

Представление СФЭ

М. В. Носов¹

В работе получено представление всех схем из функциональных элементов с одинаковым числом элементов в базе из штриха Шеффера для булевой функции в виде натурального числа. Расшифровка этого числа позволяет построить все схемы.

Ключевые слова: булевская функция, схема из функциональных элементов.

В данной работе используются описания СФЭ и задаваемой булевой функции, которые даны в статье автора "Об аналитическом представлении функции сложности минимальной схемы в базе из штриха Шеффера" (Интеллектуальные системы. Теория и приложения.21:2 (2017), 193-196).

Рассмотрим СФЭ в базе из Штриха Шеффера, схема должна задавать булевскую функцию $f(y_1, \dots, y_n)$. Элементов в схеме L , они пронумерованы числами $n + 1, \dots, n + L$; k -ый элемент схемы имеет входами и (или) входы схемы, и (или) выходы элементов с меньшими номерами, таким образом, появляются двойки $(i_k, j_k), 1 \leq i_k \leq k - 1, 1 \leq j_k \leq k - 1$. Пусть Y - матрица $2^n \times (n + L)$, у которой первые n столбцов есть вектора E_2^n , а остальные элементы – свободные переменные, принимающие значения 0 или 1. Определим функцию

$$\Xi((i_{n+1}, j_{n+1}), \dots, (i_{n+L}, j_{n+L}), f) = \sum_Y g((i_{n+1}, j_{n+1}), \dots, (i_{n+L}, j_{n+L}), f, Y),$$

где

$$g((i_{n+1}, j_{n+1}), \dots, (i_{n+L}, j_{n+L}), f, Y) = \prod_{m=1}^{2^n} \prod_{k=n+1}^{n+L} (1 - (y_{mk} - (1 - y_{mi_k} y_{mj_k}))^2) \cdot \prod_{m=1}^{2^n} (1 - (y_{mn+L} - f(y_{m1}, \dots, y_{mn}))^2)$$

Функция $g(\cdot)$ равна 1, если выходы каждого элемента совпадают с соответствующими значениями элементов матрицы Y и последний столбец матрицы есть столбец функции f , в противном случае, равна 0. Так как по заданной схеме выходы определяются однозначно, то функция Ξ равна 1, если схема реализует f и 0, в противном случае, т.е. только на одной матрице Y функция g может равняться 1. Определим число

¹Носов Михаил Васильевич — с.н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mvnosov@rambler.ru.

Nosov Michail Vasilevich-senior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

$$N(f, L) = \sum_{(i_{n+1}, j_{n+1}), \dots, (i_{n+L}, j_{n+L})} 2^{m((i_{n+1}, j_{n+1}), \dots, (i_{n+L}, j_{n+L}))} \cdot \Xi(\cdot),$$

где

$$m((i_{n+1}, j_{n+1}), \dots, (i_{n+L}, j_{n+L})) = \sum_{k=1}^L (i_{n+k}(n+L)^{2(k-1)} + j_{n+k}(n+L)^{2(k-1)+1})$$

Число $N(f, L)$ – искомое. Зная это число, надо разложить его по степеням 2, каждую степень разложить по основанию $(n+L)$, коэффициенты разложения будут задавать соответствующую схему.

Произведём преобразования

$$\prod_{m=1}^{2^n} \prod_{k=n+1}^{n+L} (1 - (y_{mk} - (1 - y_{mi_k} y_{mj_k}))^2) =$$

$$\prod_{m=1}^{2^n} \prod_{k=n+1}^{n+L} (y_{mk} + y_{mi_k} y_{mj_k} - 2y_{mk} y_{mi_k} y_{mj_k}) =$$

$$\prod_{m=1}^{2^n} \prod_{k=n+1}^{n+L} (y_{mk} + (1 - 2y_{mk}) y_{mi_k} y_{mj_k}) =$$

$$\prod_{k=n+1}^{n+L} \left(\sum_{S, S \subseteq \{1, \dots, 2^n\}} \prod_{s \in S} y_{sk} \cdot \prod_{t \notin S} (1 - 2y_{tk}) y_{ti_k} y_{tj_k} \right) =$$

$$\prod_{k=n+1}^{n+L} \left(\sum_{S, S \subseteq \{1, \dots, 2^n\}} \prod_{s \in S} y_{sk} \cdot \prod_{t \notin S} (-1)^{y_{tk}} y_{ti_k} y_{tj_k} \right) =$$

$$\prod_{k=n+1}^{n+L} \left(\sum_{S, S \subseteq \{1, \dots, 2^n\}} \prod_{s \in S} y_{sk} \cdot (-1)^{\sum_{t \notin S} y_{tk}} \cdot \prod_{t \notin S} y_{ti_k} y_{tj_k} \right) =$$

$$\prod_{k=n+1}^{n+L} \left(\sum_{S, S \subseteq \{1, \dots, 2^n\}} \prod_{s \in S} y_{sk} \cdot (-1)^{\sum_{m=1}^{2^n} y_{mk} + |S|} \cdot \prod_{t \notin S} y_{ti_k} y_{tj_k} \right) =$$

$$\prod_{k=n+1}^{n+L} \left(\sum_{S, S \subseteq \{1, \dots, 2^n\}} (-1)^{\|Y_k\|} \cdot (-1)^{|S|} \cdot \prod_{s \in S} y_{sk} \cdot \prod_{t \notin S} y_{ti_k} y_{tj_k} \right) =$$

$$(-1)^{\|Y\|} \prod_{k=n+1}^{n+L} \left(\sum_{S, S \subseteq \{1, \dots, 2^n\}} \cdot (-1)^{|S|} \cdot \prod_{s \in S} y_{sk} \cdot \prod_{t \notin S} y_{ti_k} y_{tj_k} \right),$$

где $\|Y_k\|$ – число единиц в k -ом столбце матрицы Y , $\|Y\|$ – число единиц в матрице Y (число единиц в первых n столбцах чётное).

