Изучение базисов предполных классов линейных 2-адических автоматов

М. Э. Калашников[1]

В настоящей работе проводится изучение предполных классов в классе линейных 2-адических автоматов. Решается задача исследования конечной порожденности предполных классов и поиск их базисов.

Ключевые слова: конечный автомат, p-адическое число, линейный 2-адический автомат, операции композиции, обратная связь, проблема полноты, базис.

Введение.

В настоящее время ведется активная работа по изучению свойств класса конечных автоматов и широкого многообразия его подклассов. Так, в работах [2], [3], [4] решается задача K-полноты для линейных автоматов над конечными полями.

Одним из важных подклассов в множестве конечных автоматов являются p-адические автоматы, изучение которых ведется с работы [5]. В этих работах для изучения автоматов исользовался аппарат p-адических чисел. В работе [1] была решена задача K-полноты для класса линейных 2-адических автоматов. Были описаны все предполные классы и показана алгоритмическая разрешимость задачи проверки полноты конечных множеств в этом классе.

В настоящей работе проводится дальнейшее изучение предполных классов в классе линейных 2-адических автоматов. Ставится задача исследования конечной порожденности предполных классов и нахождения их базисов.

1. Постановка задачи.

В данной работе изучаются линейные 2-адические автоматы, вычисляющие линейные функции на кольце целых 2-адических чисел $\mathbb{Z}_2$, коэффициенты которых лежат в подкольце $\mathbb{Z}_{(2)} = \mathbb{Z}_2 \cap \mathbb{Q}$.

[1] *Калашников Максим Эдуардович* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: maxkalash98@gmail.com.

Kalashnikov Maksim Eduardovich — postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Определение 1. *Конечный инициальный автомат из P с входным алфавитом E_2^n и выходным алфавитом E_2 называется линейным 2-адическим автоматом, если для определяемого им отображения $f(x_1, \ldots, x_n)$ найдутся такие числа $r_0, r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}_{(2)}$, что для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из $\mathbb{Z}$ выполнено:*

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} r_i \alpha_i + r_0$$

В этом случае мы говорим, что для функции f имеется разложение:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i + r_0 \tag{1}$$

Всюду в работе будут использоваться следующие обозначения и соглашения. Запись Fb_x обозначает операцию применения обратной связи к переменной x. Запись $\lceil x \rceil$ обозначает наименьшее целое число, не меньшее x. Последовательность $P = \{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ содержит все простые числа кроме 2. Мы говорим, что дробь делится на число p, если её числитель делится на p, а знаменатель не делится. В обозначениях равенства 1 положим $U(f) = \{r_i \mid i = 1, 2, ..., n\}$. Пусть A - произвольное числовое множество, тогда введем обозначения:

$$kA = \{ka \mid a \in A\}\,; \quad k + A = \{k + a \mid a \in A\}\,; \quad \frac{A}{k} = \left\{ \frac{a}{k} \;\middle|\; a \in A \right\}.$$

Также, всюду в работе будет использоваться следующая лемма, доказанная в [1]:

Лемма 1. *Пусть для функций f и f' выполнено:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i + r_0,$$

$$f'(x_{n+1}, \ldots, x_{n+n'}) = \sum_{i=n+1}^{n+n'} r_i x_i + r'_0.$$

Через f_1, f_2, f_3 обозначим функции, получаемые, соответственно, отождествлением переменных x_{n-1} и x_n функции f, переименованием переменных функции f с $x_1, \ldots, x_n$ на $x'_1, \ldots, x'_n$, подстановкой функции f вместо переменной $x_{n+n'}$ функции f'. Если к переменной x_n функции f применима обратная связь, то через f_4 обозначим результат применения обратной связи к этой переменной. Тогда выполнены следующие *равенства:*

$$f_1(x_1,\dots,x_n n-1)=\sum_{i=1}^{n-2} r_i x_i+(r_{n-1}+r_n)x_{n-1}+r_0,$$

$$f_2(x'_1,\dots,x'_n)=\sum_{i=1}^{n} r_i x'_i+r_0,$$

$$f_3(x_1,\dots,x_{n+n'-1})=\sum_{i=n+1}^{n+n'-1} r_i x_i+\sum_{i=1}^{n} r_i r_{n+n'} x_i+r'_0+r_{n+n'}r_0,$$

$$f_4(x_1,\dots,x_{n-1})=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{r_i}{1-r_n}x_i+\frac{r_0}{1-r_n}.$$

Определим некоторые важные замкнутые классы в L_2:

Определение 2.

$$T_0=\{f\in L_2 \mid \forall x_1,..,x_n\in 2\mathbb{Z}: f(x_1,\dots,x_n)\in 2\mathbb{Z}_{(2)}\}.$$

$$T_1=\{f\in L_2 \mid \forall x_1,..,x_n\in 1+2\mathbb{Z}: f(x_1,\dots,x_n)\in 1+2\mathbb{Z}_{(2)}\}.$$

$$V_1=\{f\in L_2 \mid f \textit{ имеет не более одной непосредственной переменной }\}.$$

$$V_o=\{f\in L_2 \mid f \textit{ имеет нечетное число непосредственных переменных }\}.$$

$$I=\{f\in L_2 \mid f=\sum_{i=1}^{n} r_i x_i+r_0 \implies \sum_{i=1}^{n}|r_i|\le 1\}.$$

$$\begin{aligned}R_c(p_i)=\{f\in L_2 \mid f &\textit{ имеет не одну существенную переменную,}\\ &\forall\frac{u}{v}\in U(f):(u,p_i)=p_i\}\cup\\ \{f\in L_2 \mid f &\textit{ имеет одну существенную переменную,}\\ &\forall\frac{u}{v}\in U(f)\setminus\{0\}:(v,p_i)=1\},\quad p_i\in P.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_d(p_i)=\{f\in L_2 \mid f &\textit{ имеет не одну непосредственную переменную,}\\ &\forall\frac{u}{v}\in U(f):(u,p_i)=p_i\}\cup\\ \{f\in L_2 \mid f &\textit{ имеет одну непосредственную переменную, } \forall\frac{u}{v}\in U(f)\cap 2\mathbb{Z}_{(2)}:\\ &(u,p_i)=p_i,\ \forall\frac{u}{v}\in U(f)\cap 1+2\mathbb{Z}_{(2)}:(v,p_i)=1\},\quad p_i\in P.\end{aligned}$$

