О функциональной системе, полученной из алгебры множеств добавлением индикаторов мощности

Ю. С. Капустин[1]

В данной работе исследуются свойства функциональной системы C_n с носителем $2^{\mathbb{Z}}$, порождённой теоретико-множественными функциями и индикаторами мощности $\mathbf{card}_0(x) \ldots \mathbf{card}_n(x)$.

Ключевые слова: функциональная система, предполный класс, алгебра множеств, критерий полноты.

1. Введение

В работе [1] изучалась алгебраическая система с носителем $\mathbb{Z} \bigcup 2^{\mathbb{Z}}$, образованная отношениями и операциями, выразимыми с помощью логических связок, описателей и кванторов через отношение принадлежности. Было установлено, что любая кванторно определимая функция над множествами в этой системе может быть выражена через обычные теоретико-множественные функции и индикаторы мощности $\mathbf{card}_i(x)$, принимающие значение $\mathbb{Z}$, если множество x содержит ровно i элементов, и значение $\varnothing$ иначе.

Это привлекло внимание к изучению функциональной системы C_n с носителем $2^{\mathbb{Z}}$, порождённой теоретико-множественными функциями и индикаторами мощности $\mathbf{card}_0(x) \ldots \mathbf{card}_n(x)$.

Получен ряд важных свойств этой функциональной системы. Найдено число функций в системе, предложен алгоритм решения уравнений в системе. Интересно, что число функций от заданного числа переменных в C_n имеет существенно больший порядок роста, чем для функций конечнозначных логик P_2 и P_k, в связи с чем её изучение не сводится к изучению указанных функциональных систем.

2. Основные понятия

Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. В качестве универсума возьмём $2^{\mathbb{Z}}$ — множество его подмножеств.

[1] *Капустин Юрий Сергеевич* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: kapustin.iu@yandex.ru

Kapustin Iurii Sergeevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

На множестве $2^{\mathbb{Z}}$ естественным образом определены двухместные функции $a \bigcap b, a \bigcup b, a \backslash b$ и нульместная функция-константа $\mathbb{Z}$.

Запись $|x|$ обозначает число элементов в x.

Определим на этом множестве также счётное число функций $\mathbf{card}_k(a)$ (k — целый неотрицательный параметр) следующим образом:

$$\mathbf{card}_k(a) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ если } |a| = k \\ \varnothing, \text{ если } |a| \neq k. \end{cases}$$

Обозначим S_n — множество функций

$\{a \bigcap b, a \bigcup b, a \backslash b, \mathbb{Z}, \mathbf{card}_0(a), \ldots, \mathbf{card}_n(a)\}$, определённых на множестве $2^{\mathbb{Z}}$.

Обозначим через C_n функциональную систему с носителем $2^{\mathbb{Z}}$, порождённую функциями из S_n, то есть содержащую все функции, выразимые над S_n при помощи суперпозиции, и только их. Определение суперпозиции можно посмотреть в книге [3].

Обозначим S_C — множество функций $\{a \bigcap b, a \bigcup b, a \backslash b, \mathbb{Z}\}$. Функциональную систему с носителем $2^{\mathbb{Z}}$, порождённую функциями из S_C, обозначим через C. Как будет доказано далее, она изоморфна P_2.

Будем называть два терма равносильными, если они выражают одну и ту же функцию.

Через x^σ будем обозначать терм x, если σ — булева константа 1, и $(\mathbb{Z} \backslash x)$, если σ — булева константа 0. Обозначение $x_1^{\sigma_1} \ldots x_m^{\sigma_m}$ будет использоваться для терма $x_1^{\sigma_1} \bigcap \cdots \bigcap x_m^{\sigma_m}$.

Пусть рассматриваются функции из C_n от m переменных $x_1 \ldots x_m$, где n, m — фиксированные натуральные числа. Атомарным индикатором называется терм вида

$$\mathbf{card}_k(x_1^{\sigma_1} \ldots x_m^{\sigma_m})$$

для $0 \leq k \leq n$ или

$$\mathbb{Z} \backslash (\mathbf{card}_0(x_1^{\sigma_1} \ldots x_m^{\sigma_m}) \bigcup \cdots \bigcup \mathbf{card}_n(x_1^{\sigma_1} \ldots x_m^{\sigma_m})).$$

Для простоты будем обозначать $\mathbb{Z} \backslash (\mathbf{card}_0(x) \bigcup \cdots \bigcup \mathbf{card}_n(x))$ как $\mathbf{card}_{>n}(x)$. Значение этого выражения равно $\mathbb{Z}$, если множество x содержит более n элементов, и $\varnothing$ иначе.

Здесь и далее, когда упоминается функция $\mathbf{card}_l(x)$, где $l > n$, под ней подразумевается функция $\mathbf{card}_{>n}(x) \bigcap \mathbf{card}_{>n}(\mathbb{Z} \backslash x)$.

Например, если рассматриваются функции от переменных x_1, x_2 в C_2, терм

$$\mathbf{card}_1(x_1 \bigcap (\mathbb{Z} \backslash x_2))$$

— атомарный индикатор, а терм

$$\mathbf{card}_0(x_2)$$

— нет, так как не содержит переменной x_1.

Составным индикатором называется терм

$$\bigcap_{\sigma\in\{0,1\}^m} \mathbf{card}_{k_\sigma}(x_1^{\sigma_1}\dots x_m^{\sigma_m}),$$

где $\mathbf{card}_{k_\sigma}$ может означать $\mathbf{card}_0, \mathbf{card}_1, \dots, \mathbf{card}_n$ или $\mathbf{card}_{>n}$.

Например, если рассматриваются функции от переменной x_1 в C_2, терм

$$\mathbf{card}_1(x_1)\bigcap\mathbf{card}_2(\mathbb{Z}\backslash x_1)$$

— составной индикатор, а терм

$$\mathbf{card}_0(x_1)$$

— нет, так как не содержит атомарного индикатора для $\mathbb{Z}\backslash(x_1)$ (то есть для x_1^0).

Далее будет доказано, что если составной индикатор A_i не содержит $\mathbf{card}_{>n}$, то его значение — константа $\varnothing$ (поскольку объединение конечного число конечных множеств не может быть бесконечным множеством $\mathbb{Z}$).

