

Классы двунаправленного движения на луче, реализуемые автоматами с 4 состояниями

Е. В. Кузнецова¹

В работе [1] показано, что существует универсальный экран с 5 состояниями для класса всех законов движения со скоростью движения вперёд не более, чем $1/2$, при этом не существует универсального экрана с 4 состояниями для этого класса законов движения. В данной работе приведены 3 класса законов двунаправленного движения на луче, которые можно реализовать клеточным автоматом с 4 состояниями.

Ключевые слова: клеточный автомат, число состояний, бесконечный экран, двунаправленное движение, конструирование изображений.

1. Введение

В работе исследуется конструирование движущихся изображений клеточными автоматами. Рассматривается конечный автомат и бесконечная справа полоса высотой в одну клетку. К каждой клетке полосы прикреплен свой экземпляр конечного автомата. В дальнейшем состояние автомата, прикрепленного к клетке, будем называть состоянием клетки. Множество автоматов, прикрепленных к клеткам полубесконечной прямой, является рассматриваемым в данной работе клеточным автоматом.

Состояние автомата, прикрепленного к клетке, зависит от состояния этого автомата и двух его входов (левого и правого) в предыдущий момент времени. Под входами будем понимать состояния автоматов, прикрепленных к соседним клеткам (имеются в виду две клетки: ближайшая слева и ближайшая справа). Состоянием покоя считается нулевое значение состояния автомата, и автомат в состоянии покоя остаётся таковым, если его соседи тоже находятся в состоянии покоя.

Левый вход самой левой клетки полубесконечной полосы будем называть управляющим входом и будем подавать на него произвольные, но определённые управляющие сигналы.

¹ Кузнецова Екатерина Викторовна — м.н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: kuz.net.sova@mail.ru.

Kuznetsova Ekaterina Viktorovna — junior researcher of Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Все клетки полубесконечной полосы будем называть экраном. Конфигурацию из состояний клеточных автоматов в данный момент времени будем называть изображением на экране.

Отметим, что состояния клетки интерпретируются не одинаково. Так некоторое заранее фиксированное подмножество состояний клетки, называемых метками, интерпретируются как клетки чёрного цвета, а все остальные состояния, включая состояние покоя, интерпретируются как клетки белого цвета. В результате на экране получается чёрно-белое изображение.

В работе накладывается ограничение на возможные изображения. Так, двух меток на экране быть не может, т.е. две разные клетки не могут принимать состояния, содержащиеся в подмножестве состояний, считающихся метками. Единственная метка на экране интерпретируется нами как точка.

Законом движения точки на экране назовем последовательность, состоящую из символов f, s, b (f – *forward*, s – *stop*, b – *back*), кодирующих перемещение точки по экрану в каждый момент времени. Так, если в момент времени t точка сместилась на одну клетку вправо, то t -ый член последовательности закона движения примет значение f , если сместилась влево, то t -ый член последовательности примет значение b , если никуда не сместилась, то t -ый член последовательности примет значение s . Здесь время t отсчитывается от того момента, когда в самой левой клетке появляется метка.

Тема конструирования стационарных изображений клеточными автоматами рассматривалась Е. Е. Титовой в ее работах [2, 3, 4]. Так, в работе [2] исследовалась задача конструирования изображений клеточными автоматами на прямоугольном экране. В работе было показано, что для конструирования любого изображения необходимо и достаточно, чтобы клеточный автомат имел 3 состояния.

В работе [3] продолжалось рассмотрение конструирования изображений клеточным автоматом на прямоугольном экране. В работе были даны оценки времени формирования клеточным автоматом изображений для разного числа состояний данного автомата.

В работе [4] было подробно рассмотрено исследование движения точки на бесконечном экране. В работе описан алгоритм реализации на экране широкого класса законов движения и исследована мера Бернулли множества реализуемых законов движения. Показано, что почти все законы движения являются реализуемыми. Также показано, что относительно Тихоновской топологии множество реализуемых законов движения относится к первой категории Бэра, т.е. очень мало.

В работах Э. Э. Гасанова [5, 6, 7] вводится модель клеточного автомата с локаторами. Он получается добавлением к клеточным автомату

новой возможности — посылать сигналы в “эфир” и получать из “эфира” суммарный сигнал всех элементарных автоматов. Приводится решение некоторых классических и новых задач с помощью стандартных клеточных автоматов, а затем показывается, что эти же задачи с помощью клеточных автоматов с локаторами решаются значительно легче. В частности, описан клеточный автомат с локаторами, который решает задачу однонаправленного движения точки на луче. С помощью клеточных автоматов с локаторами можно решать и другие задачи. Например, в работе [8] показано, что с помощью двумерных клеточных автоматов с локаторами можно решить задачу умножения и деления n -разрядных чисел за время порядка n .

В работе [9] Е. Е. Титовой был рассмотрен класс законов движения, в которых нет двух символов f подряд, а также нет движения назад (то есть нет символов b), такие классы будем называть классами законов движения со скоростью движения вперёд на более, чем $1/2$. Был получен результат, что такие классы движения невозможно реализовать с помощью клеточного автомата с тремя состояниями, но можно реализовать с помощью клеточного автомата с четырьмя состояниями.

В работе [1] рассматривался определенный класс S законов движения, в которых нет двух символов f подряд, движение назад возможно. Основной целью работы являлось определение наименьшего числа состояний клеточных автоматов, при котором можно реализовать все законы движения из класса S , при этом выбор управляющих сигналов через управляющий вход экрана зависел от закона движения. В работе было показано, что минимальное количество состояний клеточного автомата, при котором можно реализовать любое движение из данного класса, равно пяти.

Однако некоторые законы движения из класса S с помощью автомата с четырьмя состояниями реализовать возможно. В данной работе рассматриваются подклассы класса S : законы движения со скоростью движения вперёд $1/4$ и скоростью движения назад $1/2$, законы движения со скоростью движения вперёд $1/4$ и скоростью движения назад 1 , а также законы движения со скоростью движения вперёд $1/3$, скоростью движения назад 1 и чётным количеством остановок. Показано, что эти подклассы можно реализовать с четырьмя состояниями. Насколько полно это множество классов, которые возможно реализовать с помощью клеточного автомата с четырьмя состояниями, является темой дальнейших исследований.

Автор выражает благодарность профессору Э.Э. Гасанову за научное руководство и постановку задачи.

2. Основные понятия и формулировка результата

Определим основные понятия, используемые в данной работе.

Пусть S — множество конечных и бесконечных последовательностей, состоящих из элементов $\alpha_n \in \{sf, s, b\}$, в префиксе любой длины которых количество символов b не превышает количества символов f , это правило также верно для всех подмножеств S , рассматриваемых в данной работе. Элементы множества S будем называть *законами движения*. Символ f подразумевает движение на одну клетку вправо, s — остаться на месте, b — на одну клетку влево.

Экраном будем называть следующую конструкцию.

Пусть имеется бесконечная в правую сторону полоса высотой в одну клетку. В каждую клетку полосы поместим по одному экземпляру одного и того же конечного автомата. К входам этого автомата присоединим выходы автоматов, стоящих в двух соседних с ним клетках, то есть у автомата имеется *левый* вход, *правый* вход и текущее состояние автомата. Выходом автомата в заданный момент времени является его состояние в этот момент времени. Для автомата, стоящего в самой левой клетке полосы левый вход не определён. Будем называть его *управляющим входом* и подавать на него управляющие сигналы.

Метками будем называть значения состояний клеточного автомата, при которых считается, что клетка, находящаяся в данном состоянии, видима (чёрная).

