Сложность задачи о существовании сюръективного гомоморфизма на рефлексивные циклы

Н. П. Корчагин[1]

В работе исследуется сложность массовой задачи, где на вход подается произвольный граф, и нужно определить, существует ли сюръективный гомоморфизм из этого графа в фиксированный граф $\mathcal{G}$. Мы доказываем, что если $\mathcal{G}$ — рефлексивный цикл длины 7 и более, то задача является NP-трудной.

Доказательство основано на новом подходе, который позволяет сводить решение задачи удовлетворения ограничениям к проверке выполнимости системы тождеств, а она сводится к решению сюръективной задачи удовлетворения ограничениям.

Ключевые слова: сюръективные гомоморфизмы, сложность вычислений, удовлетворение ограничениям, полиморфизмы.

1. Введение

В данной статье мы рассмотрим задачу о существовании сюръективного гомоморфизма на заданный граф (*Surj-Hom)* и ее связь с задачей об удовлетоворении ограничениям (CSP), сюръективном удовлетворении ограничениям (SCSP).

Рассмотрим граф $\mathcal{G} = (V, E)$ с множеством вершин V и множеством ребер $E \subseteq V \times V$ и граф $\mathcal{H} = (V', E')$ с вершинами V' и ребрами $E' \subseteq V' \times V'$. *Петлей* в графе называется ребро, которое соединяет вершину с ней самой. Граф называется *рефлексивным*, если каждая его вершина содержит петлю. *Гомоморфизм* графа $\mathcal{H}$ на граф $\mathcal{G}$ – это отображение $f : V' \to V$ такое, что $\forall (a_i, a_j) \in E'$ верно, что $(f(a_i), f(a_j)) \in E$. Для фиксированного графа $\mathcal{H}$ задача о существовании сюръективного гомоморфизма *Surj-Hom*$(\mathcal{H})$ – это массовая задача, в которой по данному графу $\mathcal{G}$ требуется проверить, существует ли сюръективный гомоморфизм $\mathcal{G}$ на $\mathcal{H}$. C_n^{ref} – это рефлексивный цикл длины n.

Основным результатом статьи является следующая теорема:

Теорема 1. *Surj-Hom*(C_n^{ref}) *является NP-трудной при* $n \geq 7$.

Ниже мы формально определим понятия, которые будут использоваться в доказательстве этой теоремы.

[1] *Корчагин Никита Павлович* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: kolkor92@gmail.com.

Korchagin Nikita Pavlovich — graduate student, Lomonosov State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

1.1. Основные понятия

Задача *Constraint Satisfaction Problem* (CSP) - известная массовая задача, в которой необходимо определить, существует ли подстановка, удовлетворяющая определенному набору ограничений. Формально она определяется следующим образом: пусть D – конечное множество (*область значений*), Γ – конечное множество отношений на D. Тогда задача удовлетворения ограничениям, также обозначаемая как CSP(Γ) – это задача, в которой по формуле $\mathcal{I}$

$$R_1(z_{1,1}, ..., z_{1,n_1}) \wedge ... \wedge R_s(z_{s,1}, ..., z_{s,n_s}),$$

где $R_1, ..., R_s \in \Gamma$ – отношения из Γ и $z_{i,j} \in \{x_1, ..., x_n\}$ – переменные над D, необходимо определить, выполнима ли она. Данная формула вместе с набором переменных $\{x_1, ..., x_n\}$ называется *экземпляром* $\mathcal{I}$ задачи CSP(Γ), а подстановка, удовлетворяющая всем ограничениям – *решением* экземпляра.

k-местная функция f называется *полиморфизмом* m-местного отношения R, если для любых $(a_1^1, ..., a_1^m), ..., (a_k^1, ..., a_k^m)$ из R, верно, что $(f(a_1^1, ..., a_k^1), ..., f(a_1^m, ..., a_k^m))$ тоже из R (говорят также, что f *сохраняет* R). f – полиморфизм множества отношений Γ, если f – полиморфизм каждого отношения из Γ. Множество полиморфизмов Γ обозначается как Pol(Γ). Множество сюръективных полиморфизмов Γ обозначается как SPol(Γ).