Стандартной формой функции из C от переменных $x_1, \dots, x_m$ назовём терм вида $B_1\bigcup\dots\bigcup B_j$, где каждое B_i имеет вид $x_1^{\sigma_1}\dots x_m^{\sigma_m}$. Эта форма является аналогом ДНФ. Для функции-константы $\varnothing$ стандартной формой назовём терм $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$. В дальнейшем этот терм будет обозначаться как $\varnothing$.

Нормальной формой m-местной функции из C_n называется терм вида $\bigcup_i(A_i\bigcap D_i)$, где A_i — составной индикатор, в терме участвуют все возможные составные индикаторы от m переменных, D_i — терм, выраженный в C. Если все термы D_i являются стандартной формой, назовём такую нормальную форму стандартной нормальной формой.

Пример: Пусть рассматривается функция от одной переменной x в C_0. Тогда терм

$$(\mathbf{card}_0(x)\bigcap\mathbf{card}_0(\mathbb{Z}\backslash(x))\bigcap\mathbb{Z})\bigcup$$
$$(\mathbf{card}_0(x)\bigcap(\mathbb{Z}\backslash(\mathbf{card}_0(\mathbb{Z}\backslash(x))\bigcap x))\bigcup$$
$$((\mathbb{Z}\backslash(\mathbf{card}_0(x)))\bigcap(\mathbb{Z}\backslash(\mathbf{card}_0(\mathbb{Z}\backslash(x))\bigcap\mathbb{Z}))\bigcup$$
$$((\mathbb{Z}\backslash(\mathbf{card}_0(x)))\bigcap\mathbf{card}_0(\mathbb{Z}\backslash(x))\bigcap\varnothing)$$

является нормальной формой, а терм

$$(\mathbf{card}_0(x)\bigcap\mathbf{card}_0(\mathbb{Z}\backslash(x))\bigcap\mathbb{Z})\bigcup$$
$$(\mathbf{card}_0(x)\bigcap(\mathbb{Z}\backslash(\mathbf{card}_0(\mathbb{Z}\backslash(x))\bigcap x))\bigcup$$
$$((\mathbb{Z}\backslash(\mathbf{card}_0(x)))\bigcap(\mathbb{Z}\backslash(\mathbf{card}_0(\mathbb{Z}\backslash(x))\bigcap\mathbb{Z}))$$

— нет, так как содержит не все составные индикаторы.

3. Основные результаты

В данной статье доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. *Любую функцию из C_n можно выразить термом в стандартной нормальной форме.*

Теорема 2. *Две стандартные нормальные формы $\bigcup(A_i \bigcap D_i)$ и $\bigcup(A_i \bigcap D'_i)$ задают одну и ту же функцию тогда и только тогда, когда для каждого i (где индекс i параметризует всё множество составных индикаторов) верно одно из следующих утверждений:*

1) A_i не содержит $\mathbf{card}_{>n}$.

2) $D_i \equiv D'_i$

3) Все термы вида $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$, где присутствуют все x_m, которые содержатся в только одном из термов D_i и D'_i, присутствуют в D_i в атомарном индикаторе $\mathbf{card}_0(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})$.

Теорема 3. *Число функций от m переменных $x_1, ..., x_m$ в C_n равно $2^{(n+1)\cdot 2^m \cdot (n+2)^{2^m-1} - n\cdot 2^m \cdot (n+1)^{2^m-1}}$*

Пусть $O_1(x, y_1, \dots y_m), O_2(x, y_1, \dots y_m)$ — термы в C_n. Выражение $O_1(x, \overline{y}) = O_2(x, \overline{y})$ назовём уравнением относительно выбранной переменной x с параметрами $\overline{y}$. Пусть SP — некоторое множество предикатов. Будем говорить, что уравнение $O_1(x, \overline{y}) = O_2(x, \overline{y})$ имеет решение в множестве SP относительно переменной x, если предикат $O_1(x, \overline{y}) = O_2(x, \overline{y})$ выразим некоторой формулой над предикатами из SP. Эту формулу назовём решением уравнения $O_1(x, \overline{y}) = O_2(x, \overline{y})$ в множестве SP относительно переменной x.

Теорема 4. *Любое уравнение в C_n относительно переменной x с параметрами $x_1, \dots x_m$ имеет решение в множестве предикатов вида*

$$\mathbf{card}_{n_j}(x \bigcap F_j(x_1 \dots x_m)) = \mathbb{Z}$$

и

$$\mathbf{card}_{n_j}(F_j(x_1 \dots x_m) \backslash x) = \mathbb{Z},$$

где F_j — функция из C. При этом существует алгоритм, позволяющий найти это решение.

4. Число функций от m переменных в C_n

Чтобы определить число функций от m переменных, найдём стандартую форму, в которой выражается каждая функция из C, и нормальную форму, в которой выражается любая функция из C_n. Также найдём необходимое и достаточное условие, при котором две стандартные формы задают одну и ту же функцию.

Во-первых, заметим, что проскольку

$$a \backslash b = a \bigcap (\mathbb{Z} \backslash b),$$

функции системы C порождаются также системой функций

$\{a \bigcap b, a \bigcup b, \mathbb{Z} \backslash b, \mathbb{Z}\}$. Рассмотрим формулы алгебры логики над набором функций:

$a \& b$, $a|b$, $\neg b$, 1

Рассмотрим оператор $G(f)$, сопоставляющий по индукции формуле алгебры логики над набором функций $\{a\&b,\ a|b,\ \neg b,\ 1\}$ терм из C_n над системой операций $\{a \bigcap b, a \bigcup b, \mathbb{Z} \backslash b, \mathbb{Z}\}$. Определим его (и обратное отображение) по индукции по длине формулы:

$G(x_i) = x_i, G^{-1}(x_i) = x_i$, если x — переменная.

$G(1) = \mathbb{Z}, G^{-1}(\mathbb{Z}) = 1$.