Будем говорить, что *на экране реализуется движение по закону* $A \in S$, если выполняются следующие условия:

- 1) в некоторый момент времени в самой левой клетке экрана появляется метка (до этого на экране нет меток) — этот момент будем называть *моментом начала движения* или *началом движения*;
- 2) изменение позиции метки на экране в i -й момент от начала движения соответствует i -й букве в слове или сверхслове A , а именно, если $A(i) = s$, то в $(i + 1)$ -й момент метка остается в той же клетке, где была в текущий момент, если $A(i) = f$, то в $(i + 1)$ -й момент метка сдвинется на одну ячейку вправо, если $A(i) = b$, то в $(i + 1)$ -й момент метка сдвинется на одну клетку влево, по сравнению со своим текущим положением;
- 3) в каждый момент времени после начала движения на экране есть ровно одна метка.

Экран будем называть *универсальным* для множества законов движения S , если для любого закона движения из S существует такая последовательность управляющих сигналов, что на экране формируется

такое изображение, что метка движется по закону S . Через $Q(S)$ обозначим минимальное число состояний, достаточное, чтобы реализовать универсальный экран для множества S .

Изначально в данном клеточном автомате одни нули. Затем управляющее устройство начинает подавать ему на вход управляющие сигналы (управляющую последовательность). В какой-то момент в самой левой клетке экрана появится метка, которая интерпретируется как точка, движение которой мы и изучаем.

Таким образом, под появлением точки на экране будем подразумевать переключение клетки автомата, соответствующей самой левой клетке экрана, в состояние, соответствующее состоянию метки.

После того, как точка (метка) появилась на экране, то она никуда не исчезает и двух точек (меток) на экране быть не может (поэтому, если метка движется, например, вправо, то клетка, в которой была метка, должна перейти в состояние, не соответствующее метке).

В данной статье рассматривается вопрос о том, какие законы движения из S возможно реализовать с 4 состояниями клеточного автомата. Получены следующие результаты.

Теорема 1. Пусть S^1 — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{ssf, s, sb\}$. Тогда $Q(S^1) = 4$.

Теорема 2. Пусть S^2 — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{sfss, s, b\}$ и начинающихся с элемента s . Тогда $Q(S^2) = 4$.

Теорема 3. Пусть S^3 — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{ssf, ss, b\}$. Тогда $Q(S^3) = 4$.

3. Вспомогательные определения

Перед доказательством основных утверждений введем ряд вспомогательных определений и обозначений.

Пусть $M = \{f, s, b\}$ — алфавит базовых букв движения. Если a — слово в алфавите M , то через $|a|$ обозначим число букв в слове a .

Обозначим $FW = \{ssf, sfss, ssf\}$ — множество слов движения вперёд, $BC = \{sb, b\}$ — множество слов движения назад, $ST = \{s, ss\}$ — множество слов остановки на месте.

Пусть $\bar{\alpha}_n = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n \in S$ — закон движения, где $\alpha_i \in Z = \{fw, st, bc\}$, $fw \in FW, st \in ST, bc \in BC$, $i = 1, 2, \dots, n$. Из каждого множества слов FW, ST, BC выбираем по одному, всего получаем три слова, образующих множество Z , из них и будет состоять закон движения.

Пусть $a \in FW \cup BC \cup ST$. Определим функцию, идентифицирующую слово в i -ой позиции закона движения:

$$I(\alpha_i = a) = \begin{cases} 1 & \text{если } \alpha_i = a, \\ 0 & \text{если } \alpha_i \neq a. \end{cases}$$

Теперь используем её для подсчёта количества слов $\alpha_i \in Z = \{fw, st, bc\}$ в префиксе закона движения длины n (подразумевается, что в префиксе n слов, а не букв):

$$\begin{aligned} I_{FW}(\bar{\alpha}_n) &= \sum_{i=1}^n I(\alpha_i = fw), \\ I_{BC}(\bar{\alpha}_n) &= \sum_{i=1}^n I(\alpha_i = bc), \\ I_{ST}(\bar{\alpha}_n) &= \sum_{i=1}^n I(\alpha_i = st). \end{aligned}$$

Отсюда можем определить позицию метки на экране

$$d(\bar{\alpha}_n) = I_{FW}(\bar{\alpha}_n) - I_{BC}(\bar{\alpha}_n) \geq 0$$

и количество тактов с начала движения

$$t(\bar{\alpha}_n) = I_{ST}(\bar{\alpha}_n) \cdot |st| + I_{BC}(\bar{\alpha}_n) \cdot |bc| + I_{FW}(\bar{\alpha}_n) \cdot |fw|$$

для префикса закона движения длины n . Здесь считается, что позиция самой левой клетки равна 0.

4. Нижняя оценка

Лемма 1. Пусть S^1 — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{ssfs, s, sb\}$, S^2 — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{sfss, s, b\}$ и S^3 — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{ssf, ss, b\}$.

Мощность множества состояний клеточного автомата, реализующего законы движения S^1 , S^2 и S^3 $|Q| > 3$.

Доказательство. Предположим, что $|Q| = 3$, $Q = \{0, 1, 2\}$.

$0 \in Q \setminus L$, $1 \in L$, для 2 возможны два варианта:

1) $2 \in L$ ($L = \{1, 2\}$).

То есть у нас есть две метки и ни одного сигнала. В любой момент после начала и до конца движения на экране находится ровно одна метка.

Рассмотрим произвольный момент времени. Пусть на экране находится метка 1, в следующий момент времени она может: остаться на месте, переместиться вправо или влево, в то же время она может остаться меткой 1, или стать меткой 2. Таким образом, для метки 1 есть 6 вариантов развития событий в следующий момент.

То же самое верно и для метки 2. То есть, имея две метки и ни одного сигнала, возможно реализовать не более 6^2 законов движения, а нам требуется реализовать континуум, поскольку в S^1 , S^2 и S^3 континуум законов движения.

2) $2 \in Q \setminus L$ ($L = \{1\}$).

Пусть $F^1 \subset S^1$ — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{ssfs, s\}$, $F^2 \subset S^2$ — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{sfss, s\}$, $F^3 \subset S^3$ — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{ssf, ss\}$. То есть движение назад нами исключено. Попробуем реализовать F^1 , F^2 и F^3 .

Метка всего одна. Все движения вперед можно осуществить только из $\varphi(1, a, b) = 1$, $a, b \in \{0, 2\}$, т.е. из предобработки. Под предобработкой здесь понимается конечное множество сигналов, поданных на вход до появления метки на экране.

К моменту появления метки на экране там уже находится какая-то конфигурация, состоящая из элементов множества $\{0, 2\}$. Таких конфигураций счётное число, а законов движения континуум.

□

5. Законы движения со скоростью движения вперёд $1/4$ и скоростью движения назад $1/2$

Рассмотрим клеточный автомат K_1 . Множество состояний автомата имеет вид $Q = \{0, 1, 2, 3\}$, множество меток — $L = \{1, 2\}$. Функция переходов

будет следующая:

$$\begin{aligned}
 \varphi(0, 0, a) &= 0, \text{ где } a \in Q, \\
 \varphi(0, 1, a) &= 1, \text{ где } a \in Q \setminus L, \\
 \varphi(0, 2, 0) &= 2, \\
 \varphi(0, 2, 3) &= 0, \\
 \varphi(0, 3, a) &= 0, \text{ где } a \in Q \setminus L, \\
 \varphi(0, 3, 1) &= 0, \\
 \varphi(0, 3, 2) &= 1, \\
 \varphi(1, a, b) &= 0, \text{ где } a \in Q \setminus L, b \in Q \setminus L, \\
 \varphi(2, 0, a) &= 3, \text{ где } a \in Q \setminus L, \\
 \varphi(2, 3, a) &= 1, \text{ где } a \in Q \setminus L, \\
 \varphi(3, 0, a) &= 3, \text{ где } a \in Q, \\
 \varphi(3, 1, a) &= 2, \text{ где } a \in Q \setminus L, \\
 \varphi(3, 2, 0) &= 0, \\
 \varphi(3, 2, 3) &= 3, \\
 \varphi(3, 3, a) &= 3, \text{ где } a \in Q, \\
 \varphi(a, b, c) &= 0, \text{ где } a, b, \text{ или } b, c, \text{ или } a, c \in L.
 \end{aligned}$$

Движение точки (1 и 2, выделенные жирным шрифтом) на экране вперёд изображено на рисунке 1а, движение назад — на рисунке 1б. Строки — моменты времени. Справа от вертикальной черты — картинка, которая получается на экране, слева — символ, который подаётся на управляющий вход; соответственно, символы слева от вертикальной черты, прочитанные сверху вниз — управляющая последовательность.