Функция f от n переменных называется *существенно-унарной*, если она существенно зависит не более, чем от одной переменной. Иными словами, f – существенно унарна тогда и только тогда, когда существуют $i \in \{1, ..., n\}$, g – функция от одной переменной такие, что $f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = g(x_i)$.

В задаче *Surjective Constraint Satisfaction Problem* (SCSP) помимо выполнимости формулы также требуется сюръективность решения. Эта задача определяется так. Пусть Γ – конечное множество отношений на области значений D. В задаче SCSP(Γ) по данной формуле $\mathcal{I}$

$$\mathcal{I} = R_1(z_{1,1}, ..., z_{1,n_1}) \wedge ... \wedge R_s(z_{s,1}, ..., z_{s,n_s}),$$

где $R_1, ..., R_s \in \Gamma$ и $z_{i,j} \in \{x_1, ..., x_n\}$ необходимо определить, существует ли решение такое, что $\{x_1, ..., x_n\} = D$. Покажем, что *Surj-Hom*($\mathcal{H}$) эквивалентен SCSP(E), где E – бинарное отношение смежности на вершинах графа $\mathcal{H}$. Для графа $\mathcal{H} = (V, E)$ с $V = \{v_1, ..., v_n\}$ рассмотрим отношение смежности на множестве его вершин $E \subseteq V \times V$. Тогда существование сюръективного гомоморфизма произвольного графа $\mathcal{G} = (V', E')$ с $V' = \{x_1, ..., x_m\}$ и $E' = \{(x_{1_1}, x_{1_2}), (x_{2_1}, x_{2_2}), ..., (x_{l_1}, x_{l_2})\}$ на $\mathcal{H}$ эквивалентно существованию сюръективного решения формулы

$$E(x_{1_1}, x_{1_2}) \wedge E(x_{2_1}, x_{2_2}) \wedge ... \wedge E(x_{l_1}, x_{l_2}).$$

Аналогично, если E – некоторое бинарное отношение на множестве $V = \{v_1, ..., v_n\}$, то по произвольной формуле

$$E(z_{1_1}, z_{1_2}) \wedge ... \wedge E(z_{s_1}, z_{s_2}),$$

где $z_{i_j} \in \{x_1, ..., x_m\}$ можно построить граф $\mathcal{H}$ с m вершинами $x_1, ..., x_m$ и s ребрами (z_{i_1}, z_{i_2}). Тогда каждое сюръективное решение формулы соответствует некоторому сюръективному гомоморфизму из $\mathcal{H}$ на граф с вершинами $\{v_1, ..., v_n\}$ и отношением смежности E.

1.2. Предыдущие результаты

Многие комбинаторные задачи можно представить в виде CSP для некоторых Г[11]. В [19] было предложено и, позже, независимо доказано в [4] и [5], что для произвольного Г эта задача либо решается за полиномиальное время, либо является NP-полной. Более того, в [4] и [5] была независимо описана полная классификация сложности CSP для произвольных Г, которая сформулирована с помощью полиморфизмов Г.

После получения классификации сложности CSP, интерес исследователей сместился в сторону различных вариаций этой задачи, таких как SCSP. Известно, что если Г – набор отношений на множестве D, то SCSP(Г) можно свести к CSP(Г$\cup\{x = d | d \in D\}$) [1]. Так как сложность CSP(Г) определяется с помощью полиморфизмов Г, можно предположить, что сложность SCSP(Г) тоже характеризуется полиморфизмами Г. Так в [2] была доказана NP-трудность SCSP(Г) для случаев, когда все полиморфизмы Г существенно-унарны. Тем не менее, было показано, что одних полиморфизмов Г недостаточно для описания сложности SCSP(Г) [14].