Если a, b — формулы алгебры логики над $\{a\&b,\ a|b,\ \neg b,\ 1\}$, c, d — термы над $\{a \bigcap b, a \bigcup b, \mathbb{Z} \backslash b, \mathbb{Z}\}$, то

$G(a|b) = G(a) \bigcup G(b), G^{-1}(c \bigcup d) = G^{-1}(c)|G^{-1}(d)$,

$G(a\&b) = G(a) \bigcap G(b), G^{-1}(c \bigcap d) = G^{-1}(c)\&G^{-1}(d)$,

$G(\neg a) = \mathbb{Z} \backslash G(a), G^{-1}(\mathbb{Z} \backslash c) = \neg G^{-1}(c)$.

Лемма 1. *Отображение G множества функций алгебры логики на множество функций в системе C, корректно определено и обратное отображение также корректно определено. То есть если две формулы f_1 и f_2 задают одну и ту же функцию алгебры логики, то термы $G(f_1)$ и $G(f_2)$ задают одну и ту же функцию. И наоборот, если два терма g_1 и g_2 в C_n задают одну и ту же функцию, то термы $G_1^{(-1)}(g_1)$ и $G_1^{(-1)}(g_2)$ задают одну и ту же функцию алгебры логики.*

Доказательство леммы.

Рассмотрим произвольную формулу алгебры логики $f_1(x_1 \dots x_n)$ над $\{\&, |, 1, \neg\}$. Докажем индукцией по длине терма, что $e \in \mathbb{Z}$ принадлежит результату функции, выражаемой термом $G(f_1(x_1 \dots x_n))$ при тех и только тех значениях набора $x_1 \dots x_n$, при которых истинен результат формулы $f_1(y_1 \dots y_n)$, где $y_i = (e \in x_1)$.

База индукции — $(e \in x_i) \iff e \in (x_i)$ — очевидно выполняется.

Шаг индукции. Пусть a, b — два терма над $\{\bigcap, \bigcup, \backslash, \mathbb{Z}\}$. Тогда:

$e \in (a \bigcup b) \iff (e \in a)|(e \in b)$;

$e \in (a \bigcap b) \iff (e \in a)\&(e \in b)$;

$e \in \mathbb{Z} \iff 1$;

$e \in (\mathbb{Z} \backslash b) \iff \neg(e \in b)$ — эти утверждения также выполнены.

Следовательно, e принадлежит результату функции, выражаемой термом $G(f_1(x_1 \dots x_n))$ при тех и только тех значениях набора $x_1 \dots x_n$, при которых истинен результат формулы $f_1(y_1 \dots y_n)$, где $y_i = (e \in x_1)$. Перейдём к доказательству самой леммы.

$\rightarrow$) Допустим, что две формулы f_1 и f_2 задают одну и ту же функцию. Результат функции, задаваемой термом $G(f_1)$ по доказанному ранее равен множеству тех элементов $e \in \mathbb{Z}$, для которых истинно значение формулы $f_1(y_1 \dots y_n)$, при $y_i = (e \in x_1)$, что полностью определает эту функцию. Результат функции, задаваемой термом $G(f_2)$ равен множеству тех e из $\mathbb{Z}$, для которых истинно значение формулы $f_2(y_1 \dots y_n)$ при $y_i = (e \in x_1)$. Поскольку формулы f_1 и f_2 задают одну и ту же функцию, то множества e из $\mathbb{Z}$, для которых значения $f_2(y_1 \dots y_n)$ и $f_1(y_1 \dots y_n)$ истинны, совпадают. Следовательно, термы $G(f_1)$ и $G(f_2)$ задают одну и ту же функцию.

$\leftarrow$) Допустим, что два терма g_1 и g_2 в C_n задают одну и ту же функцию, e — элемент $\mathbb{Z}$. Для любого набора $(x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$ можно рассмотреть набор $(y_1, \dots, y_n) \in (2^{\mathbb{Z}})^n$:

$$y_i = \begin{cases} \{e\}, \text{если } x_1 = 1 \\ \varnothing, \text{если } x_1 = 0. \end{cases}$$

Тогда $G^{-1}(g_1(x_1 \dots x_n)) = e \in g_1(y_1 \dots y_n) = e \in g_2(y_1 \dots y_n) = G^{-2}(g_1(x_1 \dots x_n))$.

Отсюда из равенства функций, задаваемых термами g_1 и g_2 следует равенство значений функций, задаваемых формулами $G^{-1}(g_1)$ и $G^{-1}(g_2)$, на любом наборе $(x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$. Следовательно, эти функции равны, ч.т.д.

Следствие 1. *В системе C 2^{2^m} различных m-местных функций.*

В моей статье [1] при доказательстве леммы 4 из теорем было доказано следующее утверждение:

Лемма 2. *(О разложении) Для любого терма T от переменных $x_1, \dots x_m$ в C можно найти такой набор $N(T)$ термов вида $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$, что при любом значении набора переменных $x_1, \dots, x_m$ значения термов из $N(T)$ — непересекающиеся множества и значение их объединения равно значению T.*

1) Для любых $a_1, \dots a_m \in 2^m athbbZ$ и двух различных термов $T = x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$ и $T' = x_1^{\sigma'_1} \dots x_m^{\sigma'_m}$ значения этих двух термов - непересекающиеся множества.

Действительно, пусть, без ограничения общности, $\sigma'_i \neq \sigma_i$, $\sigma'_i = 1, \sigma_i = 0$. Тогда $T(a_1, \dots, a_n) = a_1^{\sigma_1} \dots a_m^{\sigma_m} \in \mathbb{Z} \backslash a_i$ $T'(a_1, \dots, a_n) = a_1^{\sigma'_1} \dots a_m^{\sigma'_m} \in a_i$. Так как a_i и $\mathbb{Z} \backslash a_i$ не пересекаются, $T'(a_1, \dots, a_n)$ и $T(a_1, \dots, a_n)$ не пересекаются.

2) Пусть T – терм в над S_C. К нему можно последовательно применить следующие преобразования:

– заменить все подтермы вида $a\backslash b$, где a, b - термы, $a \neq \mathbb{Z}$ на подтермы $a\bigcap(Z\backslash b)$.

– заменить все подтермы вида $Z\backslash(a\bigcup b)$ на $(Z\backslash a)\bigcap(Z\backslash b)$ и все подтермы вида $Z\backslash(a\bigcap b)$ на $(Z\backslash a)\bigcup(Z\backslash b)$. Повторять процедуру, пока не останется операций $Z\backslash$, внешних по отношению к $\bigcap, \bigcup$.