Эта функция переходов позволяет осуществлять движение точки на экране вперёд со скоростью $1/4$, назад — со скоростью $1/2$ с 4 состояниями клеточного автомата. Докажем это строго.

Лемма 2. Пусть S^1 — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{ssfs, s, sb\}$. И пусть дано слово $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n \dots \in S^1$, сопоставим ему управляющую последовательность — слово $\beta = 22\beta_1 \dots \beta_n \dots$, где

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_i = s, \\ 330, & \text{если } \alpha_i = sb, \\ 300, & \text{если } \alpha_i = ssfs. \end{cases}$$

Тогда, если на управляющий вход клеточного автомата K_1 подавать последовательность β , то справедливы следующие утверждения:

3	1 0 0 0				0 0 0 1
0	2 0 0 0				3 3 0 0 1
0	2 3 0 0				0 3 3 0 1
3	0 1 3 0				3 3 0 3 2
0	3 1 0 3				0 3 3 1 0
0	0 2 0 0				3 0 3 2 0
3	0 2 3 0				3 3 1 0 3
0	3 0 1 3				0 3 2 0 0
0	0 3 1 0				3 1 0 3 0

$\mathbf{2} \mid 0\ 0\ 0$	$\mathbf{2} \mid 0\ 0\ 0$	$\mathbf{2} \mid 0\ 0\ 0$
$\mathbf{2} \mid 3\ 0\ 0$	$\mathbf{2} \mid 3\ 0\ 0$	$\mathbf{2} \mid 3\ 0\ 0$
$0 \mid 1\ 3\ 0$	$0 \mid 1\ 3\ 0$	$0 \mid 1\ 3\ 0$
$* \mid 1\ 0\ 3$	$* \mid 1\ 0\ 0$	$* \mid 0\ 1\ 0$
а	б	в

Рис. 2.

$\mathbf{2} \mid 0\ 0\ 0\ 0$			
$\mathbf{2} \mid 3\ 0\ 0\ 0$			
$3 \mid 1\ 3\ 0\ 0$			
$0 \mid 2\ 0\ 3\ 0$			
$0 \mid 2\ 3\ 0\ 0$	$0 \mid 2\ 3\ 0\ 0$	$0 \mid 2\ 3\ 0\ 0$	$0 \mid 2\ 3\ 0\ 3$
$* \mid 0\ 1\ 3\ 0$	$3 \mid 0\ 1\ 3\ 0$	$0 \mid 2\ 0\ 3\ 0$	$3 \mid 0\ 1\ 3\ 0$
$* \mid * \ 1\ 0\ 0$	$3 \mid 3\ 1\ 0\ 0$	$0 \mid 0\ 1\ 3\ 0$	$0 \mid 3\ 1\ 0\ 3$
	$0 \mid 3\ 2\ 0\ 0$	$* \mid 0\ 1\ 0\ 0$	$0 \mid 0\ 2\ 0\ 0$
	$* \mid 1\ 0\ 3\ 0$	$* \mid * \ 1\ 0\ 0$	$* \mid 0\ 2\ 3\ 0$
а	б	в	г

Рис. 3.

В момент времени $t(\overline{\alpha_1}) = 1$ в позиции $d(\overline{\alpha_1}) - 1 = -1$, то есть на входе, будет находиться $\beta_2^* = 0$. В момент времени $t(\overline{\alpha_2}) = 2$ метка на экране будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_2}) = 0$. Верно.

2.3. $n = 2$. $\overline{\alpha_2} = \alpha_1\alpha_2 = sssf$, $t(\overline{\alpha_2}) = 5$, $d(\overline{\alpha_2}) = 1$.

Подадим на вход последовательность 220300. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 2в.

В момент времени $t(\overline{\alpha_1}) = 1$ в позиции $d(\overline{\alpha_1}) - 1 = -1$, то есть на входе, будет находиться $\beta_2^* = 3$. В момент времени $t(\overline{\alpha_2}) = 5$ метка на экране будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_2}) = 1$. Верно.

3. $n = 1$. $\overline{\alpha_1} = \alpha_1 = sssf$, $t(\overline{\alpha_1}) = 4$, $d(\overline{\alpha_1}) = 1$.

Подадим на вход последовательность 22300. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 3а.

В момент времени $t = 0$ (момент появления метки на экране) в позиции $d = -1$, то есть на входе, будет находиться $\beta_1^* = 3$. В момент времени $t(\overline{\alpha_1}) = 4$ метка на экране будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_1}) = 1$. Верно.

3.1. $n = 2$. $\overline{\alpha_2} = \alpha_1\alpha_2 = ssfssb$, $t(\overline{\alpha_2}) = 6$, $d(\overline{\alpha_2}) = 0$.

Подадим на вход последовательность 22300330. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 3б.

В момент времени $t(\overline{\alpha_1}) = 4$ в позиции $d(\overline{\alpha_1}) - 1 = 0$, будет находиться $\beta_2^* = 3$. В момент времени $t(\overline{\alpha_2}) = 6$ метка на экране будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_2}) = 0$. Верно.

3.2. $n = 2$. $\overline{\alpha_2} = \alpha_1\alpha_2 = ssfss$, $t(\overline{\alpha_2}) = 5$, $d(\overline{\alpha_2}) = 1$.

Подадим на вход последовательность 223000. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 3в.

В момент времени $t(\overline{\alpha_1}) = 4$ в позиции $d(\overline{\alpha_1}) - 1 = 0$, будет находиться $\beta_2^* = 0$. В момент времени $t(\overline{\alpha_2}) = 5$ метка на экране будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_2}) = 1$. Верно.

3.3. $n = 2$. $\overline{\alpha_2} = \alpha_1\alpha_2 = ssfsssf$, $t(\overline{\alpha_2}) = 8$, $d(\overline{\alpha_2}) = 2$.

Подадим на вход последовательность 2300300. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 3г.

В момент времени $t(\overline{\alpha_1}) = 4$ в позиции $d(\overline{\alpha_1}) - 1 = 0$, будет находиться $\beta_2^* = 3$. В момент времени $t(\overline{\alpha_2}) = 8$ метка на экране будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_2}) = 2$. Верно.

Отметим, что в конце реализации слов движения вперёд, назад и остановки на экране находится метка 1.

Индуктивный переход. Пусть при $n = k - 1$ утверждение выполнено.

Тогда в момент времени $t(\overline{\alpha_{k-2}})$ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-2}}) - 1$ будет находиться символ β_{k-1}^* . А в момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}})$ метка 1 будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}})$.

Докажем, что при $n = k$ утверждение также выполняется.

1) Покажем, что в момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}})$ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ будет находиться символ β_k^* .

Сигнал (0 или 3) до встречи с меткой движется со скоростью 1 — это следует из рассматриваемой функции переходов. То есть, зная положение какого-то определённого сигнала в какой-то момент времени, можно однозначно определить, где он был несколько тактов назад, или где будет несколько тактов вперёд.