В работе А.А. Часовских [1] была доказана следующая

Теорема 1. *Перечисленные замкнутые классы образуют критериальную систему предполных классов в* L_2

Теперь мы готовы сформулировать задачу, решаемую в данной работе:

Задача. *Для каждого предполного класса в* L_2 *требуется выяснить, является ли он конечно-порожденным, найти его базис или доказать, что его не существует.*

2. Базисы в предполных классах.

2.1. Класс T_0.

Утверждение 1.

$$f \in T_0 \iff \exists r_1, .., r_n \in \mathbb{Z}_{(2)}, \exists r_0 \in 2\mathbb{Z}_{(2)} : \forall x_1, .., x_n :$$
$$f(x_1, .., x_n) = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i + r_0.$$

Доказательство. Необходимость. Известно, что функция f лежит в L_2. Для неё справедливо разложение $f = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i + r_0$ для некоторых $r_0, r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}_{(2)}$. Подставляя в функцию $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in 2\mathbb{Z}_{(2)}$, получим, что $\sum_{i=1}^{n} r_i \alpha_i + r_0$ должно лежать в $2\mathbb{Z}_{(2)}$. Но $\sum_{i=1}^{n} r_i \alpha_i \in 2\mathbb{Z}_{(2)}$. Следовательно, r_0 должно лежать в $2\mathbb{Z}_{(2)}$.

Необходимость доказана.

Достаточность легко проверить подстановкой $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in 2\mathbb{Z}_{(2)}$ в приведённое разложение. □

Теорема 2. *Множество* $M = \{x_1 + x_2,\ 2\}$ *является базисом в* T_0.

Доказательство. Для начала получим инвертор $-x$:

$$x_1 + x_2 \in M \implies x_1 + x_2 + x_3 \in K(M) \implies x_1 + 2x_2 \in K(M)$$
$$\overset{\mathrm{Fb}_{x_2}}{\Longrightarrow} \quad \frac{x_1}{1-2} = -x_1 \in K(M).$$

Используя сумматор и инвертор можем получить

$$kx \in K(M) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Далее, имеем:

$$\forall u \in \mathbb{Z}\ \forall v \in 1 + 2\mathbb{Z} \ \ ux_1 + (1-v)x_2 \in K(M)$$
$$\overset{\mathrm{Fb}_{x_2}}{\Longrightarrow} \quad \frac{ux_1}{1-(1-v)} = \frac{u}{v} x_1 \in K(M).$$

Таким образом, $\forall r \in \mathbb{Z}_{(2)} \;\; r = \frac{u}{v} : rx \in K(M)$.

В обозначениях утверждения 1 для произвольной функции $f \in T_0$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i + r'_0 x \in K(M) \implies \text{(подставляя константу 2 вместо переменной } x\text{)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i + r_0 \in K(M)$$

Таким образом показано, что $T_0 \subseteq K(M)$. T_0 – замкнутый класс и $M \subseteq T_0$, получаем $K(M) \subseteq T_0$ Следовательно, $T_0 = K(M)$. Учитывая, что $K(\{x_1 + x_2\})$ сохраняет нулевые последовательности, а $K(\{2\})$ содержит лишь функции без существенных переменных, получаем, что M является базисом в T_0. $\square$

2.2. Класс T_1.

Утверждение 2.

$$f \in T_1 \iff \textit{либо } f = \sum_{i=1}^{2n} r_i x_i + \sum_{i=1}^{n'} r'_i x'_i + r_0 \qquad (2)$$

$$\textit{для } \exists r_0, r_1, \ldots, r_{2n+1} \in 1 + 2\mathbb{Z}_{(2)} \textit{ и } \exists r'_1, \ldots, r'_{n'} \in 2\mathbb{Z}_{(2)},$$

$$\textit{либо } f = \sum_{i=1}^{2n+1} r_i x_i + \sum_{i=1}^{n'} r'_i x'_i + r'_0 \qquad (3)$$

$$\textit{для } \exists r_1, \ldots, r_{2n+1} \in 1 + 2\mathbb{Z}_{(2)} \textit{ и } \exists r'_0, r'_1, \ldots, r'_n \in 2\mathbb{Z}_{(2)}.$$

Доказательство. Необходимость. Известно, что функция f лежит в L_2. Для неё справедливо разложение $f = \sum_{i=1}^{m} \tilde{r}_i \tilde{x}_i + r_0$ для некоторых $r_0, \tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_n \in \mathbb{Z}_{(2)}$. Подставляя в функцию $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in 1 + 2\mathbb{Z}_{(2)}$, получим, что сумма $\sum_{i=1}^{m} r_i \alpha_i + r_0$ должна лежать в $1 + 2\mathbb{Z}_{(2)}$. Слагаемые с коэффициентами из $2\mathbb{Z}_{(2)}$ не влияют на принадлежность всей суммы $1+2\mathbb{Z}_{(2)}$. Обозначим их количество через n' и вычтем из суммы. Переобозначив оставшиеся коэффициенты через $\hat{r}_j$, получим, что $\sum_{i=1}^{m'} \hat{r}_i \alpha_i + r_0$ должно лежать в $1 + 2\mathbb{Z}_{(2)}$. Рассмотрим два случая:

Случай 1 : $r_0 \in 1+2\mathbb{Z}_{(2)}$. Тогда, для нечетности всей суммы, m' должно быть четным, то есть верно разложение (2)

Случай 2 : $r_0 \in 2\mathbb{Z}_{(2)}$. Тогда, для нечетности всей суммы, m' должно быть нечетным, то есть верно разложение (3)

Необходимость доказана.