– заменить все подтермы вида $Z\bigcap(a\bigcup b)$ на $(Z\bigcup a)\bigcap(Z\bigcup b)$. Повторять процедуру, пока не останется операций $\bigcap$, внешних по отношению к $\bigcup$. Получим терм вида $B_1\bigcup B_n$ (или B_1), где B_i имеет вид пересечения термов $x_i^{sigma_{ij}}$ и $Z\backslash Z$.

– Если пересечение B_i содержит $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$, то он равносилен $\varnothing$ и его можно убрать из пересечения. Если при этом B_i единственный, то исходный терм тождественно равен пустому объединению.

– Если пересечение B_i не содержит $x_i^{\sigma_i}$, заменить его на

$(B_i\bigcap x_i)\bigcup(B_i\bigcap(\mathbb{Z}\backslash x_i))$.

В результате получим терм-объединение термов вида $x_1^{\sigma_1}\dots x_m^{\sigma_m}$. Значение его на любом наборе значений переменных равно объединению их значений. Лемма доказана.

Лемма доказана.

Теперь найдём такую форму, что для каждой функции в C_n, найдётся терм в этой форме.

Обозначение x^σ будет использоваться для терма:

x, если $\sigma = 1$;

$(\mathbb{Z}\backslash x$, если $\sigma = 0$.

Обозначение $x_1^{\sigma_1}\dots x_m^{\sigma_m}$ будет использоваться для терма

$$x_1^{\sigma_1}\bigcap x_2^{\sigma_2}\cdots\bigcap x_m^{\sigma_m}$$

.

Лемма 3. *Для каждой функции из C_n от переменных $x_1\dots x_m$, найдётся выражающий её терм над S_n, в котором операция* **card** *применяется только к термам вида $x_1^{\sigma_1}\dots x_m^{\sigma_m}$.*

Доказательство.

Допустим, некоторая функция выражается термом g в C_n. Покажем, что её можно выразить термом, в котором нет вложенных **card**.

Действительно, если в терм g входит терм $\mathbf{card}_l(g')$, то терм g задаёт ту же функцию, что и терм

$$(\mathbf{card}_l(g')\bigcap g|_{\mathbf{card}_l(g')=\mathbb{Z}})\bigcup(g|_{\mathbf{card}_l(g')=\varnothing}\backslash\mathbf{card}_l(g')),$$

где через
$$g|_{\mathbf{card}_l(g')=\mathbb{Z}}$$
обозначен терм, получающийся из g путём замены $\mathbf{card}_l(g')$ на $\mathbb{Z}$; константа $\varnothing$ выражается как $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$. Назовём замену этого типа заменой вынесения $\mathbf{card}_l(g')$. Эта замена не меняет выражаемую термом функцию, поскольку для тех значений переменных, для которых значение терма g равно $\mathbb{Z}$, значение обоих термов равно значению терма $g|_{\mathbf{card}_l(g')=\mathbb{Z}}$, а для тех значений переменных, для которых значение терма g равно $\varnothing$, значение обоих термов равно значению терма $g|_{\mathbf{card}_l(g')=\varnothing}$.

Пусть максимальная вложенность операций **card** в терме T равна k, $k>1$. Тогда если последовательно применить к терму T замену вынесения $\mathbf{card}_l(g')$ для каждого подтерма вида $\mathbf{card}_l(g')$, где g не содержит операций **card**, получим терм с максимальной вложенностью операций **card**, равной $k-1$. Повторяя эту процедуру, получим терм (обозначим его g''), в котором операция **card** будет применяться только к термам над S_C.

Например,
$$\mathbf{card}_0(x_1\bigcup(\mathbf{card}_1(x_2)))=(\mathbf{card}_1(x_2)\bigcap\mathbf{card}_0(x_1\bigcup\mathbb{Z}))\bigcup$$
$$(\mathbf{card}_0(x_1\bigcup\varnothing)\backslash\mathbf{card}_1(x_2)).$$

Пусть терм g'' содержит подтерм $\mathbf{card}_l(g''')$. По лемме о разложении, существует множество $N(g''')$ термов вида $x_1^{\sigma_1}\dots x_m^{\sigma_m}$, значения которых при любом значении переменных — непересекающиеся множества и в объединении дают значение g'''. Пусть $N(g''')$ содержит k термов g_j. Пусть $(l_{i1},\dots,l_{ik})$ — все возможные наборы целых неотрицательных чисел, сумма которых равна l.

Тогда терм $\mathbf{card}_l(g''')$ равносилен терму
$$\bigcap_i(\mathbf{card}_{l_{i1}}(g_1)\bigcup\cdots\bigcup\mathbf{card}_{l_{ik}}(g_k)).$$
Таким образом терм $\mathbf{card}_l(g''')$ равносилен терму, выразимому через термы $\mathbf{card}_{n_i}(g_i)$, где все g_i имеют вид $x_1^{\sigma_1}\dots x_m^{\sigma_m}$ и принадлежат $N(g''')$, а все n_i не больше l.

Например,
$$\mathbf{card}_2(x_2)=(\mathbf{card}_0(x_2\bigcap x_1)\bigcap\mathbf{card}_2(x_2\backslash x_1))\bigcup(\mathbf{card}_1(x_2\bigcap x_1)$$
$$\bigcap\mathbf{card}_1(x_2\backslash x_1))\bigcup(\mathbf{card}_2(x_2\bigcap x_1)\bigcap\mathbf{card}_0(x_2\backslash x_1)).$$

Таким образом каждую функцию в C_n можно выразить термом над S_n, в котором операция **card** применяется только к термам вида $x_1^{\sigma_1}\dots x_m^{\sigma_m}$. Лемма доказана.

Чтобы найти точное число функций в C_n от m переменных, найдём стандартную форму для таких термов.