Рассмотрим момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}})$. Единица находится в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}})$ (предположение индукции).

1. Если последним в законе движения было движение вправо ($ssfs$), значит, в момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) - 4$ тройка стояла в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 2$, нули — в позициях $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 3$ и $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 4$, а β_k^* — в $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 5$. То есть в $t(\overline{\alpha_{k-1}})$ β_k^* будет в $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ (рисунок 4а).

* β_k^* 0 0 3 1 * * * *		
* * β_k^* 0 0 2 0 * * * *		
* * * β_k^* 0 2 3 0 * * *	* β_k^* 0 3 3 1 * * *	
* * * * β_k^* 0 1 0 0 * *	* * β_k^* 0 3 2 0 * *	* β_k^* 0 1 * *
* * * * * β_k^* 1 0 0 0 *	* * * β_k^* 1 0 3 0 *	* * β_k^* 1 0 *
a	б	в

Рис. 4.

2. Если последним в законе движения было движение влево (sb), значит, в момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) - 2$ тройки стояли в позициях $d(\overline{\alpha_{k-1}})$ и $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1, 0$ — в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 2$, а β_k^* — в $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 3$. То есть в $t(\overline{\alpha_{k-1}})$ β_k^* будет в $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ (рисунок 4б).

3. Если последней в законе движения была остановка (s), значит, в момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ ноль стоял в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$, а β_k^* — в $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 2$. То есть в $t(\overline{\alpha_{k-1}})$ β_k^* будет в $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ (рисунок 4в).

2) Покажем, что в момент времени $t(\overline{\alpha_k})$ метка 1 будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_k})$.

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}})$ метка 1 находится в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}})$ (предположение индукции).

В позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ будет находиться символ β_k^* (согласно утверждению пункта 1 леммы).

Отдельно рассмотрим три случая для каждого возможного значения α_k .

1. $\alpha_k = s$. В этом случае выполнены соотношения:

$$\begin{aligned}
 I_{ST}(\overline{\alpha_k}) &= I_{ST}(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\
 I_{FW}(\overline{\alpha_k}) &= I_{FW}(\overline{\alpha_{k-1}}), \\
 I_{BC}(\overline{\alpha_k}) &= I_{BC}(\overline{\alpha_{k-1}}), \\
 t(\overline{\alpha_k}) &= t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\
 d(\overline{\alpha_k}) &= d(\overline{\alpha_{k-1}}).
 \end{aligned}$$

Согласно функции переходов получим картину, изображённую на рисунке 5а.

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) = t(\overline{\alpha_k}) - 1$ в позиции $d(\overline{\alpha_k}) = d(\overline{\alpha_{k-1}})$ находится метка 1, в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1 = d(\overline{\alpha_k}) - 1$ находится символ $\beta_k^* = 0$.

Обозначим $q(d)$ символ в позиции d . В момент времени $t(\overline{\alpha_k})$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_k})$ будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_k})) = \varphi(\beta_k^*, 1, a) = \varphi(0, 1, a) = 1, \text{ где } a \in Q \setminus L.$$

		* 0 0 3 1 * * * * *
		* * 0 0 2 0 * * * *
* 0 1 * *	* 0 3 3 1 * * *	* * * 0 2 3 0 * * *
* * 1 0 *	* * 0 3 2 0 * *	* * * * 0 1 3 0 * *
	* * * 1 0 3 0 *	* * * * * 1 0 3 0 *
а	б	в

Рис. 5.

2. $\alpha_k = sb$. В этом случае выполнены соотношения:

$$\begin{aligned}
 I_{BC}(\overline{\alpha_k}) &= I_{BC}(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\
 I_{FW}(\overline{\alpha_k}) &= I_{FW}(\overline{\alpha_{k-1}}), \\
 I_{ST}(\overline{\alpha_k}) &= I_{ST}(\overline{\alpha_{k-1}}), \\
 t(\overline{\alpha_k}) &= t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 2, \\
 d(\overline{\alpha_k}) &= d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1.
 \end{aligned}$$

Согласно функции переходов получим картину, изображённую на рисунке 5б.

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) = t(\overline{\alpha_k}) - 2$ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) = d(\overline{\alpha_k}) + 1$ находится метка 1, в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1 = d(\overline{\alpha_k})$ находится символ $\beta_k^* = 3$. В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1 = t(\overline{\alpha_k}) - 1$ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) = d(\overline{\alpha_k}) + 1$ находится метка 2:

$$q(d(\overline{\alpha_k}) + 1) = \varphi(3, 1, a) = 2, \text{ где } a \in Q \setminus L.$$

В момент времени $t(\overline{\alpha_k})$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_k})$ будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_k})) = \varphi(0, 3, 2) = 1.$$

3. $\alpha_k = sfs$. В этом случае выполнены соотношения:

$$\begin{aligned}
 I_{FW}(\overline{\alpha_k}) &= I_{FW}(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\
 I_{BC}(\overline{\alpha_k}) &= I_{BC}(\overline{\alpha_{k-1}}), \\
 I_{ST}(\overline{\alpha_k}) &= I_{ST}(\overline{\alpha_{k-1}}), \\
 t(\overline{\alpha_k}) &= t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 4, \\
 d(\overline{\alpha_k}) &= d(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1.
 \end{aligned}$$

Согласно функции переходов получим картину, изображённую на рисунке 5в.

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) = t(\overline{\alpha_k}) - 4$ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) = d(\overline{\alpha_k}) - 1$ находится метка 1, в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1 = d(\overline{\alpha_k}) - 2$ находится символ $\beta_k^* = 3$.

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1 = t(\overline{\alpha_k}) - 3$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) = d(\overline{\alpha_k}) - 1$ будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_k}) - 1) = \varphi(3, 1, a) = 2, \text{ где } a \in Q \setminus L.$$

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 2 = t(\overline{\alpha_k}) - 2$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1 = d(\overline{\alpha_k})$ будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_k})) = \varphi(2, 0, a) = 3, \text{ где } a \in Q \setminus L.$$

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 3 = t(\overline{\alpha_k}) - 1$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1 = d(\overline{\alpha_k})$ будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_k})) = \varphi(2, 3, a) = 1, \text{ где } a \in Q \setminus L.$$

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 4 = t(\overline{\alpha_k})$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1 = d(\overline{\alpha_k})$ будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_k})) = \varphi(0, 1, a) = 1, \text{ где } a \in Q \setminus L.$$

Мы доказали, что в момент времени $t(\overline{\alpha_k})$ метка 1 будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_k})$ для всех возможных вариантов движения. Значит, утверждение 2 леммы верно. □

Фактически в лемме 2 приведен автомат с 4 состояниями, который образует универсальный экран для множества законов движения S^1 . С другой стороны лемма 1 показывает, что трех состояний не достаточно для построения универсального экрана для S^1 . Тем самым мы доказали справедливость утверждения теоремы 1.