Достаточность легко проверить подстановкой $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in 1 + 2\mathbb{Z}$ в приведённые разложения. $\square$

Теорема 3. *В классе* T_1 *существует базис* $\{x_1 + x_2 + x_3,\ 1\}$.

Доказательство. Верна следующая цепочка рассуждений:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \in T_1 \implies x_1 + 2x_2 \in K(M) &\overset{\mathrm{Fb}_{x_2}}{\implies} -x \in K(M) \\ \implies (1+2k)x_1 - 2lx_2 &\in K(M) \quad \forall k, l \in \mathbb{Z} \\ \overset{\mathrm{Fb}_{x_2}}{\implies} \forall r \in 1 + 2\mathbb{Z}_{(2)}, r &= \frac{2k+1}{2l+1} : rx \in K(M). \end{aligned}$$

С помощью сумматора, умножения на $r \in 1 + 2\mathbb{Z}_{(2)}$ и подстановки 1 можем получить произвольную функцию вида $\sum_{i=1}^{m_1} r_i x_i + \sum_{i=1}^{m_2} r_i'$ с нечетным числом $(m_1 + m_2)$ слагаемых, коэффициенты и свободные члены которой лежат в $1 + 2\mathbb{Z}_{(2)}$.

В обозначениях утверждения 2 для произвольной функции $f \in T_1$ имеется два случая:

$$\text{Функция имеет вид (2)} \implies f = \sum_{i=1}^{2n} r_i x_i + \sum_{i=1}^{n'} r_i' x_i' + r_0 =$$
$$= \sum_{i=1}^{2n} r_i x_i + \sum_{i=1}^{n'} (2r_i' - 1)x_i' + \sum_{i=1}^{n'} (1 - r_i')x_i' + r_0.$$

$$\text{Функция имеет вид (3)} \implies f = \sum_{i=1}^{2n+1} r_i x_i + \sum_{i=1}^{n'} r_i' x_i' + r_0' =$$
$$= \sum_{i=1}^{2n+1} r_i x_i + \sum_{i=1}^{n'} (2r_i' - 1)x_i' + \sum_{i=1}^{n'} (1 - r_i')x_i' + (2r_0 - 1) + (1 - r_0).$$

Вспоминая, что $r_i \in 1 + 2\mathbb{Z}_{(2)}$ и $r_i' \in 2\mathbb{Z}_{(2)}$, можем видеть, что в обоих случаях функция f представляется в виде суммы нечетного числа слагаемых с коэффициентами и свободными членами из $1 + 2\mathbb{Z}_{(2)}$, следовательно $T_1 \subseteq K(M)$. T_1 – замкнутый класс и $M \subseteq T_1$, получаем $K(M) \subseteq T_1$. Следовательно, $T_1 = K(M)$. Учитывая, что $K(\{x_1 + x_2 + x_3\})$ сохраняет нулевые последовательности, а $K(\{1\})$ содержит лишь функции без существенных переменных, получаем, что M является базисом в T_0. $\square$

2.3. Класс V_1.

Утверждение 3.

$$f \in V_1 \iff f = rx + \sum_{i=1}^{n} 2r_i x_i + r_0 \text{ \textit{для} } \exists r, r_0, r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}_{(2)}$$

Доказательство. Необходимость. Известно, что функция f лежит в L_2. Для неё справедливо разложение $f = \sum_{i=1}^{m} \tilde{r}_i \tilde{x}_i + r_0$ для некоторых $r_0, \tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_n \in \mathbb{Z}_{(2)}$. Известно, что у неё не более одной непосредственной переменной. Обозначим эту переменную через x. Тогда коэффициенты при остальных переменных должны делиться на 2. Что и требовалось. Необходимость доказана.

Достаточность же очевидна из приведеного разложения. □

Теорема 4. *Класс V_1 имеет базис $\{x_1 + 2x_2,\ 0,\ x + 1\}$.*

Доказательство. Верна следующая цепочка рассуждений:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 \in M &\overset{\mathrm{Fb}_{x_2}}{\Longrightarrow} -x \in K(M);\\
x_1 + 2x_2 \in M &\Longrightarrow x_1 + 2kx_1 = (2k+1)x_1 \in K(M);\\
(2k+1)x_1 - 2lx_2 \in K(M) &\overset{\mathrm{Fb}_{x_2}}{\Longrightarrow} \frac{2k+1}{2l+1}x \in K(M) \Longrightarrow\\
&\Longrightarrow rx \in K(M),\ \forall r \in 1 + 2\mathbb{Z}_{(2)};\\
0 \in M, x_1 + 2x_2 \in M &\Longrightarrow 2x \in K(M);\\
rx \in K(M), 2x \in K(M) &\Longrightarrow \tilde{r}x \in K(M),\ \forall \tilde{r} \in \mathbb{Z}_{(2)};\\
x + 1, rx \in K(M),\ \forall r \in 1 + 2\mathbb{Z}_{(2)} &\Longrightarrow r(\frac{x}{r} + 1) = x + r \in K(M) \Longrightarrow\\
\Longrightarrow x + r + \cdots + r \in K(M) &\Longrightarrow x + \hat{r} \in K(M),\ \forall \hat{r} \in \mathbb{Z}_{(2)}.
\end{aligned}$$