Назовём терм $\mathbf{card}_k(x_1^{\sigma_1}\dots x_m^{\sigma_m})$ или $\mathbb{Z}\backslash(\mathbf{card}_0(x_1^{\sigma_1}\dots x_m^{\sigma_m})\bigcup\dots \bigcup\mathbf{card}_n(x_1^{\sigma_1}\dots x_m^{\sigma_m}))$ атомарным индикатором, если $x_1\dots x_m$ — все переменные. Для простоты будем обозначать $\mathbb{Z}\backslash(\mathbf{card}_0(x_1^{\sigma_1}\dots x_m^{\sigma_m})\bigcup\dots \bigcup\mathbf{card}_n(x_1^{\sigma_1}\dots x_m^{\sigma_m}))$ как $\mathbf{card}_{>n}(x_1^{\sigma_1}\dots x_m^{\sigma_m})$. Поскольку существует 2^m возможных значений для $\sigma_1\dots\sigma_m$ и $n+2$ различных операций $\mathbf{card_0},\dots,\mathbf{card_n},\mathbf{card_{>n}}$, всего существует $(n+2)\cdot(2^m)$ атомарных индикаторов от m данных переменных в C_n.

Составным индикатором назовём терм $\bigcap_{\sigma\in\{0,1\}^m}\mathbf{card}_{k_\sigma}(x_1^{\sigma_1}\dots x_m^{\sigma_m})$, в котором функцией $\bigcap$ соединены атомарные индикаторы для всех значений параметров $\sigma\in\{0,1\}^m$; $\{0,1\}^m$ — булев куб; $\mathbf{card}_{k_\sigma}$ может означать $\mathbf{card}_0,\dots,\mathbf{card}_n$ или $\mathbf{card}_{>n}$. При этом будем считать равными составные индикаторы,которые различаются лишь порядком множителей во внешней операции пересечения. Всего существует $(n+2)^{(2^m)}$ различных составных индикаторов, поскольку каждый индикатор определяется 2^m параметрами k_σ, каждый из которых может принимать одно из $n+2$ значений — либо число от 0 до n, либо "$>n$".

Также заметим, что атомарные и составные индикаторы могут принимать только значения $\mathbb{Z}$ или $\varnothing$.

Пусть составные индикаторы параметризуются индексом i. Нормальной формой функции из C_n называется терм вида $\bigcup_i(A_i\bigcap D_i)$, где A_i — составной индикатор, соответствующий параметру i, D_i — формула, выраженная в C, в терме используются все возможные составные индикаторы. Если все D_i выражены в стандартной форме, назовём такую нормальную форму стандартной нормальной формой.

Лемма 4. *Любую функцию из C_n можно выразить термом в нормальной форме.*

Доказательство. Для каждого набора значений переменных $x'_1\dots x'_m$ каждый из термов ${x'}_1^{\sigma_1}\dots {x'}_m^{\sigma_m}$ имеет одно значение — множество, имеющее определённое конечное или счётное число элементов $|{x'}_1^{\sigma_1}\dots {x'}_m^{\sigma_m}|$. Каждому набору значений переменных $x'_1\dots x'_m$ таким образом можно сопоставить ровно один составной индикатор $\bigcap_{\sigma\in\{0,1\}^m}\mathbf{card}_{|{x'}_1^{\sigma_1}\dots {x'}_m^{\sigma_m}|}(x_1^{\sigma_1}\dots x_m^{\sigma_m})$, значение которого на этом наборе равно $\mathbb{Z}$ (здесь $\mathbf{card}_{|{x'}_1^{\sigma_1}\dots {x'}_m^{\sigma_m}|}$ считается принимающим значение или до n или значение $>n$)). Значение остальных составных индикаторов на этом наборе равно $\varnothing$. Следовательно, два различных составных индикатора не могут принимать значение, не равное $\varnothing$, на одном наборе значений переменных.

Пример. Набору значений переменных $x_1' = \{1\}, x_2' = \{1,2\}$ в C_1 соответствует составной индикатор

$$\mathbf{card}_0(x_1 \bigcap (\mathbb{Z}\backslash x_2)) \bigcap \mathbf{card}_1(x_1 \bigcap x_2) \bigcap \mathbf{card}_{>1}((\mathbb{Z}\backslash x_1)$$

$$\bigcap (\mathbb{Z}\backslash x_2)) \bigcap \mathbf{card}_1((\mathbb{Z}\backslash x_1) \bigcap x_2)$$

Составной индикатор — пересечение атомарных индикаторов, которые (поскольку для них **card** — внешняя функция) могут принимать только значения $\mathbb{Z}$ или $\varnothing$. Если атомарный индикатор $\mathbf{card}_l(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})$ входит в составной индикатор I, то на наборе значений переменных $(x_1', \dots, x_m')$, на котором составной индикатор принимает значение $\mathbb{Z}$, атомарный индикатор принимает значение $\mathbb{Z}$.

Если же этот атомарный индикатор не входит в I, то в него входит другой индикатор $\mathbf{card}_{l_i}(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})$, $l_i \neq l$. Поскольку $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$ не может иметь различное число элементов при одном и том же значении $x_1 \dots x_m$, то на наборе значений переменных, на котором составной индикатор принимает значение $\mathbb{Z}$, атомарный индикатор значение $\varnothing$.

Следовательно, для каждого составного индикатора и каждого атомарного индикатора на всех наборах значений переменных, на которых составной индикатор принимает значение $\mathbb{Z}$, атомарный индикатор принимает одно и то же значение. Это значение — $\mathbb{Z}$, если атомарный индикатор входит в составной, и $\varnothing$ иначе.

Рассмотрим функцию $O(x_1, \dots, x_m)$. По предыдущей лемме без ограничения общности можно считать, что она выражена термом $O'(x_1, \dots, x_m)$, в котором под **card** находятся только термы $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$. То есть все вхождения **card** в этот терм — атомарные индикаторы. Для каждого составного индикатора A_i обозначим за D_i терм, который получается из $O'(x_1, \dots, x_m)$ путём замены содержащихся в A_i атомарных индикаторов на $\mathbb{Z}$, а не содержащихся — на $\varnothing$. В этом случае каждое D_i выражено только через функции из S_C, и $\bigcup (A_i \bigcap D_i)$ — нормальная форма. Покажем, что $\bigcup (A_i \bigcap D_i)$ — нормальная форма для O, то есть выражает O.