Задача *Surj-Hom* вызывала интерес исследователей уже достаточно давно. Несмотря на простоту формулировки, даже для некоторых простых графов $\mathcal{H}$ долгое время не удавалось понять, решается ли задача за полиномиальное время. Например, для цикла C_6 без петель задача была впервые отдельно сформулирована в 1999 году [16], но доказана лишь в 2017 [17]. Тем не менее, предпринималось множество попыток связать сложность задачи с различными свойствами графов. Так, в [2] было доказано, что если граф $\mathcal{H}$ связен и содержит ровно 2 петли, то *Surj-Hom*($\mathcal{H}$) является NP-трудной. В [6] было показано, что если каждая связная компонента $\mathcal{H}$ является звездой без петель (*звезда* – это граф, который содержит ровно одну вершину, соединенную со всеми остальными верщинами графа) или полным двудольным графом без петель, то *Surj-Hom*($\mathcal{H}$) лежит в P. В [7] была описана сложность *Surj-Hom* для некоторых рефлексивных ориентированных графов, и определена сложность для всех ориентированных графов на не более, чем трёх вершинах.

В 2015 году была доказана NP-трудность *Surj-Hom* для рефлексивного цикла длины 4 C_4^{ref} [10]. В [15] была описана сложность *Surj-Hom* для деревьев, содержащих как минимум одну петлю. В [13] Викас описывает алгоритм, который позволяет решить задачу за полиномиальное время для некоторых классов входных графов, таких как лес. Также в этой статье было заявлено, что существует доказательство сложности *Surj-Hom* для всех графов с не более, чем четырьмя вершинами. Это доказательство было независимо получено в [2] со ссылками на [1, 15, 10, 9].

Несмотря на большое количество результатов по данной теме, сложность *Surj-Hom* известна для очень маленького множества графов. Поэтому, в качестве первого шага в изучении этой задачи можно рассмотреть простые графы, такие как циклы. Так, для рефлексивных циклов заданной длины n C_n^{ref} сложность *Surj-Hom*(C_n^{ref}) известна только для $n \leq 4$ [10].

2. Основные результаты

Для удобства будем отождествлять граф и бинарное отношение смежности на множестве его вершин. В разделе 2.1 мы докажем что все сюръективные полиморфизмы C_n^{ref} при $n \geq 4$ существенно-унарны:

Теорема 2. *Пусть* $f \in \mathrm{SPol}(C_n^{ref}), n \geq 4$, *тогда* f *существенно-унарен.*

Отметим, что в [18] приводится иное доказательство этого результата. После этого мы рассмотрим отношение $1\mathrm{IN}3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ на множестве E_2. Известно, что задача CSP(1IN3) является NP-трудной [11]. В разделе 2.2 мы опишем сведение CSP(1IN3) к SCSP(C_n^{ref}) для $n \geq 7$, тем самым доказав, что эта задача (и, как следствие, *Surj-Hom*(C_n^{ref})) является NP-трудной. В результате мы докажем следующую теорему, которая является переформулировкой теоремы 1.

Теорема 3. SCSP*(C_n^{ref}) является NP-трудной при $n \geq 7$.*

Наконец, в разделе 2.3 мы построим контрпримеры, которые покажут, что сконструированное в разделе 2.2 доказательство не подходит для доказательства NP-трудности задачи для циклов длины 5, 6.

2.1. Структура сюръективных полиморфизмов CSP(C_n^{ref})

Рассмортим рефлексивный цикл C_n^{ref} длины n с множеством вершин $E_n = \{0, 1, ..., n-1\}$ и отношением смежности, которое задается следующим образом

$$(x, y) \in C_n^{ref} \iff (x - y \pmod n) \in \{1, 0, n-1\}.$$

E_n с операцией сложения по модулю n – группа, через $\oplus$ и $\ominus$ будем обозначать операции сложения и вычитания в этой группе: $x \oplus y = (x+y) \mod n$, $x \ominus y = (x-y) \mod n$. Для $a \in E_n$ через $\ominus a$ будем обозначать элемент E_n, обратный a (так, $\ominus 1 = n-1$). Определим на E_n метрику следующим образом:

$$\rho(x,y) = min((y \ominus x),(x \ominus y)).$$

эта метрика соответствует растоянию между вершинами x и y в графу C_n^{ref}. Расстояние между любыми двумя элементами E_n ограничено сверху:

Лемма 1. *Для любых* $x, y \in E_n$ $\rho(x,y) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Доказательство. Если $y \ominus x > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, то $x \ominus y = n - (y \ominus x) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. □

Заметим, что для отношения смежности C_n^{ref} верно:

$$(x,y) \in C_n^{ref} \iff \rho(x,y) \leq 1.$$

Рассмотрим множество E_n^k, образованное наборами из k элементов E_n. Элементы этого множества будем называть *векторами* и обозначать как $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$. Для $\overline{x} \in E_n^k$ через x_i, $i \in \{1, ..., k\}$ будем обозначать i-ый член $\overline{x}$ (будем также говорить, что x_i – i-ая координата $\overline{x}$). Введем на этом пространстве метрику ρ: если $\overline{x}, \overline{y} \in E_n^k$, $\overline{x} = (x_1, .., x_k)$, $\overline{y} = (y_1, ..., y_k)$, то

$$\rho(\overline{x}, \overline{y}) = \max_i(\rho(x_i, y_i)).$$

Для $\overline{x}, \overline{y} \in E_n^k$ через $\overline{x} + \overline{y}$, $\overline{x} - \overline{y}$ будем обозначать операции поэлементного сложения и вычитания на этом множестве. Иными словами, если $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_k)$, то $\overline{x} + \overline{y} = (x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, ..., x_k \oplus y_k)$, $\overline{x} - \overline{y} = (x_1 \ominus y_1, x_2 \ominus y_2, ..., x_k \ominus y_k)$.

Заметим, что k-местная функция $f : E_n^k \to E_n$ является полиморфизмом C_n^{ref} тогда и только тогда, когда $\forall \overline{x}, \overline{y} : \rho(\overline{x}, \overline{y}) \leq 1 \Rightarrow \rho(f(\overline{x}), f(\overline{y})) \leq 1$. Два вектора $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ и $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_k)$ будем называть *соседями*, если $\rho(\overline{x}, \overline{y}) \leq 1$. Два вектора $\overline{x}$ и $\overline{y}$ будем называть *прямыми соседями*, если они соседи и $\exists! i$ $\rho(x_i, y_i) = 1$, то есть эти наборы отличаются ровно по одной координате. Вектор $\overline{\Delta} = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k)$ будем называть *сдвигом*, если $\forall i$ $\delta_i \in \{\ominus 1, 0, 1\}$. Соответственно, сдвиг $\overline{\Delta}$ будем называть *прямым сдвигом*, если $\exists! i$ $\delta_i \in \{\ominus 1, 1\}$. Два элемента $\overline{x}$ и $\overline{y}$ являются соседями, если они отличаются на сдвиг, и прямыми соседями, если они отличаются на прямой сдвиг.

Путь P в E_n^k - это последовательность элементов $\overline{x^1}$ - $\overline{x^2}$ - ... - $\overline{x^s}$ такая, что любые два соседних элемента $\overline{x^i}$ и $\overline{x^{i+1}}$ являются соседями.

Цикл - это путь, у которого начало и конец совпадают. Длина пути – это количество элементов в данном пути минус 1. Несложно заметить, что справедлива следующая лемма:

Лемма 2. *Пусть $\overline{x}, \overline{y} \in E_n^k$. Тогда существует путь из $\overline{x}$ в $\overline{y}$ длины $\rho(\overline{x}, \overline{y})$.*

Заметим также, что так как любые два соседних элемента в пути являются соседями, то путь можно представить последовательностью сдвигов начального элемента.