6. Законы движения со скоростью движения вперёд $1/4$ и скоростью движения назад 1

Рассмотрим клеточный автомат K_2 . Множество состояний автомата имеет вид $Q = \{0, 1, 2, 3\}$, множество меток — $L = \{1, 2\}$. Функция переходов

будет следующая:

$$\varphi(0, a, b) = 0, \text{ где } a \in Q \setminus L, b \in \{0, 1, 3\},$$

$$\varphi(3, a, b) = 3, \text{ где } a \in Q \setminus L, b \in \{0, 1, 3\},$$

$$\varphi(2, 0, a) = 3, \text{ где } a \in Q \setminus L,$$

$$\varphi(2, 3, a) = 1, \text{ где } a \in Q \setminus L,$$

$$\varphi(1, a, b) = 0, \text{ где } a \in Q \setminus L, b \in Q \setminus L,$$

$$\varphi(0, 1, a) = 1, \text{ где } a \in Q \setminus L,$$

$$\varphi(3, 1, a) = 2, \text{ где } a \in Q \setminus L,$$

$$\varphi(0, 0, 2) = 1,$$

$$\varphi(3, 0, 2) = 2,$$

$$\varphi(0, 2, a) = 0, \text{ где } a \in Q \setminus L,$$

$$\varphi(3, 2, 3) = 0,$$

$$\varphi(0, 3, 2) = 0,$$

$$\varphi(3, 3, 2) = 3,$$

$$\varphi(3, 2, 0) = 2,$$

$$\varphi(a, b, c) = 0, \text{ где хотя бы два из трёх: } a \text{ и } b, \text{ или } b \text{ и } c, \text{ или } a \text{ и } c \in L.$$

Движение точки (1 и 2, выделенные жирным шрифтом) на экране вперёд изображено на рисунке 6а, движение назад — на рисунке 6б. Строки — моменты времени. Справа от вертикальной черты — картинка, которая получается на экране, слева — символ, который подаётся на управляющий вход; соответственно, символы слева от вертикальной черты, прочитанные сверху вниз — управляющая последовательность.

Эта функция переходов позволяет осуществлять движение точки вперёд со скоростью $1/4$, назад — со скоростью 1 на экране с 4 состояниями клеточного автомата, с одним лишь ограничением: закон движения должен начинаться с s . Докажем это строго.

Лемма 3. Пусть S^2 — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{sfss, s, b\}$ и начинающихся с элемента s . И пусть дано слово $\alpha = s\alpha_1 \dots \alpha_n \dots \in S^2$, сопоставим ему управляющую последовательность — слово $\beta = 22\beta_1 \dots \beta_n \dots$, где

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_i = s, \\ 30, & \text{если } \alpha_i = b, \\ 333, & \text{если } \alpha_i = sfss. \end{cases}$$

Тогда, если на управляющий вход клеточного автомата K_2 подавать последовательность β , то справедливы следующие утверждения:

2	0	0	0	0	0	0	0	0	0										
2	3	0	0	0	0	0	0	0	0		3	0	0	0	0	1	0	0	0
3	1	3	0	0	0	0	0	0	0		0	3	0	0	0	1	0	0	0
3	2	0	3	0	0	0	0	0	0		3	0	3	0	0	1	0	0	0
3	2	3	0	3	0	0	0	0	0		0	3	0	3	0	1	0	0	0
3	0	1	3	0	3	0	0	0	0		0	3	0	0	0	1	0	0	0
3	3	1	0	3	0	3	0	0	0		3	0	3	0	0	1	0	0	0
3	3	2	0	0	3	0	3	0	0		0	3	0	3	0	1	0	0	0
3	3	2	3	0	0	3	0	0	0		0	3	0	3	0	1	0	0	0
3	3	0	1	3	0	0	3	0	0		3	0	3	0	3	1	0	0	0
3	3	3	1	0	3	0	0	0	0		0	3	0	3	0	2	0	0	0
3	3	3	2	0	0	3	0	0	0		3	0	3	0	2	0	3	0	3
3	3	3	0	1	3	0	0	0	0		3	0	2	0	3	0	3	0	3

а

б

Рис. 6.

1) в момент времени $t(\overline{\alpha_{n-1}}) - 1$ в позиции $d(\overline{\alpha_{n-1}}) - 1$ будет находиться символ β_n^* , где

$$\beta_n^* = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_n = s, \\ 3, & \text{если } \alpha_n = b, \\ 3, & \text{если } \alpha_n = sfss, \end{cases}$$

2) в момент времени $t(\overline{\alpha_n})$ метка на экране будет в позиции $d(\overline{\alpha_n})$.

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по длине n префикса закона движения.

Базис индукции: $n = 1$ и $n = 2$. Возможны следующие случаи.

1. $n = 1$. $\overline{\alpha_1} = \alpha_1 = b$ — данный закон движения не из класса S^2 , $n = 2$ рассматривать не нужно.

2. $n = 1$. $\overline{\alpha_1} = \alpha_1 = s$, $t(\overline{\alpha_1}) = 2$, $d(\overline{\alpha_1}) = 0$.

Подадим на вход последовательность 220. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 7а. Символ * — произвольный символ из множества $Q \setminus L$, а $l \in L = \{1, 2\}$.

В момент времени $t = 0$ (момент появления метки на экране) в позиции $d = -1$, то есть на входе, будет находиться $\beta_1^* = 0$. В момент времени $t(\overline{\alpha_1}) = 2$ метка на экране будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_1}) = 0$. Верно.

2.1. $n = 2$. $\overline{\alpha_2} = \alpha_1\alpha_2 = sb$ — данный закон движения не из класса S^2 .

2	0 0 0 0	2	0 0 0 0	2	0 0 0 0	2	0 0 0 0
2	3 0 0 0	2	3 0 0 0	2	3 0 0 0	2	3 0 0 0
3	1 3 0 0	3	1 3 0 0	3	1 3 0 0	3	1 3 0 0
3	2 0 3 0	3	2 0 3 0	3	2 0 3 0	3	2 0 3 0
3	2 3 0 3	3	2 3 0 3	3	2 3 0 3	3	2 3 0 3
*	0 1 3 0	0	0 1 3 0	0	0 1 3 0	*	0 1 3 0
*	* 1 0 3	*	0 2 0 0	*	* 1 0 0	*	* 0 1 3
*	* l 0 0	*	l 0 3 0	*	* l 0 0	*	* * l 0
а		б		в		г	

Рис. 8.

Подадим на вход последовательность 223330. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 8в.

В момент времени $t(\bar{\alpha}_1) - 1 = 4$ в позиции $d(\bar{\alpha}_1) - 1 = 0$ будет находиться $\beta_2^* = 0$. В момент времени $t(\bar{\alpha}_2) = 6$ метка на экране будет находиться в позиции $d(\bar{\alpha}_2) = 1$. Верно.

3.3. $n = 2$. $\bar{\alpha}_2 = \alpha_1\alpha_2 = sfsssfs$, $t(\bar{\alpha}_2) = 9$, $d(\bar{\alpha}_2) = 2$.

Подадим на вход последовательность 22333333. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 8з.

В момент времени $t(\bar{\alpha}_1) - 1 = 4$ в позиции $d(\bar{\alpha}_1) - 1 = 0$ будет находиться $\beta_2^* = 3$. В момент времени $t(\bar{\alpha}_2) = 9$ метка на экране будет находиться в позиции $d(\bar{\alpha}_2) = 2$. Верно.

Индуктивный переход. Пусть при $n = k - 1$ утверждение выполнено.

То есть в момент времени $t(\bar{\alpha}_{k-2}) - 1$ в позиции $d(\bar{\alpha}_{k-2}) - 1$ будет находиться символ β_{k-1}^* . А в момент времени $t(\bar{\alpha}_{k-1})$ метка будет находиться в позиции $d(\bar{\alpha}_{k-1})$.

Докажем, что при $n = k$ утверждение также выполняется.

1) Покажем, что в момент времени $t(\bar{\alpha}_{k-1}) - 1$ в позиции $d(\bar{\alpha}_{k-1}) - 1$ будет находиться символ β_k^* .

Сигнал (0 или 3) до встречи с меткой движется со скоростью 1 — это следует из рассматриваемой функции переходов. То есть, зная положение какого-то определённого сигнала в какой-то момент времени, можно однозначно определить, где он был несколько тактов назад, или где будет несколько тактов вперёд.