Действительно, рассмотрим набор значений N переменых $x_1, \dots, x_m$. Пусть A_k — тот единственный составной индикатор, который на данном наборе принимает значение $\mathbb{Z}$. Тогда значение $(A_i \bigcap D_i)(N)$ равно $\varnothing$ при i не равном k, а значение $\bigcup (A_k \bigcap D_k)$ равно $D_k(N)$. Из определения D_k, $D_k(N) = O(N)$. Следовательно, на любом наборе N $O(N) = \bigcup (A_i \bigcap D_i)(N)$. То есть нормальная форма $\bigcup (A_i \bigcap D_i)$ задаёт функцию O, ч.т.д.

Будем называть две нормальные формы $\bigcup(A_i \bigcap D_i)$ и $\bigcup(A_i \bigcap D'_i)$ равными, если термы D_i и D'_i выражают одну и ту же функцию для каждого i. В противном случае будем называть их различными. Стандартной нормальной формой назовём такую форму, где каждое D_i выражено в виде, аналогичном ДНФ, то есть в виде $\bigcup(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_1^{\sigma_n})$. Несложно убедиться, что для любой нормальной формы существует равная ей стандартная нормальная форма.

Заметим, что две различные нормальные формы могут задавать одну и ту же функцию. Например, в C_0

$$\bigcup_i (A_i \bigcup \varnothing)$$

,

$$(\mathbf{card}_0(x) \bigcap \mathbf{card}_{>0}(\mathbb{Z}\backslash x) \bigcap x) \bigcup (\bigcup_j (A_j \bigcup \varnothing))$$

и

$$(\mathbf{card}_0(x) \bigcap \mathbf{card}_0(\mathbb{Z}\backslash x) \bigcap \mathbb{Z}) \bigcup (\bigcup_k (A_k \bigcup \varnothing))$$

задают одну и ту же функцию. Но можно показать, что подобные пары форм — единственные различные формы, выражающие одну и ту же функцию.

Лемма 5. $\bigcup_{(\sigma_1 \ldots \sigma_m) \in \{0,1\}^m} (x_1^{\sigma_1} \ldots x_m^{\sigma_m}) = \mathbb{Z}$ *для любого значения переменных* $x_1 \ldots x_m$

Докажем индукцией по числу m переменных. Если $m = 1$, $(\mathbb{Z}\backslash x_1) \bigcup x_1 = \mathbb{Z}$ — утверждение леммы верно.

Если утверждение леммы верно для m, то для $m' = m + 1$
$\bigcup_{(\sigma_1 \ldots \sigma_{m'}) \in \{0,1\}^{m'}} (x_1^{\sigma_1} \ldots x_{m'}^{\sigma_{m'}}) = \mathbb{Z} =$
$((\bigcup_{(\sigma_1 \ldots \sigma_m) \in \{0,1\}^m} (x_1^{\sigma_1} \ldots x_m^{\sigma_m})) \bigcap (x_{m'})) \bigcup$
$((\bigcup_{(\sigma_1 \ldots \sigma_m) \in \{0,1\}^m} (x_1^{\sigma_1} \ldots x_m^{\sigma_m})) \bigcap (\mathbb{Z}\backslash x_{m'})) =$
$((\bigcup_{(\sigma_1 \ldots \sigma_m) \in \{0,1\}^m} (x_1^{\sigma_1} \ldots x_m^{\sigma_m})) \bigcap (x_{m'} \bigcup (\mathbb{Z}\backslash x_{m'})) =$
$= ((\bigcup_{(\sigma_1 \ldots \sigma_m) \in \{0,1\}^m} (x_1^{\sigma_1} \ldots x_m^{\sigma_m})) = \mathbb{Z}$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Если составной индикатор* A_i *не содержит* $\mathbf{card}_{>n}$, *то* $A_i \equiv \varnothing$

Доказательство. Поскольку по предыдущей лемме объединение конечного числа множеств $x_1^{\sigma_1} \ldots x_m^{\sigma_m}$ равно бесконечному множеству $\mathbb{Z}$. Следовательно, хотя бы одно из них — пусть это будет $x_1^{\sigma'_1} \ldots x_m^{\sigma'_m}$ бесконечно. Тогда соответствующий атомарный индикатор $\mathbf{card}_l(x_1^{\sigma'_1} \ldots x_m^{\sigma'_m})$ принимает значение $\varnothing$, и весь составной индикатор A_i принимает значение $\varnothing$.

Лемма 7. *Две стандартные нормальные формы* $\bigcup(A_i \bigcap D_i)$ *и* $\bigcup(A_i \bigcap D'_i)$ *задают одну и ту же функцию тогда и только тогда, когда для каждого* i *(где индекс* i *параметризует всё множество составных индикаторов) верно одно из следующих утверждений:*

1) A_i *не содержит* $\mathbf{card}_{>n}$.

2) $D_i \equiv D'_i$

3) Все термы вида $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$*, где присутствуют все* x_m*, которые содержатся в только одном из термов* D_i *и* D'_i*, присутствуют в* D_i *в атомарном индикаторе* $\mathbf{card}_0(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})$.

Доказательство. $\leftarrow$) Пусть две формы $\bigcup(A_i \bigcap D_i)$ и $\bigcup(A_i \bigcap D'_i)$ таковы, что для каждого i одно из утверждений (1) – (3) верно. Рассмотрим набор значений переменных N и соответствующий ему составной индикатор A_i, который принимает на нём значение $\mathbb{Z}$.

Для этого набора согласно предыдущей лемме не может выполняться 1).

Если для него выполняется 2), то, поскольку $D_i \equiv D'_i$, верно равенство $A_i(N) \bigcap D_i(N) = A_i(N) \bigcap D'_i(N)$.

Если для него выполняется 3), то $(A_i \bigcap D_i)(N) \equiv (A_i \bigcap D'_i)(N)$, поскольку обе части являются объединением одних и тех же непустых множеств и некоторого количества пустых.

Следовательно, $\bigcup(A_i \bigcap D_i)$ и $\bigcup(A_i \bigcap D'_i)$ принимают одно и то же значение на любом значении переменных N, и выражаемые этими термами функции совпадают.