В обозначениях утверждения 3 для произвольной функции $f \in V_1$ имеем:

$$rx + \sum_{i=1}^{n} 2r_i x_i + r_0 \in K(M)$$

Таким образом показано, что $V_1 \subseteq K(M)$. V_1 – замкнутый класс и $M \subseteq V_1$, значит $K(M) \subseteq V_1$ Следовательно, $V_1 = K(M)$. Учитывая, что $K(\{x_1 + 2x_2, 0\})$ сохраняет 0 в начальный момент времени, $K(\{x_1 + 2x_2, 1\})$ сохраняет 1 в начальный момент времени, $K(\{0, 1\})$ содержит лишь функции без существенных переменных, окончательно имеем, что M является базисом в V_1. □

2.4. Класс V_o.

Утверждение 4.

$$f \in V_o \iff f = \sum_{i=1}^{2n+1} r_i x_i + \sum_{i=1}^{n} 2r_i' x_i' + r_0$$
$$\text{для } \exists r_0, r_1', \ldots, r_n' \in \mathbb{Z}_{(2)} \text{ и } \exists r_1, \ldots, r_{2n+1} \in (1 + 2\mathbb{Z}_{(2)}) \setminus \{0\}.$$

Доказательство. Необходимость. Известно, что функция f лежит в L_2. Для неё справедливо разложение $f = \sum_{i=1}^{m} \tilde{r}_i \tilde{x}_i + r_0$ для некоторых $r_0, \tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_n \in \mathbb{Z}_{(2)}$. Известно, что у неё нечетное число непосредственных переменных. Обозначим их через x_i. Тогда коэффициенты при них должны быть нечетными. Остальные же переменные обозначим через x_j'; коэффициенты при них должны делиться на 2. Что и требовалось. Необходимость доказана.

Достаточность же очевидна из приведеного разложения. □

Теорема 5. *Класс V_o имеет базис $\{x_1 + x_2 + x_3,\ x + 1\}$.*

Доказательство. Положим $V_o^{(0)} = \{f \in V_o | r_0 = 0\}$ – множество однородных функций из V_o. Из утверждений 4 и 2 легко видеть, что $V_o^{(0)} \subset T_1$, поэтому, аналогично случаю T_1, с помощью функции $x_1 + x_2 + x_3$, можем получить произвольную функцию из $V_o^{(0)}$. Кроме того, с помощью функции $x + 1$, можем получить добавление произвольной константы из $\mathbb{Z}_{(2)}$:

$$\forall r \in 1 + 2\mathbb{Z}_{(2)} : r = \frac{2u+1}{2v+1},\quad u, v \in \mathbb{Z}_{(2)} : rx, \frac{1}{r}x \in K(M) \implies$$
$$\implies \forall r \in 1 + 2\mathbb{Z}_{(2)} : r(\frac{x}{r} + 1) = x + r \in K(M) \implies$$
$$\implies x + r + \cdots + r \in K(M) \implies \forall \hat{r} \in \mathbb{Z}_{(2)} :\ x + \hat{r} \in K(M)$$

Таким образом показано, что $V_o \subseteq K(M)$. V_o – замкнутый класс и $M \subseteq V_o$, получаем $K(M) \subseteq V_o$ Следовательно, $V_o = K(M)$. Учитывая, что $K(\{x_1 + x_2 + x_3\}) \subset T_1 \cap V_o$, а $K(\{x + 1\})$ содержит только функции с не более чем одной существенной переменной, получаем, что M является базисом в V_o. □

2.5. Класс I

Теорема 6. *Класс I имеет базис $\{\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3,\ -x,\ x + 1,\ 0\}$.*

Доказательство. Для начала получим все однородные функции из I. Возьмем произвольное нечетное натуральное число V и положим $T = \lceil \log_3 V \rceil$.

$$\sum_{i=1}^{3^T} \frac{x_i}{3^T} \in K(M) \implies \sum_{i=1}^{V} \frac{x_i}{3^T} + \frac{3^T - V}{3^T} x_{V+1} \in K(M)$$

$$\overset{\mathrm{Fb}_{x_V}}{\Longrightarrow} \text{ (} 3^T - V \text{ - четное число) } \frac{1}{1 - \frac{3^T - V}{3^T}} \sum_{i=1}^{V} \frac{x_i}{3^T} = \sum_{i=1}^{V} \frac{\frac{x_i}{3^T}}{\frac{V}{3^T}} = \sum_{i=1}^{V} \frac{x_i}{V} \in K(M).$$

Пусть $f = \frac{u_1}{v_1}x_1 + \cdots + \frac{u_n}{v_n}x_n$ - произвольная однородная функция из I. $\sum_{i=1}^{n} \frac{|u_i|}{|v_i|} \leq 1$. Положим $V = v_1 \cdot ... \cdot v_n \implies f_0 = \sum_{i=1}^{V} \frac{x_i}{V} \in K(M)$. Без ограничения общности (так как $-x \in M$) можно считать, что $u_i > 0,\ v_i > 0$, тогда:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{v_i} \leq 1 \implies \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{v_i} V \leq V$$

Далее, мы можем разбить слагаемые f_0 на группы, соответствующие переменным функции f, подставив вместо ненужных переменных $0 \in M$. Затем отождествить переменные внутри каждой из групп:

$$f_0 = \sum_{i=1}^{V} \frac{x_i}{V} \in K(M) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\frac{u_1}{v_1}V} \frac{x_1}{V} + \cdots + \sum_{i=1}^{\frac{u_n}{v_n}V} \frac{x_n}{V} = \frac{u_1}{v_1}x_1 + \cdots + \frac{u_n}{v_n}x_n = f \in K(M)$$