Пусть $n > 2$. Введем частичную функцию $r(x, y)$, определенную на соседних элементах E_n:

$$r(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ если } x \oplus 1 = y \\ -\frac{1}{n}, \text{ если } x \ominus 1 = y \\ 0, \text{ если } x = y \end{cases}$$

Для k-местного полиморфизма $f \in \mathrm{Pol}(C_n^{ref})$ и пути P в E_n^k *индекс* $c(P, f)$ пути P над f – числовая характеристика, которая определяется следующим образом: Если

$$P = \overline{x^0} \text{ - } \overline{x^1} \text{ - } \overline{x^2} \text{ - ... - } \overline{x^{s-1}} \text{ - } \overline{x^s},$$

то

$$c(P,f) = r(f(\overline{x^0}), f(\overline{x^1})) + r(f(\overline{x^1}), f(\overline{x^2})) + ... + r(f(\overline{x^{s-1}}), f(\overline{x^s})).$$

Заметим, что если длина P равна s, то для любого $f \in \mathrm{Pol}(C_n^{ref})$ $|c(P, f)| \le \frac{s}{n}$. Заметим также, что индекс обладает аддитивностью: если конец пути P совпадает с началом пути R, и путь D построен из путей P и R, то для любого $f \in \mathrm{Pol}(C_n^{ref})$ верно $c(D, f) = c(P, f) + c(R, f)$.

Лемма 3. *Для любого k-местного полиморфизма $f \in \mathrm{Pol}(C_n^{ref})$ и произвольного пути P из $\overline{x}$ в $\overline{y}$ в E_n^k существует целое t такое, что $c(P, f) = \frac{f(\overline{y}) - f(\overline{x})}{n} + t$.*

Доказательство. Пусть P имеет следующий вид: $P = \overline{x^0}$ - $\overline{x^1}$ - $\overline{x^2}$ - ... - $\overline{x^s}$. При каждом переходе индекс увеличивается на $\frac{1}{n}$ (если следующее значение больше предыдущего на 1), уменьшается на $\frac{1}{n}$ (если следующее значение меньше предыдущего на 1) или не изменяется. Пусть после s переходов индекс увеличился s_1 раз, уменьшился s_2 раза и не изменился s_3 раз. $s = s_1 + s_2 + s_3$, при этом по определению $c(P, f) = \frac{s_1 - s_2}{n}$. Тогда $f(\overline{x^s}) = f(\overline{x^0}) \oplus s_1 \ominus s_2$, откуда $f(\overline{x^s}) = f(\overline{x^0}) + s_1 - s_2 + n \cdot t$ для некоторого $t \in \mathbb{Z}$, и $\frac{s_1 - s_2}{n} = c(P, f) = \frac{f(\overline{x^s}) - f(\overline{x^0})}{n} + t, t \in \mathbb{Z}$. □

Следствие 1. *Пусть f – k-местный полиморфизм C_n^{ref}, $\overline{x}, \overline{y} \in E_n^k$, P_1, P_2 – пути из $\overline{x}$ в $\overline{y}$. Тогда существует целое t такое, что $c(P_1, f) - c(P_2, f) = t$.*

Следствие 2. *Пусть f – k-местный полиморфизм C_n^{ref}, P – цикл в E_n^k. Тогда $c(P, f)$ – целое число.*

Лемма 4. *Пусть f – k-местный полиморфизм C_n^{ref}, $n \geq 3$, $\overline{a}, \overline{b} \in E_n^k$ такие, что $f(\overline{a}) = t$ и $f(\overline{b}) = t \oplus 1$. Тогда существует путь P из $\overline{a}$ в $\overline{b}$ такой, что $c(P, f) = \frac{1}{n}$.*

Доказательство. По лемме 1 $\rho(\overline{x}, \overline{y}) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, откуда по лемме 2 существует путь P из $\overline{a}$ в $\overline{b}$ длины не больше, чем $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. По лемме 3 $c(P, f) = \frac{1}{n} + t, t \in \mathbb{Z}$. Но $|c(P, f)| \leq \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n}$, откуда при $n \geq 3$ имеем $t = 0$ и $c(P, f) = \frac{1}{n}$. □