$\rightarrow$) От противного. Пусть две стандартные нормальные формы $\bigcup(A_i \bigcap D_i)$ и $\bigcup(A_i \bigcap D'_i)$ задают одну и ту же функцию. Пусть существует i, для которого A_i содержит $\mathbf{card}_{>n}$, и, без ограничения общности, в терме D_i содержится терм $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$, который не содержится в D'_i и присутствует в A_i в атомарном индикаторе $\mathbf{card}_k(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})$, где k не равно 0.

Пусть $x_1 \dots x_m$ — набор значений переменных, соответствующий A_i (то есть тот, на котором $A_i = \mathbb{Z}$). Такой набор существует, поскольку можно найти 2^m непересекающихся множеств с заданным числом элементов у каждого (хотя бы одно из которых бесконечно), объединение которых равно $\mathbf{Z}$. $(A_i \bigcap D_i)(N)$ содержит элемент из множества $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$, $(A_i \bigcap D'_i)(N)$ не содержит элемент из $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$. При этом никакие другие A_i не содержат элемент из $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$. Следовательно, $\bigcup(A_i \bigcap D_i)$ и $\bigcup(A_i \bigcap D'_i)$ задают разные функции. Лемма доказана.

С учётом этой леммы найдём число функций в C_n от m переменных.

Теорема 1. *Число функций от* m *переменных* $x_1, ..., x_m$ *в* C_n *равно* $2^{(n+1)\cdot 2^m \cdot (n+2)^{2^m-1} - n \cdot 2^m \cdot (n+1)^{2^m-1}}$

Доказательство.

Как было указано ранее, всего существует $(n+2)^{(2^m)}$ различных составных индикаторов.

Зафиксируем A_i и найдём количество функций типа $(A_i \bigcap D)$. Обозначим его $F(i)$. Если A_i не содержит $\mathbf{card}_{>n}$, то значение A_i всегда равно $\varnothing$, $(A_i \bigcap D)$ — константа $\varnothing$, $F(i) = 1$. Если A_i содержит $\mathbf{card}_{>n}$, и j — число $\mathbf{card}_0$ в A_i, то $F(i) = 2^{k-j}$ (поскольку наличие или отсутствие в D подтерма $x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m}$, для которого A_i имеет подтерм $\mathbf{card}_0(x_1^{\sigma_1} \dots x_m^{\sigma_m})$, не влияет на значение функции), и $k - j = log_2(F(i))$.

Количество же всех m-местных функций $N(n,m)$ равно $\Pi_i F(i) = 2^{\Sigma_i log_2(F(i))}$. (*)

Обозначим $l = n+2$ — число различных индексов для $\mathbf{card}$, включая $> n$.

Поскольку в составном индикаторе A_i при фиксированных j и k есть:

— C_k^j различных вариантов, где расположены j различных нулевых $\mathbf{card}$,

— $(l-1)^{k-j}$ варианта для значения ненулевых параметров $\mathbf{card}$,

— $(l-2)^{k-j}$ варианта для значения ненулевых параметров $\mathbf{card}$, в которых нет $\mathbf{card}_{>n}$,

— $(l-1)^{k-j} - (l-2)^{k-j}$ варианта для значения ненулевых параметров $\mathbf{card}$, среди которых есть хотя бы одно $\mathbf{card}_{>n}$,

получим:

$N(n,m) = 2^{\Sigma_i log_2(F(i))} = 2^{\Sigma_{j=0}^k C_k^j \cdot ((l-1)^{k-j} - (l-2)^{k-j}) \cdot (k-j)} =$

$2^{\Sigma_{j=0}^k C_k^{k-j} \cdot ((l-1)^{k-j} - (l-2)^{k-j}) \cdot (k-j)} = 2^{\Sigma_{j'=0}^k C_k^{j'} \cdot ((l-1)^{j'} - (l-2)^{j'}) \cdot (j')}$ (*)

Чтобы найти эту сумму, найдём значение суммы $\Sigma_{i=0}^n (C_n^i \cdot x^i \cdot i)$ для произвольного натурального i и вещественного x. Для этого воспользуемся фактом из математического анализа, что производная суммы дифференцируемых функций равна сумме их производных:

$\Sigma_{i=0}^n (C_n^i \cdot x^i \cdot i) = x \cdot \Sigma_{i=0}^n (C_n^i \cdot x^{i-1} \cdot i) = x \cdot \Sigma_{i=0}^n (C_n^i \cdot (x^i)'_x) = x \cdot (\Sigma_{i=0}^n C_n^i \cdot (x^i))'_x = x \cdot ((x+1)^n)'_x = x \cdot n \cdot (x+1)^{n-1}$ (**)

Таким образом, значение выражения (*) равно

$2^{(l-1)*k*l^{k-1} - (l-2)*k*(l-1)^{k-1}} = 2^{(n+1) \cdot 2^m \cdot (n+2)^{2^m - 1} - n \cdot 2^m \cdot (n+1)^{2^m - 1}}$

Теорема доказана.

5. Уравнения в C_n

Пусть $O_1(x, y_1, \dots y_m), O_2(x, y_1, \dots y_m)$ — термы в C_n. Выражение $O_1(x, \overline{y}) = O_2(x, \overline{y})$ назовём уравнением относительно выбранной переменной x с параметрами $\overline{y}$. Пусть SP — некоторое множество предикатов. Будем говорить, что уравнение $O_1(x, \overline{y}) = O_2(x, \overline{y})$ имеет решение в множестве SP относительно переменной x, если предикат $O_1(x, \overline{y}) = O_2(x, \overline{y})$

выразим некоторой формулой над предикатами из SP. Эту формулу назовём решением уравнения $O_1(x,\overline{y}) = O_2(x,\overline{y})$ в множестве SP относительно переменной x.

Теорема 2. *Любое уравнение в C_n относительно переменной x с параметрами $x_1, \dots x_m$ имеет решение в множестве предикатов вида*

$$\mathbf{card}_{n_j}(x \bigcap F_j(x_1 \dots x_m)) = \mathbb{Z}$$

и

$$\mathbf{card}_{n_j}(F_j(x_1 \dots x_m) \backslash x) = \mathbb{Z},$$

где F_j — функция из C. При этом существует алгоритм, позволяющий найти это решение.