* β_k^* 3 3 3 1 * * * * *		
* * β_k^* 3 3 2 0 * * * * *		
* * * β_k^* 3 2 3 0 * * * * *		
* * * * β_k^* 0 1 3 0 * * * *	* β_k^* 0 3 1 * * *	* β_k^* 0 1 * * *
* * * * * β_k^* 1 0 3 0 * *	* * β_k^* 0 2 0 * *	* * β_k^* 1 0 * *
* * * * * * l 0 0 3 0 *	* * * l 0 3 0 *	* * * l 0 0 *
a	б	в

Рис. 9.

Рассмотрим момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}})$. Метка находится в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}})$ (предположение индукции).

1. Если последним в законе движения было движение вправо ($sfss$), значит, в момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) - 5$ тройки стояли в позициях $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 2$, $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 3$ и $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 4$, а β_k^* — в $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 5$. То есть в $t(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ β_k^* будет в $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ (рисунок 9а). Символ * — произвольный символ из множества $Q \setminus L$, а $l \in L = \{1, 2\}$.

2. Если последним в законе движения было движение влево (b), значит, в момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) - 2$ тройка стояла в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}})$, 0 — в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$, а β_k^* — в $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 2$. То есть в $t(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ β_k^* будет в $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ (рисунок 9б).

3. Если последней в законе движения была остановка (s), значит, в момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) - 2$ ноль стоял в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$, а β_k^* — в $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 2$. То есть в $t(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ β_k^* будет в $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ (рисунок 9в).

2) Покажем, что в момент времени $t(\overline{\alpha_k})$ метка будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_k})$.

В момент времени времени $t(\overline{\alpha_{k-1}})$ метка находится в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}})$ (предположение индукции).

В момент времени времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ символ β_k^* будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ (согласно утверждению пункта 1 леммы).

Отдельно рассмотрим три случая для каждого возможного значения α_k .

1. $\alpha_k = s$. В этом случае выполнены соотношения:

$$\begin{aligned}
 I_{ST}(\overline{\alpha_k}) &= I_{ST}(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\
 I_{FW}(\overline{\alpha_k}) &= I_{FW}(\overline{\alpha_{k-1}}), \\
 I_{BC}(\overline{\alpha_k}) &= I_{BC}(\overline{\alpha_{k-1}}), \\
 t(\overline{\alpha_k}) &= t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\
 d(\overline{\alpha_k}) &= d(\overline{\alpha_{k-1}}).
 \end{aligned}$$

		0 3 3 3 * * *
		* 0 3 3 2 * *
0 0 3 * * *		* * 0 3 2 3 *
* 0 0 3 * *	0 0 * * *	* * * 0 0 1 3
* * 0 0 2 *	* 0 1 * *	* * * * 0 1 0
* * * 1 0 3	* * 1 0 *	* * * * * 1 0
* * * l 0 0	* * l 0 0	* * * * * l 0
а	б	в

Рис. 10.

Есть два состояния, интерпретируемые как метки, и функция переходов определена так, что после одного и того же движения состояние, отвечающее за метку, может быть различным в зависимости от следующих символов в законе движения. Поэтому рассмотрим три случая значения α_{k-1} :

1.1. $\alpha_{k-1} = b$.

Согласно функции переходов получим картину, изображённую на рисунке 10а. Символ * — произвольный символ из множества $Q \setminus L$, а $l \in L = \{1, 2\}$.

В момент времени $t(\overline{\alpha_k}) = t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_k}) = d(\overline{\alpha_{k-1}})$. Верно.

1.2. $\alpha_{k-1} = s$.

Согласно функции переходов получим картину, изображённую на рисунке 10б.

В момент времени $t(\overline{\alpha_k}) = t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_k}) = d(\overline{\alpha_{k-1}})$. Верно.

1.3. $\alpha_{k-1} = sfss$.

Согласно функции переходов получим картину, изображённую на рисунке 10в.

В момент времени $t(\overline{\alpha_k}) = t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_k}) = d(\overline{\alpha_{k-1}})$. Верно.

2. $\alpha_k = b$. В этом случае выполнены соотношения:

$$\begin{aligned}
 I_{BC}(\overline{\alpha_k}) &= I_{BC}(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\
 I_{FW}(\overline{\alpha_k}) &= I_{FW}(\overline{\alpha_{k-1}}), \\
 I_{ST}(\overline{\alpha_k}) &= I_{ST}(\overline{\alpha_{k-1}}), \\
 t(\overline{\alpha_k}) &= t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\
 d(\overline{\alpha_k}) &= d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1.
 \end{aligned}$$

Как и в предыдущем пункте, рассмотрим три случая значения α_{k-1} :

$\begin{matrix} 0 & 3 & 0 & 3 & * & * \\ * & 0 & 3 & 0 & \mathbf{2} & * \\ * & * & 0 & \mathbf{2} & 0 & 3 \\ * & * & \mathbf{l} & 0 & 3 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 3 & * & * & * \\ * & 0 & 0 & \mathbf{2} & * & * \\ * & * & \mathbf{1} & 0 & 3 & * \\ * & * & \mathbf{l} & 0 & 0 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & * & * & * \\ * & 0 & 3 & 3 & 3 & \mathbf{2} & * & * \\ * & * & 0 & 3 & 3 & \mathbf{2} & 3 & * \\ * & * & * & 0 & 3 & 0 & \mathbf{1} & 3 \\ * & * & * & * & 0 & 3 & \mathbf{1} & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & \mathbf{2} & 0 \\ * & * & * & * & * & \mathbf{l} & 0 & 3 \end{matrix}$
а	б	в

Рис. 11.

2.1. $\alpha_{k-1} = b$.

Согласно функции переходов получим картину, изображённую на рисунке 11а. Символ $*$ — произвольный символ из множества $Q \setminus L$, а $l \in L = \{1, 2\}$.

В момент времени $t(\overline{\alpha}_k) = t(\overline{\alpha}_{k-1}) + 1$ символ в позиции $d(\overline{\alpha}_k) = d(\overline{\alpha}_{k-1}) - 1$. Верно.

2.2. $\alpha_{k-1} = s$.

Согласно функции переходов получим картину, изображённую на рисунке 11б.

В момент времени $t(\overline{\alpha}_k) = t(\overline{\alpha}_{k-1}) + 1$ символ в позиции $d(\overline{\alpha}_k) = d(\overline{\alpha}_{k-1}) - 1$. Верно.

2.3. $\alpha_{k-1} = s f s s$.

Согласно функции переходов получим картину, изображённую на рисунке 11в.

В момент времени $t(\overline{\alpha}_k) = t(\overline{\alpha}_{k-1}) + 1$ символ в позиции $d(\overline{\alpha}_k) = d(\overline{\alpha}_{k-1}) - 1$. Верно.

3. $\alpha_k = s f s$. В этом случае выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} I_{FW}(\overline{\alpha}_k) &= I_{FW}(\overline{\alpha}_{k-1}) + 1, \\ I_{BC}(\overline{\alpha}_k) &= I_{BC}(\overline{\alpha}_{k-1}), \\ I_S(\overline{\alpha}_k) &= I_S(\overline{\alpha}_{k-1}), \\ t(\overline{\alpha}_k) &= t(\overline{\alpha}_{k-1}) + 4, \\ d(\overline{\alpha}_k) &= d(\overline{\alpha}_{k-1}) + 1. \end{aligned}$$

Как и в предыдущих пунктах, рассмотрим три случая значения α_{k-1} :

3.1. $\alpha_{k-1} = b$.

Согласно функции переходов получим картину, изображённую на рисунке 12а. Символ $*$ — произвольный символ из множества $Q \setminus L$, а $l \in L = \{1, 2\}$.