Лемма 5. *Пусть f – сюръективный k-местный полиморфизм C_n^{ref}, $n \geq 3$. Тогда в E_n^k существует цикл C индекса 1.*

Доказательство. Рассмотрим векторы $\overline{x_0}, \overline{x_1}, ...\overline{x_{n-1}}$ такие, что $f(\overline{x_i}) = i, i \in E_n$ (эти элементы существуют из сюръективности f). По лемме 4 существуют пути $P_{0,1}, P_{1,2}, ..., P_{n-2,n-1}, P_{n-1,0}$ такие, что $\forall i \in E_n$ $P_{i,i\oplus1}$ идет из $\overline{x_i}$ в $\overline{x_{i\oplus1}}$ и $c(P_{i,i\oplus1}, f) = \frac{1}{n}$.
Рассмотрим путь P, последовательно собранный из путей $P_{i,i\oplus1}$:

$$P = \overline{x_0} \text{ - ... - } \overline{x_1} \text{ - ... - ... - } \overline{x_{n-1}} \text{ - ... - } \overline{x_0}.$$

Он является циклом. При этом по определению индекса пути

$$c(P, f) = c(P_{0,1}, f) + c(P_{1,2}, f) + ... + c(P_{n-2,n-1}, f) + c(P_{n-1,0}, f) = \frac{1}{n} \cdot n = 1.$$

□

Рассмотрим произвольный путь P в пространстве E_n^k:

$$P = \overline{x^0} \text{ - } \overline{x^1} \text{ - ... - } \overline{x^s}.$$

Этот путь можно представить в виде последовательности сдвигов начального элемента: для $\overline{\Delta^i} = \overline{x^i} - \overline{x^{i-1}}$ имеем

$$\overline{x^s} = \overline{x^0} + \overline{\Delta^1} + \overline{\Delta^2} + ... + \overline{\Delta^s}.$$

Аналогично, произвольный элемент $\overline{x^0} \in E_n^k$ и последовательность сдвигов $\overline{\Delta^1}, \overline{\Delta^2}, ..., \overline{\Delta^s}$ задают путь $P = \overline{x^0}$ - $\overline{x^1}$ - ... - $\overline{x^s}$, где $\overline{x^i} = \overline{x^0} + \overline{\Delta^1} + \overline{\Delta^2} + ... + \overline{\Delta^i}$.

Пусть путь P задается начальным элементом $\overline{x^0}$ и сдвигами $\overline{\Delta^1}, \overline{\Delta^2}, ..., \overline{\Delta^s}$. Опишем ряд преобразований, которые позволяют из пути P получить новый путь R по следующим правилам:

1) Если в последовательности существует сдвиг $\overline{\Delta} = (e_1, ..., e_k)$ такой, что в нем есть как минимум два ненулевых элемента $e_i, e_j \neq 0$, то строим R в котором вместо $\overline{\Delta}$ последовательно стоят два сдвига $\overline{\varepsilon}$, $\overline{\Delta'}$, где $\overline{\varepsilon} = (0, ..., 0, e_i, 0, ..., 0)$, $\overline{\Delta'} = (e_1, ..., e_{i-1}, 0, e_{i+1}, ..., e_k)$.

2) Если в последовательности существуют идущие подряд прямые сдвиги $\overline{\varepsilon_1}$, $\overline{\varepsilon_2}$ такие, что в $\overline{\varepsilon_1}$ ненулевой элемент стоит на i-ом месте, в $\overline{\varepsilon_2}$ ненулевой элемент стоит на j-ом месте и $i > j$, то строим R, в котором меняем эти сдвиги местами: $\overline{\varepsilon_2}, \overline{\varepsilon_1}$.