Доказательство. Сначала докажем лемму

Лемма 8. *Существует алгоритм, с помощью которого любой терм $T(x, x_1, \dots, x_n)$ можно привести к стандартной форме (то есть найти терм в стандартной форме, выражающий ту же функцию).*

Один из возможных алгоритмов выглядит следующим образом:

1) Рассмотреть все составные индикаторы A_i от переменных $x, x_1, \dots, x_n$. Записать терм $\bigcup_i (A_i \bigcap T)$.

2) Преобразовать каждый терм $A_i \bigcap T_i$ следующим образом (терм T_i может меняться между шагами алгоритма):

— Пока в рассматриваемый терм T_i входит **card**:

—– Найти в нём вхождение вида $\mathbf{card}_k(T')$, где в T' не входит никакой другой **card** (то есть T' выражается над $\{\mathbb{Z} \backslash, \bigcap, \bigcup\}$)

—– Найти, объединением каких пересечений вида $x_1^{\sigma_1} \bigcap \dots \bigcap x_m^{\sigma_m}$ является T' (из изоморфизма C и P_2 это делается аналогично приведению формулы из P_2 к СКНФ), просуммировать по j индексы k_{ij} из входящих в A_i термов $\mathbf{card}_{k_{ij}}(a_i)$.

—– Если результат равен индексу k (или $> n$, если k — индекс "$> n$"), заменить в рассматриваемом терме $\mathbf{card}_k(T')$ на $\mathbb{Z}$. Иначе заменить его на $\varnothing$.

В результате получим равносильный T терм $\bigcup_i (A_i \bigcap T_i')$ в нормальной форме.

3) Аналогично алгоритму приведения функции алгебры логики к СКНФ, привести T_i к виду, аналогичному СКНФ.

В результате получится терм, равносильный T и имеющий стандартную нормальную форму, ч.т.д. Лемма доказана.

Как следует из леммы, без ограничения общности можно считать, что в выражении $O_1(x, x_1, \dots x_m) = O_2(x, x_1, \dots x_m)$ оба терма O_1 и O_2

записаны в стандартной форме. То есть достаточно решать уравнения вида $\bigcup(A_i \bigcap D_i) = \bigcup(A_i \bigcap D'_i)$.

Как было показано ранее, чтобы набор $x_1, \ldots, x_n$, на котором выполнено $A_j(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{Z}$, удовлетворял равенству $\bigcup(A_i \bigcap D_i) = \bigcup(A_i \bigcap D'_i)$, необходимо и достаточно, чтобы любой атомарный терм $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$, который входит в D_i, но не в D'_i, или наоборот, входил в A_i в виде $\mathbf{card}_0(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$. Рассмотрим B — множество всех A_i, для которых любой атомарный терм $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$, который входит в D_i, но не в D'_i, или наоборот, входит в A_i в виде $\mathbf{card}_0(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$.

Если на наборе $(x'_1, \ldots, x'_n)$ принимает значение $\mathbb{Z}$ такой A_i, то $\bigcup(A_j \bigcap D_j)(x'_1, \ldots, x'_n) = \varnothing \bigcup \varnothing \cdots \bigcup \varnothing \bigcup (A_i \bigcap D_i)(x'_1, \ldots, x'_n)) = D_i(x'_1, \ldots, x'_n) = D'_i(x'_1, \ldots, x'_n) = \bigcup(A'_j \bigcap D'_j)(x'_1, \ldots, x'_n)$.

Если же на наборе $(x'_1, \ldots, x'_n)$ принимает значение $\mathbb{Z}$ A_i, не удовлетворяющий этому свойству, то $\bigcup(A_j \bigcap D_j)(x'_1, \ldots, x'_n) = \varnothing \bigcup \varnothing \cdots \bigcup \varnothing \bigcup (A_i \bigcap D_i)(x'_1, \ldots, x'_n)) = D_i(x'_1, \ldots, x'_n) \neq D'_i(x'_1, \ldots, x'_n) = \bigcup(A'_j \bigcap D'_j)(x'_1, \ldots, x'_n)$.

Следовательно, равенство истинно на наборе $(x'_1, \ldots, x'_n)$ если и только если $(x'_1, \ldots, x'_n) \in A_i$ и $A_i \in B$. Решение равносильно формуле $\bigvee_{A_i \in B}(A_i = \mathbb{Z})$.

Заменив $\bigvee(\bigcap(I_{ij}) = \mathbb{Z})$ на $\bigvee(\&(I_{ij} = \mathbb{Z}))$, где I_{ij} — атомарные индинаторы, получим решение уравнения.

6. Заключение

В следующих статьях будут описаны свойства функциональной системы C_n, представлена шефферова функции в ней. Будет представлена серия предполных классов, позволяющая получить критерий относительной полноты.

Автор выражает благодарность профессору А.С. Подколзину за постановку задачи и помощь в работе.

Список литературы

[1] Капустин Ю. С., “Об элементарной выразимости в логике предикатов”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:2 (2019), 135–158.

[2] Яблонский С.В., *Введение в дискретную математику*, «Высшая школа», М, 2003, 384 с.

[3] Яблонский С.В, Грврилов Г.П., Кудрявцев В. Б., *Функции алгебры логики и классы Поста*, «Наука», М, 1966, 120 с.

On algebraic system created from set algebra by adding the set power indicator

Kapustin I.S.

This paper concerns the properties of the functional system C_n. This system has the domain $2^{\mathbb{Z}}$, and is generated by functions $2^{\mathbb{Z}} \setminus x, x \bigcup y, x \bigcap x$ and power indicators $\mathbf{card}_0(x) \dots \mathbf{card}_n(x)$.

Keywords: functional system, precomplete class, set algebra, completion criteria.

References

[1] Kapustin I. S., "On the elementary expressibility in predicate logic", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **23**:2 (2019), 135–158

[2] Yablonsky S.V., *Introduction to discrete mathematics*, «Vysshaya shkola», M, 2003, 384 c.

[3] Yablonsky S.V., Gavrilov G.P., Kudryavtsev V. B., *Functions of the Algebra of Logic and the Post Classes*, «Nauka», M, 1966, 120 c.