<pre> 3 3 3 0 3 * * * * 3 3 3 0 3 * * * * 3 3 3 0 2 * * * * 3 3 2 0 3 * * * * 3 2 3 0 * * * * * 0 1 3 * * * * * * 1 0 * * * * * * l 0 </pre>	<pre> 3 3 3 0 * * * * * 3 3 3 1 * * * * * 3 3 2 0 * * * * * 3 2 3 0 * * * * * 0 1 3 0 * * * * * 1 0 3 * * * * * l 0 0 </pre>	<pre> 3 3 3 3 3 3 * * * * * 3 3 3 3 3 2 * * * * * 3 3 3 3 2 3 * * * * * 3 3 3 0 1 3 * * * * * 3 3 3 1 0 3 * * * * * 3 3 2 0 0 * * * * * * 3 2 3 0 * * * * * * * 0 1 3 * * * * * * * * 1 0 * * * * * * * * l 0 </pre>
а	б	в

Рис. 12.

В момент времени $t(\overline{\alpha_k}) = t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 4$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_k}) = d(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1$. Верно.

3.2. $\alpha_{k-1} = s$.

Согласно функции переходов получим картину, изображённую на рисунке 12б.

В момент времени $t(\overline{\alpha_k}) = t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 4$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_k}) = d(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1$. Верно.

3.3. $\alpha_{k-1} = sfss$.

Согласно функции переходов получим картину, изображённую на рисунке 12в.

В момент времени $t(\overline{\alpha_k}) = t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 4$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_k}) = d(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1$. Верно.

Мы доказали, что в момент времени $t(\overline{\alpha_k})$ метка будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_k})$ для всех возможных вариантов движения. Значит, утверждение 2 леммы верно. □

Фактически в лемме 3 приведен автомат с 4 состояниями, который образует универсальный экран для множества законов движения S^2 . С другой стороны лемма 1 показывает, что трех состояний не достаточно для построения универсального экрана для S^2 . Тем самым мы доказали справедливость утверждения теоремы 2.

7. Законы движения со скоростью движения вперёд $1/3$, скоростью движения назад 1 и чётным количеством остановок

Рассмотрим клеточный автомат K_3 . Множество состояний автомата имеет вид $Q = \{0, 1, 2, 3\}$, множество меток — $L = \{1, 2\}$. Функция переходов будет следующая:

$$\begin{aligned} \varphi(a, 0, b) &= a, \text{ где } a \in Q \setminus L, b \in Q, \\ \varphi(0, 1, a) &= 2, \text{ где } a \in Q \setminus L, \\ \varphi(0, 2, 0) &= 2, \\ \varphi(0, 2, 3) &= 0, \\ \varphi(a, 3, b) &= a, \text{ где } a \in Q \setminus L, b \in \{0, 2, 3\}, \\ \varphi(a, 3, 1) &= 1, \text{ где } a \in Q \setminus L, \\ \varphi(1, a, b) &= 0, \text{ где } a \in Q \setminus L, b \in Q, \\ \varphi(2, 0, a) &= 3, \text{ где } a \in Q \setminus L, \\ \varphi(2, 3, a) &= 1, \text{ где } a \in Q \setminus L, \\ \varphi(3, 1, a) &= 0, \text{ где } a \in Q \setminus L, \\ \varphi(3, 2, 0) &= 1, \\ \varphi(3, 2, 3) &= 3, \\ \varphi(a, b, c) &= 0, \text{ где два из трёх: } a \text{ и } b, \text{ или } b \text{ и } c, \text{ или } a \text{ и } c \in L. \end{aligned}$$

Движение точки (1 и 2, выделенные жирным шрифтом) на экране вперёд изображено на рисунке 13а, движение назад — на рисунке 13б, остановка — на рисунке 13в. Строки — моменты времени. Справа от вертикальной черты — картинка, которая получается на экране, слева — символ, который подаётся на управляющий вход; соответственно, символы слева от вертикальной черты, прочитанные сверху вниз — управляющая последовательность.

Эта функция переходов позволяет осуществлять движение точки вперёд со скоростью $1/3$, назад — со скоростью 1 и останавливаться на чётное количество тактов на экране с 4 состояниями клеточного автомата. Докажем это строго.

Лемма 4. Пусть S^3 — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{ssf, ss, b\}$. И пусть дано слово $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n \dots \in S^3$, сопоставим ему управляющую последовательность — слово $\beta =$

			2	0	0	0	0	0
			2	0	0	0	0	0
			2	3	0	0	0	0
2	0	0	0	1	3	0	0	0
2	3	0	0	2	0	3	0	0
0	1	3	0	0	1	3	0	3
3	2	0	3	0	2	0	3	0
*	1	3	0	3	*	2	3	0
						*	*	1
								3

2	0 0 0 0	2	0 0 0 0	2	0 0 0 0	2	0 0 0 0
2	3 0 0 0	2	3 0 0 0	0	3 0 0 0	0	3 0 0 0
0	1 3 0 0	0	1 3 0 0	0	1 3 0 0	0	1 3 0 0
0	2 0 3 0	0	2 0 3 0	0	2 0 3 0	0	2 0 3 0
*	2 3 0 3	3	2 3 0 3	3	0 1 3 0	*	0 2 0 3
*	* 1 3 0	3	3 1 3 0	*	3 2 0 3	*	* 2 3 0
		*	1 0 0 3	*	* 1 3 0	*	* * 1 3
	а		б		в		г

Рис. 15.

Подадим на вход последовательность 220003. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 15б.

В момент времени $t(\bar{\alpha}_1) = 3$ в позиции $d(\bar{\alpha}_1) - 1 = 0$ будет находиться $\beta_2^* = 0$. В момент времени $t(\bar{\alpha}_2) = 5$ метка на экране будет находиться в позиции $d(\bar{\alpha}_2) = 1$. Верно.

3.3. $n = 2$. $\bar{\alpha}_2 = \alpha_1\alpha_2 = ssfssf$, $t(\bar{\alpha}_2) = 6$, $d(\bar{\alpha}_2) = 2$.

Подадим на вход последовательность 220000. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 15г.

В момент времени $t(\bar{\alpha}_1) = 3$ в позиции $d(\bar{\alpha}_1) - 1 = 0$ будет находиться $\beta_2^* = 0$. В момент времени $t(\bar{\alpha}_2) = 6$ метка на экране будет находиться в позиции $d(\bar{\alpha}_2) = 2$. Верно.

Отметим, что в конце реализации слов движения вперёд, назад и остановки на экране находится метка 1.

Индуктивный переход. Пусть при $n = k - 1$ утверждение выполнено.

То есть в момент времени $t(\bar{\alpha}_{k-2})$ в позиции $d(\bar{\alpha}_{k-2}) - 1$ будет находиться символ β_{k-1}^* . А в момент времени $t(\bar{\alpha}_{k-1})$ метка будет находиться в позиции $d(\bar{\alpha}_{k-1})$.

Докажем, что при $n = k$ утверждение также выполняется.

1) Покажем, что в момент времени $t(\bar{\alpha}_{k-1})$ в позиции $d(\bar{\alpha}_{k-1}) - 1$ будет находиться символ β_k^* .

Сигнал (0 или 3) до встречи с меткой движется со скоростью 1 — это следует из рассматриваемой функции переходов. То есть, зная положение какого-то определённого сигнала в какой-то момент времени, можно однозначно определить, где он был несколько тактов назад, или где будет несколько тактов вперёд.

