \dots, x'_n) принимает значение \mathbb{Z} такой A_i , то $\bigcup(A_j \cap D_j)(x'_1, \dots, x'_n) = \emptyset \cup \emptyset \dots \cup \emptyset \cup (A_i \cap D_i)(x'_1, \dots, x'_n) = D_i(x'_1, \dots, x'_n) = D'_i(x'_1, \dots, x'_n) = \bigcup(A'_j \cap D'_j)(x'_1, \dots, x'_n)$.

Если же на наборе (x'_1, \dots, x'_n) принимает значение \mathbb{Z} A_i , не удовлетворяющий этому свойству, то $\bigcup(A_j \cap D_j)(x'_1, \dots, x'_n) = \emptyset \cup \emptyset \dots \cup \emptyset \cup (A_i \cap D_i)(x'_1, \dots, x'_n) = D_i(x'_1, \dots, x'_n) \neq D'_i(x'_1, \dots, x'_n) = \bigcup(A'_j \cap D'_j)(x'_1, \dots, x'_n)$.

Следовательно, равенство истинно на наборе (x'_1, \dots, x'_n) если и только если $(x'_1, \dots, x'_n) \in A_i$ и $A_i \in B$. Решение равносильно формуле $\bigvee_{A_i \in B}(A_i = \mathbb{Z})$.

Заменив $\bigvee(\bigcap(I_{ij}) = \mathbb{Z})$ на $\bigvee(\&(I_{ij} = \mathbb{Z}))$, где I_{ij} — атомарные индикаторы, получим решение уравнения.

6. Заключение

В следующих статьях будут описаны свойства функциональной системы S_n , представлена шэфферова функции в ней. Будет представлена серия предполных классов, позволяющая получить критерий относительной полноты.

Автор выражает благодарность профессору А.С. Подколзину за постановку задачи и помощь в работе.

Список литературы

- [1] Капустин Ю. С., “Об элементарной выразимости в логике предикатов”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23:2** (2019), 135–158.
- [2] Яблонский С.В., *Введение в дискретную математику*, «Высшая школа», М, 2003, 384 с.
- [3] Яблонский С.В, Грврилов Г.П., Кудрявцев В. Б., *Функции алгебры логики и классы Поста*, «Наука», М, 1966, 120 с.

**On algebraic system created from set algebra by adding the set
power indicator
Kapustin I.S.**

This paper concerns the properties of the functional system C_n . This system has the domain $2^{\mathbb{Z}}$, and is generated by functions $2^{\mathbb{Z}} \setminus x, x \cup y, x \cap x$ and power indicators $\mathbf{card}_0(x) \dots \mathbf{card}_n(x)$.

Keywords: functional system, precomplete class, set algebra, completion criteria.

References

- [1] Kapustin I. S., “On the elementary expressibility in predicate logic”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **23**:2 (2019), 135–158
- [2] Yablonsky S.V., *Introduction to discrete mathematics*, «Vysshaya shkola», M, 2003, 384 c.
- [3] Yablonsky S.V., Gavrilov G.P., Kudryavtsev V. B., *Functions of the Algebra of Logic and the Post Classes*, «Nauka», M, 1966, 120 c.