3) Если в последовательности существуют идущие подряд сдвиги $\overline{\Delta_1}$, $\overline{\Delta_2}$ такие, что $\overline{\Delta_2} = -\overline{\Delta_1}$, то строим R, в котором удаляем эти сдвиги из цикла.

Заметим, что данные преобразования не меняют начальную и конечную точки пути, поскольку не меняют общую сумму сдвигов, образующих путь.
Докажем, что данные преобразования не меняют индекс пути.

Лемма 6. *Пусть f – k-местный полиморфизм C_n^{ref}, $n \geq 4$, P – путь в E_n^k, R – путь, полученный из P применением любого из преобразований 1 - 3. Тогда $c(P, f) = c(R, f)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный путь $P = \overline{x^0}$ - $\overline{x^1}$ - ... - $\overline{x^s}$, путь R получен из него применением любого из преобразований 1-3. R имеет такие же начальную и конечную точки, что и P, отсюда по следствию 1 индексы R и P отличаются на целое число.

Преобразование 1 добавляет один новый элемент в путь. Пусть в P к $\overline{\Delta^i}$ применяем преобразование 1: $\overline{\Delta^i} \to \overline{\varepsilon}, \overline{\Delta'}$, $\overline{\Delta^i} = \overline{\varepsilon} + \overline{\Delta'}$. Тогда в R появляется новый элемент $\overline{x'} = \overline{x^0} + \overline{\Delta^1} + ... + \overline{\Delta^{i-1}} + \overline{\varepsilon}$:

$$R = \overline{x^0} \text{ - } \overline{x^1} \text{ - } ... \text{ - } \overline{x^{i-1}} \text{ - } \overline{x'} \text{ - } \overline{x^i} \text{ - } \overline{x^{i+1}} \text{ - } ... \text{ - } \overline{x^s}.$$

При этом преобразовании индекс меняется не более, чем на $\frac{3}{n}$: вместо $r(f(\overline{x^{i-1}}), f(\overline{x^i}))$ появляется $r(f(\overline{x^{i-1}}), f(\overline{x'})) + r(f(\overline{x'}), f(\overline{x^i}))$, и, так как $n > 3$, то индекс не меняется.

Преобразование 2 удаляет один элемент и добавляет один элемент. Пусть в P последовательно идут $\Delta^i = \overline{\varepsilon_1}$ и $\Delta^{i+1} = \overline{\varepsilon_2}$, в $\overline{\varepsilon_1}$ ненулевой элемент на l-ой позиции, в $\overline{\varepsilon_2}$ ненулевой элемент на m-ой позиции и $l > m$. Тогда в R вместо $\overline{x^i} = \overline{x^0} + \overline{\Delta^1} + ... + \overline{\Delta^{i-1}} + \overline{\varepsilon_1}$ будет $\overline{x'} = \overline{x^0} + \overline{\Delta^1} + ... + \overline{\Delta^{i-1}} + \overline{\varepsilon_2}$:

$$R = \overline{x^0} \text{ - } \overline{x^1} \text{ - } ... \text{ - } \overline{x^{i-1}} \text{ - } \overline{x'} \text{ - } \overline{x^{i+1}} \text{ - } ... \text{ - } \overline{x^s}.$$

Заметим, что $\overline{x^i}$ и $\overline{x'}$ являются соседями, поскольку $\overline{x^i} = \overline{x^{i-1}} + \overline{\varepsilon_1}$, $\overline{x'} = \overline{x^{i-1}} + \overline{\varepsilon_2}$ и в $\overline{\varepsilon_1}$ и $\overline{\varepsilon_2}$ ненулевые элементы стоят на разных местах.