$\begin{matrix} * & 3 & 0 & 1 & * & * & * \\ * & * & 3 & 2 & 0 & * & * \\ * & * & * & 1 & 3 & 0 & * \end{matrix}$	$\begin{matrix} * & 3 & 3 & 1 & * & * \\ * & * & 1 & 0 & 0 & * \end{matrix}$	$\begin{matrix} * & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ * & * & 0 & 2 & 0 & * & * & * \\ * & * & * & 2 & 3 & 0 & * & * \\ * & * & * & * & 1 & 3 & 0 & * \end{matrix}$
а	б	в

Рис. 17.

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) = t(\overline{\alpha_k}) - 2$ в позиции $d(\overline{\alpha_k}) = d(\overline{\alpha_{k-1}})$ находится метка 1, в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1 = d(\overline{\alpha_k}) - 1$ находится символ $\beta_k^* = 0$.

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1 = t(\overline{\alpha_k}) - 1$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_k})$ будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_k})) = \varphi(\beta_k^*, 1, a) = \varphi(0, 1, a) = 2, \text{ где } a \in Q \setminus L.$$

В момент времени $t(\overline{\alpha_k})$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_k})$ будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_k})) = \varphi(3, 2, 0) = 1.$$

2. $\alpha_k = b$. В этом случае выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} I_{BC}(\overline{\alpha_k}) &= I_{BC}(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\ I_{FW}(\overline{\alpha_k}) &= I_{FW}(\overline{\alpha_{k-1}}), \\ I_{ST}(\overline{\alpha_k}) &= I_{ST}(\overline{\alpha_{k-1}}), \\ t(\overline{\alpha_k}) &= t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\ d(\overline{\alpha_k}) &= d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1. \end{aligned}$$

Согласно функции переходов получим картину, изображённую на рисунке 17б.

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) = t(\overline{\alpha_k}) - 1$ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) = d(\overline{\alpha_k}) + 1$ находится метка 1, в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1 = d(\overline{\alpha_k})$ находится символ $\beta_k^* = 3$.

В момент времени $t(\overline{\alpha_k})$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_k})$ будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_k})) = \varphi(\beta_k^*, 3, 1) = \varphi(3, 3, 1) = 1.$$

3. $\alpha_k = ssf$. В этом случае выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} I_{FW}(\overline{\alpha_k}) &= I_{FW}(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\ I_{BC}(\overline{\alpha_k}) &= I_{BC}(\overline{\alpha_{k-1}}), \\ I_{ST}(\overline{\alpha_k}) &= I_{ST}(\overline{\alpha_{k-1}}), \\ t(\overline{\alpha_k}) &= t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 3, \\ d(\overline{\alpha_k}) &= d(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1. \end{aligned}$$

Согласно функции переходов получим картину, изображённую на рисунке 17б.

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) = t(\overline{\alpha_k}) - 3$ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) = d(\overline{\alpha_k}) - 1$ находится метка 1, в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1 = d(\overline{\alpha_k}) - 2$ находится символ $\beta_k^* = 0$.

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1 = t(\overline{\alpha_k}) - 2$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) = d(\overline{\alpha_k}) - 1$ будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_k})) = \varphi(\beta_k^*, 1, a) = \varphi(0, 1, a) = 2, \text{ где } a \in Q \setminus L.$$

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 2 = t(\overline{\alpha_k}) - 1$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) = d(\overline{\alpha_k}) - 1$ будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_k})) = \varphi(0, 2, 0) = 2.$$

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 2 = t(\overline{\alpha_k}) - 1$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1 = d(\overline{\alpha_k})$ будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_k})) = \varphi(2, 0, a) = 3, \text{ где } a \in Q \setminus L.$$

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 3 = t(\overline{\alpha_k})$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1 = d(\overline{\alpha_k})$ будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_k})) = \varphi(2, 3, a) = 1, \text{ где } a \in Q \setminus L.$$

Мы доказали, что в момент времени $t(\overline{\alpha_k})$ метка 1 будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_k})$ для всех возможных вариантов движения. Значит, утверждение 2 леммы верно. □

Фактически в лемме 4 приведен автомат с 4 состояниями, который образует универсальный экран для множества законов движения S^3 . С другой стороны лемма 1 показывает, что трех состояний не достаточно для построения универсального экрана для S^3 . Тем самым мы доказали справедливость утверждения теоремы 3.

Список литературы

- [1] Кузнецова Е.В., “Число состояний универсального автомата бесконечного экрана, реализующего двунаправленное движение на луче”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **25:1** (2021), 127–148.
- [2] Титова Е.Е., “Конструирование изображений клеточными автоматами”, *Интеллектуальные системы*, **12:2** (2008), 105–121.

- [3] Титова Е.Е., “Линейное по времени конструирование изображений клеточными автоматами”, *Интеллектуальные системы*, **16**:2 (2012), 215–234.
- [4] Калачев Г.В., Титова Е.Е., “О мере множества законов движения точки, реализуемых клеточными автоматами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **22**:3 (2018), 105–125.
- [5] Гасанов Э.Э., “Клеточные автоматы с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:2 (2020), 119–132.
- [6] Гасанов Э.Э., “Клеточные автоматы с локаторами как модель устройств с беспроводной связью”, *Математические вопросы кибернетики*, **21** (2023), 5–51.
- [7] Васильев Д. И., Гасанов Э. Э., “Нижняя оценка сложности задачи поиска ближайшего соседа на прямой с помощью клеточного автомата с локаторами”, *Вестник МГУ. Серия 1. Математика и механика*, **5** (2023), 33–39.
- [8] Гасанов Э.Э., Хайбуллин Б.Ф., “Быстрые алгоритмы умножения и деления натуральных чисел с помощью клеточных автоматов с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **28**:3 (2024), 103–130.
- [9] Титова Е.Е., “Конструирование движущихся изображений клеточными автоматами”, *Интеллектуальные системы*, **18**:1 (2014), 153–180.

Classes of bidirectional motion on a beam implemented by 4-state automata

Kuznetsova E. V.

In [1] it is shown that there is a universal screen with 5 states for the class of all laws of motion with a forward speed of no more than $1/2$, while there is no universal screen with 4 states for this class of laws of motion. This paper presents 3 classes of bidirectional motion cocoons on a ray that can be implemented by a cellular automaton with 4 states.

Keywords: cellular automaton, number of states, infinite screen, bidirectional motion, image construction.

References

- [1] Kuznetsova E. V., “The number of states of a universal infinite screen automaton implementing bidirectional motion on a ray”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **25**:1 (2021), 127–148 (In Russian).

- [2] Titova E. E., “Image construction by cellular automata”, *Intelligent Systems*, **12**:2 (2008), 105–121 (In Russian).
- [3] Titova E. E., “Linear-time image construction by cellular automata”, *Intelligent Systems*, **16**:2 (2012), 215–234 (In Russian).
- [4] Kalachev G. V., Titova E. E., “On the measure of the set of laws of motion of a point realized by cellular automata”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **22**:3 (2018), 105–125 (In Russian).
- [5] Gasanov E. E., “Cellular automata with locators”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **24**:2 (2020), 119–132 (In Russian).
- [6] Gasanov E. E., “Cellular automata with locators as a model for wireless communication devices”, *Mathematical issues of cybernetics*, **21** (2023), 5–51 (In Russian).
- [7] Vasilev D. I., Gasanov E. E., “Lower bound for the complexity of the nearest neighbor problem on a line using a cellular automaton with locators”, *MSU Bulletin. Series 1. Mathematics and Mechanics*, **5** (2023), 33–39 (In Russian).
- [8] Gasanov E. E., Khaybullin B. F., “Fast algorithms for multiplication and division of natural numbers using cellular automata with locators”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **28**:3 (2024), 103–130 (In Russian).
- [9] Titova E. E., “Construction of moving images by cellular automata”, *Intelligent Systems*, **18**:1 (2014), 153–180 (In Russian).