Осталось получить функцию, осуществляющую добавление произвольного свободного члена. Для этого достаточно показать, что для произвольного нечетного натурального v выполняется $x + \frac{1}{v} \in K(M)$. Рассмотрим три возможных случая:

Случай 1 : $(v,3)=1$

$$\text{Положим } T=\lceil \log_3 V\rceil; \qquad \sum_{i=1}^{3^T}\frac{x_i}{3^T}+1\in K(M) \implies$$

$$\implies \sum_{i=1}^{v}\frac{x_i}{3^T}+\frac{3^T-v}{3^T}x_{v+1}+1\in K(M) \overset{\mathrm{Fb}_{x_{v+1}}}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{\mathrm{Fb}_{x_{v+1}}}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{v}\frac{\frac{x_i}{3^T}}{\frac{v}{3^T}}+\frac{3^T}{v}=x+\frac{3^T}{v}\in K(M).$$

$$(v,3^T)=1 \implies \exists a\in\mathbb{Z},\ \exists b\in\mathbb{N}: av+b3^T=1 \implies a+b\frac{3^T}{v}=\frac{1}{v}$$

$\implies$ Добавляя или вычитая a раз единицу и добавляя b раз $\dfrac{3^T}{v}$,

получим окончательно: $x+\dfrac{1}{v}\in K(M)$.

Случай 2 : $v=3^T$

$$\text{Положим } p \text{ - некоторое простое число, } p>3^T;\ \sum_{i=1}^{p}\frac{x_i}{p}+1\in K(M) \implies$$

$$\implies \sum_{i=1}^{3^T}\frac{x_i}{p}+\frac{p-3^T}{p}x_{3^T+1}+1\in K(M) \overset{\mathrm{Fb}_{x_{3^T+1}}}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{\mathrm{Fb}_{x_{3^T+1}}}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{3^T}\frac{\frac{x_i}{p}}{\frac{3^T}{p}}+\frac{p}{3^T}=x+\frac{p}{3^T}\in K(M)$$

$$(3^T,p)=1 \implies \exists a\in\mathbb{Z},\ \exists b\in\mathbb{N}: a3^T+bp=1 \implies a+b\frac{p}{3^T}=\frac{1}{3^T}$$

$\implies$ Добавляя или вычитая a раз единицу и добавляя b раз $\dfrac{p}{3^T}$,

получим окончательно: $x+\dfrac{1}{3^T}\in K(M)$.

Случай 3 : $v=3^Tv',(v',3)=1$

$$(3^T,v')=1 \implies \exists a\in\mathbb{Z},\ \exists b\in\mathbb{N}: a3^T+bv'=1 \implies \frac{a}{v'}+\frac{b}{3^T}=\frac{1}{3^Tv'}$$

$\implies$ Добавляя или вычитая a раз $\dfrac{1}{v'}$ и добавляя b раз $\dfrac{1}{3^T}$,

получим окончательно: $x+\dfrac{1}{v}\in K(M)$.

Таким образом показано, что $I \subseteq K(M)$. I – замкнутый класс и $M \subseteq I$, получаем $K(M) \subseteq I$. Следовательно, $I = K(M)$. Покажем, что M – базис. Для этого проверим подножества M.

$K(\{-x,\ x+1,\ 0\})$ содержит только функции не более чем с одной существенной переменной.

$K(\{\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3,\ x+1,\ 0\})$ содержит только функции из I с положительными коэффициентами в разложении (1). Доказательство можно провести индукцией по построению: для отождествления, переименования и подстановки переменных утверждение очевидно, а при применении обратной связи все коэффициенты будут умножены на множитель $\frac{1}{1-r}$, который является положительным так как $0 < r < 1$.

$K(\{\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3,\ -x,\ 0\})$ сохраняет нулевые последовательности.

$K(\{\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3,\ -x,\ x+1\})$ содержится в $V_o \cap I$.

Таким образом, доказано, что M является базисом в I. □

2.6. Класс $R_c(p_i)$.

Утверждение 5.

$$f \in R_c(p_i) \iff \textit{либо } f = rx + r_0 \tag{4}$$

$$\textit{для } \exists r_0 \in \mathbb{Z}_{(2)},\ \exists r \in \mathbb{Z}_{(2)} \setminus \left(\frac{\mathbb{Z}_{(2)}}{p_i} \cup p_i\mathbb{Z}_{(2)}\right),$$

$$\textit{либо } f = \sum_{j=1}^{n} p_i r_j x_j + r_0 \tag{5}$$

$$\textit{для } \exists r_0 \in \mathbb{Z}_{(2)},\ \exists r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}_{(2)} \setminus \frac{\mathbb{Z}_{(2)}}{p_i}, n \geq 2.$$

Доказательство. Необходимость. Известно, что функция f лежит в L_2. Для неё справедливо разложение $f = \sum_{i=1}^{m} \tilde{r}_i\tilde{x}_i + r_0$ для некоторых $r_0, \tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_n \in \mathbb{Z}_{(2)}$. Если у нее только одна существенная переменная, обозначим её через x и знаменатель коэффициента при ней не должен делиться на p_i, следовательно справедливо либо разложение (4) при наличии нескольких непосредственных переменных, либо разложение (5), при наличии лишь одной непосредственной переменной. Если же существенных переменных несколько, все коэффициенты при них должны делиться на p_i, то есть верно разложение (5).