Для удобства введём обозначения

$$u_{i_{n+k}} = 2^{i_{n+k}(n+L)^{2(k-1)}}, \quad v_{j_{n+k}} = 2^{j_{n+k}(n+L)^{2(k-1)+1}}$$

Тогда

$$\begin{aligned} N(f, L) &= \sum_Y \sum_{(i_{n+1}, j_{n+1}), \dots, (i_{n+L}, j_{n+L})} (-1)^{\|Y\|} u_{i_{n+1}} v_{j_{n+1}}, \dots, u_{i_{n+L}} v_{j_{n+L}} \cdot \\ &\sum_{S_{n+1}, \dots, S_{n+L} \subseteq \{1, \dots, 2^n\}} ((-1)^{|S_{n+1}|} \cdot \prod_{s \in S_{n+1}} y_{sk} \cdot \prod_{t \notin S_{n+1}} y_{ti_k} y_{tj_k}) \cdot \dots \cdot ((-1)^{|S_{n+L}|} \cdot \\ &\prod_{s \in S_{n+L}} y_{sk} \cdot \prod_{t \notin S_{n+L}} y_{ti_k} y_{tj_k}) \cdot \prod_{m=1}^{2^n} (1 - (y_{mn+L} - f(y_{m1}, \dots, y_{mn}))^2) = \\ &\sum_Y (-1)^{\|Y\|} \prod_{k=n+1}^{n+L} \left(\sum_{S_k} \sum_{i_k, j_k} (-1)^{|S_k|} \cdot u_{i_k} v_{j_k} \prod_{s \in S_k} y_{sk} \cdot \prod_{t \notin S_k} y_{ti_k} y_{tj_k} \right) \cdot \\ &\prod_{m=1}^{2^n} (1 - (y_{mn+L} - f(y_{m1}, \dots, y_{mn}))^2) = \\ &\sum_Y (-1)^{\|Y\|} \prod_{k=n+1}^{n+L} \left(\sum_{S_k} (-1)^{|S_k|} \cdot \prod_{s \in S_k} y_{sk} \cdot \left(\sum_{l_k=1}^{k-1} u_{l_k} \prod_{t \notin S_k} y_{tl_k} \right) \left(\sum_{l_k=1}^{k-1} v_{l_k} \prod_{t \notin S_k} y_{tl_k} \right) \right) \cdot \\ &\prod_{m=1}^{2^n} (1 - (y_{mn+L} - f(y_{m1}, \dots, y_{mn}))^2) \end{aligned}$$

Преобразуем последнее произведение

$$\begin{aligned} &\prod_{m=1}^{2^n} (1 - (y_{mn+L} - f(y_{m1}, \dots, y_{mn}))^2) = \\ &\prod_{m=1}^{2^n} ((1 - y_{mn+L}) + (2y_{mn+L} - 1)f(y_{m1}, \dots, y_{mn})) = \\ &\sum_{U, U \subseteq \{1, \dots, 2^n\}} \prod_{m, m \notin U} (1 - y_{mn+L}) \cdot \prod_{m \in U} (2y_{mn+L} - 1) \cdot \prod_{m \in U} f(y_{m1}, \dots, y_{mn}) = \\ &\sum_{U, U \subseteq \{1, \dots, 2^n\}} ((-1)^{|U|} \prod_{m, m \notin U} (1 - y_{mn+L}) \cdot (-1)^{\sum_{m \in U} y_{mn+L}}) \cdot \prod_{m \in U} f(y_{m1}, \dots, y_{mn}) \end{aligned}$$

Окончательно

$$N(f, L) = \sum_{U, U \subseteq \{1, \dots, 2^n\}} (\sum_Y (-1)^{\|Y\|})$$

$$\prod_{k=n+1}^{n+L} \left(\sum_{S_k, S_k \subseteq \{1, \dots, 2^n\}} (-1)^{|S_k|} \cdot \prod_{s \in S_k} y_{sk} \cdot \left(\sum_{l_k=1}^{k-1} u_{l_k} \prod_{t \notin S_k} y_{tl_k} \right) \left(\sum_{l_k=1}^{k-1} v_{l_k} \prod_{t \notin S_k} y_{tl_k} \right) \right) \cdot$$

$$(-1)^{|U|} \prod_{m, m \notin U} (1 - y_{mn+L}) \cdot (-1)^{\sum_{m \in U} y_{mn+L}} \cdot \prod_{m \in U} f(y_{m1}, \dots, y_{mn})$$

Наименьшее L , начиная с которого имеет смысл искать схемы, – минимальная сложность схемы, реализующая f , в базисе из штриха Шеффера, поиск минимальной сложности описан в указанной статье.

Вычисление коэффициентов при $\prod_{m \in U} f(y_{m1}, \dots, y_{mn})$ наталкивается на проблему "большой размерности".

Representation of the SFE Nosov M.V.

In this paper, we obtain a representation of all schemes of functional elements with the same number of elements in the basis from the Schaeffer stroke for a Boolean function in the form of a natural number. Decoding this number allows you to build all the schemes.

Keywords: Boolean function, a scheme of functional elements.