Достаточность же очевидна из вида приведенных разложений. □

Определение 3. *В обозначениях утверждения 5 введем два множества:*

$$R_1(p_i) = \{f \in R_c(p_i) \mid f \textit{ имеет вид } (4)\}$$

$$R_p(p_i) = \{f \in R_c(p_i) \mid f \textit{ имеет вид } (5)\}$$

Легко видеть, что верно следующее

Замечание. *$R_1(p_i)$ и $R_p(p_i)$ являются замкнутыми классами, причем:*

$$R_1(p_i) \cup R_p(p_i) = R_c(p_i); \quad R_1(p_i) \cap R_p(p_i) = \{f \in R_c(p_i) \mid f \equiv \mathrm{const}\}$$

Лемма 2. *Если для построения $f \in R_c(p_i)$ используется функция из $R_p(p_i)$, тогда $f \in R_p(p_i)$.*

Доказательство. Пусть $f \in R_p(p_i)$. Легко видеть, что операции суперпозиции и обратной связи не выводят за пределы класса $R_p(p_i)$. Рассмотрим функцию $g = rx + r_0 \in R_1(p_i)$. При подстановке g вместо одной из переменных f получим функцию из $R_p(p_i)$. При подстановке f вместо переменной x функции g тоже получим функцию из $R_p(p_i)$. Применяя индукцию по построению, получаем утверждение леммы. □

Лемма 3. *Пусть M – порождающее множество для $R_c(p_i)$. Тогда для всякого натурального n_0 : $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$:*
$\exists r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}_{(2)} \setminus \left(\frac{\mathbb{Z}_{(2)}}{p_i} \cup 2\mathbb{Z}_{(2)} \cup p_i\mathbb{Z}_{(2)}\right)$, $\exists f_0 \in R_p(p_i)$:

$$f = \sum_{j=1}^{n} p_i r_j x_j + f_0(x'_1, \ldots, x'_m) \in M.$$

Другими словами, в произвольном порождающем множестве найдется функция, у которой как минимум n переменых с коэффициентами, не делящимися на p_i^2 и 2.

Доказательство. Предположим обратное. Пусть существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n \geq n_0$ в M нет функции с обозначенными условиями. Тогда $px_1 + \cdots + px_{n_0} \notin K(M)$. Действительно, в $R_c(p_i)$ нет функций, которые бы позволи делить коэффициенты на 2 и на p_i. При этом, при подстановке одной функции из $M \cap R_p(p_i)$ в другую, в новой функции коэффициенты при добавленных переменных будут делится на p_i^2. Использование же функций из $M \cap R_1(p_i)$ не увеличит количество переменных в сумме. Таким образом, $px_1 + \cdots + px_{n_0} \notin K(M)$, но $px_1 + \cdots + px_{n_0} \in R_c(p_i)$. Получили противоречие. □

Таким образом, верно следующее

Следствие 1. *Класс $R_c(p_i)$ не имеет конечного порождающего множества.*

Теорема 7. *Класс $R_c(p_i)$ не имеет базиса.*

Доказательство. Для доказательства теоремы покажем, что для произвольного порождающего множества M найдется функция $f \in M$ такая, что $M \setminus \{f\}$ тоже является порождающим для $R_c(p_i)$. Возьмем произвольную функцию f_1, существование которой гарантируется леммой 3. Она имеет вид:

$$f_1 = \sum_{j=1}^{n} p_i s_j x_j + f_0(x'_1, \dots, x'_m)$$

Также по лемме 3 найдется функция f_2 для которой верно, что $k > m + n$:

$$f_2 = \sum_{j=1}^{k} p_i r_j x_j + \tilde{f}_0(x'_1, \dots, x'_m)$$

Подставив в функцию f_2 нули на место переменных $x'_1, \dots, x'_m$ получим функцию $\tilde{f}_2 = \sum_{j=1}^{k} p_i r_j x_j$. Учитывая, что $r_j \in \mathbb{Z}_{(2)} \setminus (\frac{\mathbb{Z}_{(2)}}{p_i} \cup 2\mathbb{Z}_{(2)} \cup$ $\cup p_i\mathbb{Z}_{(2)})$, имеем $\frac{x}{r_j} \in K(M)$. Кроме того, по лемме 2 для построения этих функций могут быть использованы только функции из $M \cap R_1(p_i)$. Таким образом, можем получить функции $f_+ = p_i x_1 + \dots + p_i x_k$ и $f_{p_i} = p_i x$. Также, из $M \cap R_1(p_i)$, так как M - порождающее множество, можем получить $f_{r_0} = x + r_0$ для $\forall r_0 \in \mathbb{Z}_{(2)}$.

Построим теперь функцию f_1. Так как $f_0 \in R_p(p_i)$:

$$f_1 = \sum_{j=1}^{n} p_i s_j x_j + \sum_{j=1}^{m} p_i s'_j x'_j + r_0, \quad s'_j \in \mathbb{Z}_{(2)} \setminus \frac{\mathbb{Z}_{(2)}}{p_i}$$

С помощью функций из $R_1(p_i)$ и f_{p_i} можем построить функции $s_j x$ и $s'_j x$. Подставив их в функцию f_+ и применив f_{r_0}, получим окончательно функцию f_1, причем для её построения использовались только f_2 и функции из $K(R_1(p_i) \cap M)$. Таким образом, $M \setminus \{f_1\}$ является порождающим для $R_c(p_i)$. $\square$

2.7. Класс $R_d(p_i)$.

Утверждение 6.

$$f \in R_c(p_i) \iff \textit{либо } f = rx + \sum_{j=1}^{n} 2p_i r_j x_j + r_0 \tag{6}$$

$$\textit{для } \exists r_0 \in \mathbb{Z}_{(2)},\ \exists r, r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}_{(2)} \setminus \frac{\mathbb{Z}_{(2)}}{p_i},\ (r, p_i) = 1,$$

$$\textit{либо } f = \sum_{j=1}^{n} p_i r_j x_j + r_0 \tag{7}$$

$$\textit{для } \exists r_0 \in \mathbb{Z}_{(2)},\ \exists r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}_{(2)} \setminus \frac{\mathbb{Z}_{(2)}}{p_i}.$$

Доказательство. Необходимость. Известно, что функция f лежит в L_2. Для неё справедливо разложение $f = \sum_{i=1}^m \tilde{r}_i\tilde{x}_i + r_0$ для некоторых $r_0, \tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_n \in \mathbb{Z}_{(2)}$. Если у нее только одна непосредственная переменная, обозначим её x и знаменатель коэффициента при ней не должен делиться на p_i, остальные же переменные должны делиться на $2p_i$, следовательно справедливо разложение (6). Если же непосредственных переменных несколько, все коэффициенты при них должны делиться на p_i, то есть верно разложение (7).

Достаточность же очевидна из приведеного разложения. □

Определение 4. *В обозначениях утверждения 6 введем два множества:*

$$R_2(p_i) = \{f \in R_f(p_i) \mid f \text{ имеет вид } (6)\}$$
$$R_p(p_i) = \{f \in R_f(p_i) \mid f \text{ имеет вид } (7)\}$$

Легко видеть, что верно следующее

Замечание. *$R_2(p_i)$ и $R_p(p_i)$ являются замкнутыми классами.*

Лемма 4. *Класс $R_d(p_i)$ имеет порождающее множество:*

$$\{p_ix_1 + .. + p_ix_n,\ -x,\ x_1 + 2p_ix_2,\ 3x,\ 5x,\ \ldots,\ (2p_i - 1)x,\ x + \frac{1}{p_i^T},\ \frac{x}{p_j} \mid n \in \mathbb{N}, T \in \mathbb{Z}_+, p_j \in P,\ p_j \not\equiv \pm 1 \pmod{2p_i}, p_j \neq p_i\}.$$

Доказательство. Верна следующая цепочка рассуждений

$$-x \in M,\quad x_1 + 2p_ikx_2 \in K(M) \overset{\mathrm{Fb}_{x_2}}{\Longrightarrow} \frac{x}{1 + 2p_i\tilde{k}} \quad \forall k \in \mathbb{Z};$$
$$\forall l \in \{3, 5, \ldots, 2p_i - 1\}\ lx \in M,\quad (x + 2p_ikx) \in K(M) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\ kx \in K(M) \forall k \in 1 + 2\mathbb{Z};$$
$$\forall p_j \not\equiv \pm 1(\mod 2p_i),\ p_j \neq p_i :\quad \frac{x}{p_j} \in M \text{ и полученное выше } \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\ rx \in K(M)\quad \forall r \in \left(1 + 2\mathbb{Z}_{(2)}\right) \setminus \frac{\mathbb{Z}_{(2)}}{p_i};$$
$$x_1 + \sum_{j=1}^{n} 2p_ix_j \in K(M) \Longrightarrow rx + \sum_{l=1}^{n} 2p_ir_lx_l \in K(M);$$
$$p_ix_1 + \cdots + p_ix_n \in M \Longrightarrow \sum_{l=1}^{n} p_ir_lx_l \in K(M);$$
$$\forall T \in \mathbb{Z}_+ : r\left(\frac{x}{r} + \frac{1}{p_i^T}\right) = x + \frac{r}{p_i^T} \in K(M),\ (r, p_i) = 1,\ (r, 2) = 1 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \text{ (прибавляя нужное число раз) } \forall r_0 \in \mathbb{Z}_{(2)} x + r_0 \in K(M).$$ □

Лемма 5. *Пусть M – порождающее множество для $R_c(p_i)$. Тогда для всякого натурального n_0 :* $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \exists r, r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}_{(2)} \setminus \left(\frac{\mathbb{Z}_{(2)}}{p_i} \cup 2\mathbb{Z}_{(2)} \cup p_i\mathbb{Z}_{(2)}\right)$, $\exists f_0, g_0 \in R_p(p_i), g(0) = 0$:

$$f = \sum_{j=1}^{n} p_i r_j x_j + f_0(x'_1, \ldots, x'_m) \in M,$$

$$g = g_0(x_1, \ldots, x_k) + \frac{r}{p_i^n} \in M$$

Доказательство. Существование f доказывается аналогично лемме 3. В $R_d(p_i)$ не существует функций, позволяющих делить коэффициенты на p_i и на 2. Если t_0 - максимальная степень p_i в знаменателе свободных членов в M, то мы не сможем получить функцию $x + \frac{1}{p_i^{t_0+1}}$, откуда следует утверждение о существовании функции $g \in M$. □

Следствие 2. *Класс $R_d(p_i)$ не имеет конечного порождающего множества.*

Теорема 8. *Класс $R_d(p_i)$ не имеет базиса.*

Доказательство. Для начала выразим из M функции $M_0 = \{-x,\ x - 1\ x_1 + 2p_i x_2,\ 3x, 5x,\ \ldots, (2p_i - 1)x\}$. Для этого потребуется конечное число функций из M; в дальнейшем мы не будем трогать эти функции.

Теперь получим функции $\frac{x}{p_0}$ для всякого простого p_0, такого что $p_0 \not\equiv \pm 1 (\mod p_i)$. Покажем, что для их построения не требуются функции вида (7). Вспомним, как выглядят функции вида (6) и (7):

$$f = rx + \sum_{j=1}^{n} 2p_i r_j x_j + r_0 \qquad (6)$$

$$f = \sum_{j=1}^{n} p_i r_j x_j + r_0 \qquad (7)$$

При применении операций композиции к функциям вида (7), их вид не поменяется. При подстановке функции вида (7) вместо переменной x функции вида (6) получится функция вида (7). При подстановке функции вида (7) вместо переменной x_j функции вида (6) получится функция вида (6), однако коэффициент r не изменится.

Применение обратной связи к непосредственной переменной x_j функции вида (6) умножит коэффициент при переменной x на $\frac{k}{1+2lp}$ для некоторых $k \in 1 + 2\mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}$. Но $krx + 2lx_1 \in K(M_0)$, следовательно и $\frac{k}{1+2lp} rx \in K(M_0)$. А значит, применение операции подстановки функции вида (7) вместо переменной x_j функции вида (6), с точки зрения влияния на коэффициент при переменной x, может быть заменено на применение ряда операций композиции к функциям из M_0. Что и требовалось. Таким образом, было построено множество:

$$M_1 = \{-x, x-1, x_1+2p_ix_2,\ 3x, 5x,\ \ldots, (2p_i - 1)x, \frac{x}{p_j} \mid p_j \not\equiv \pm 1 \ (\bmod 2p_i)\}$$

Причем, для его построения из множества $M \cap R_p(p_i)$ потребовалось лишь конечное множество функций. Назовем его R_0. Из доказательства леммы 4:

$$\forall r \in \mathbb{Z}_{(2)} \setminus \left(\frac{\mathbb{Z}_{(2)}}{p_i} \cup 2\mathbb{Z}_{(2)} \cup p_i\mathbb{Z}_{(2)} \right): \quad rx \in K(M_1), \quad \frac{x}{r} \in K(M_1)$$

Возьмем произвольную функцию f, существование которой гарантируется леммой 5 и которая не принадлежит R_0. Она имеет вид:

$$f = \sum_{j=1}^{n} p_i s_j x_j + f'(x'_1, \ldots, x'_m)$$

Пусть t_0 – степень p_i в знаменателе свободного члена f' . Также по лемме 3 найдется функция:

$$f_1 = \sum_{j=1}^{k} p_i r_j x_j + f'_1(x'_1, \ldots, x'_m)$$

Для неё верно, что $k \geq m + n + 1$. И найдется функция $g = g_0(x_1, \ldots, x_k) + \frac{r_g}{p_i^l}$ для которой верно, что $l \geq t_0 + 1$.

Аналогично теореме 8 из функции f_1 получим $f_+ = p_i x_1 + \cdots + p_i x_{m+n+1}$ и $f_p = p_i x$.

Подставим на входы всех переменных функции g нули и подставим результат в функцию $\frac{x}{r_g}$. Получим константу $\frac{1}{p^l}$.

Построим теперь функцию f. Так как $f' \in R_p(p_i)$,

$$f = \sum_{j=1}^{n} p_i s_j x_j + + \sum_{j=1}^{m} p_i s'_j x'_j + \frac{s'_0}{p^{t_0}}, \quad s'_j \in \mathbb{Z}_{(2)} \setminus \frac{\mathbb{Z}_{(2)}}{p_i}$$

С помощью функций из $K(M_0)$ можем построить функции $s_j x$ и $s'_j x$. Также уже построили $\frac{1}{p^l}$ Подставив их в функцию f_+, получим окончательно функцию f, причем для её построения использовались только f_1, g и функции из $K(M_2)$. Таким образом, $M \setminus \{f_1\}$ является порождающим для $R_d(p_i)$.

$\square$

Заключение.

В работе исследованы базисы в предполных классах L_2. Для предполных классов T_0, T_1, V_o, V_1, I были найдены базисы. Для двух бесконечных серий предполных классов $R_c(p_i)$ и $R_d(p_i)$ было продемонстрировано отсутствие конечных порождающих систем, равно как и отсутствие базисов.

Автор выражает благодарность профессору А.А. Часовских за помощь в постановке задачи и содействие в подготовке статьи.

Список литературы

[1] А. А. Часовских, "О полноте в классе линейных 2-адических автоматов", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **20**:4 (2016), 209–227.

[2] А. А. Часовских, "Об алгоритмической разрешимости проблемы полноты для линейных автоматов", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1986, № 3, 82–84.

[3] А. А. Часовских, "Проблема полноты для класса линейно-автоматных функций", *Дискрет. матем.*, **27**:2 (2015), 134–151; *Discrete Math. Appl.*, **26**:2 (2016), 89–104.

[4] А. А. Часовских, "Проблема полноты в классах линейных автоматов", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **22**:2 (2018), 151–153.

[5] А. Г. Лунц, "Конечные p-адические автоматы", *Докл. АН СССР*, **150**:4 (1963), 755–758.

Study of bases in precomplete classes of the set of linear 2-adic automata

Kalashnikov M.E.

The present paper considers precomplete classes in the class of linear 2-adic automata. The paper provides the study of bases for each precomplete class.

Keywords: finite automaton, p-adic number, linear 2-adic automaton, compositional operations, feedback, completeness problem, basis.

References

[1] Chasovskikh A. A., “Completeness problem in the class of linear 2-adic automata”, *Intelligent systems*, **20**:4 (2016), 209–227 (In Russian).

[2] Chasovskikh A. A., “Algorithmic solvability of the completeness problem for linear automata”, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, 1986, № 3, 82–84 (In Russian).

[3] Chasovskikh A. A., “Completeness problem for the class of linear automata functions”, *Discrete Math. Appl.*, **26**:2 (2016), 89–104 (In Russian).

[4] Chasovskikh A. A., “Completeness problem in the classes of linear automata”, *Intelligent systems*, **22**:2 (2018), 151–153 (In Russian).

[5] Lunts A. G., “Finite p-adic automata”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **150**:4 (1963), 755–758 (In Russian).