Индекс пути меняется на четыре слагаемых: вместо $r(f(\overline{x^{i-1}}), f(\overline{x^i})) + r(f(\overline{x^i}), f(\overline{x^{i+1}}))$ появляется $r(f(\overline{x^{i-1}}), f(\overline{x'}))+r(f(\overline{x'}), f(\overline{x^{i+1}}))$. При этом, если

$$r(f(\overline{x^{i-1}}), f(\overline{x^i})) = -r(f(\overline{x^{i-1}}), f(\overline{x'})),$$

то

$$f(\overline{x^i})) = f(\overline{x^{i-1}}) \oplus 1, f(\overline{x'}) = f(\overline{x^{i-1}}) \ominus 1$$

или

$$f(\overline{x^i})) = f(\overline{x^{i-1}}) \ominus 1, f(\overline{x'}) = f(\overline{x^{i-1}}) \oplus 1,$$

откуда $f(\overline{x'}) = f(\overline{x^i}) \ominus 2$ или $f(\overline{x'}) = f(\overline{x^i}) \oplus 2$ – так как n > 3, имеем противоречие с тем, что $\overline{x^i}$ и $\overline{x'}$ – соседи и f – полиморфизм. Отсюда индекс меняется не более, чем на $\frac{3}{n} < 1$, и преобразование 2 не меняет индекс.

Преобразование 3 убирает два элемента из пути: если в P $\overline{\Delta^i} = -\overline{\Delta^{i+1}}$, то $\overline{x^{i-1}} = \overline{x^{i+1}}$ и путь R выглядит следующим образом:

$$R = \overline{x^0} \text{ - } \overline{x^1} \text{ - ... - } \overline{x^{i-1}} \text{ - } \overline{x^{i+2}} \text{ - ... - } \overline{x^s}.$$

При этом индекс R отличается от индекса P на $r(f(\overline{x^{i-1}}), f(\overline{x^i})) + r(f(\overline{x^i}), f(\overline{x^{i+1}}))$, то есть не более, чем на $\frac{2}{n}$. Так как $n > 3$, то индекс пути при преобразовании 3 не меняется. $\square$

С помощью преобразований 1 - 3 получим цикл, состоящий исключительно из прямых сдвигов одной из координат:

Лемма 7. *Для произвольного k-местного $f \in \mathrm{SPol}(C_n^{ref})$, $n \geq 4$, существуют $\overline{a} = (a_1, ..., a_k) \in E_n^k$, $e \in \{1, \ominus 1\}$, $i \in \{1, ..., k\}$ такие, что $\forall b \in E_n : f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i \oplus b \cdot e, a_{i+1}, ..., a_k) = b$.*

Доказательство. Рассмотрим цикл C, полученный в лемме 5. Пусть этот цикл начинается в некоторой точке $\overline{c} = (c_1, ..., c_k)$ такой, что $f(\overline{c}) = t$. Получим из него цепочку циклов $C_0 = C, C_1, C_2, ...$ следующим образом: последовательно применяем преобразование 1, если его можно применить хотя бы к одному сдвигу, после этого последовательно применяем преобразование 2, пока существуют пары сдвигов, к которым оно применимо, после чего применяем преобразование 3, пока оно применимо. Эта цепочка конечна: для фиксированного пути P длины s в пространстве E_n^k преобразование 1 можно последовательно применить не более $s \cdot k$ раз, преобразование 2 - не более s^2 раз, преобразование 3 - не более s раз. Рассмотрим C' – последний цикл в этой цепочке. Он состоит исключительно из последовательностей одинаковых прямых сдвигов: s_1 прямых сдвигов по первой координате, s_2 прямых сдвигов по второй координате, ..., s_k прямых сдвигов по k-ой координате. Так как C' – цикл, и каждый прямой сдвиг меняет ровно одну координату на 1 или $\ominus 1$, то число сдвигов по каждой координате кратно n. Значит, цикл C' состоит из $\frac{s_1}{n} + \frac{s_2}{n} + ... + \frac{s_k}{n}$ циклов (n прямых сдвигов по любой координате в одном направлении дают цикл, так как $x_i \oplus n \cdot e_i = x_i$, $e_i \in \{1, \ominus 1\}$). Каждый из этих циклов имеет индекс 1, -1 или 0, при этом индекс C' равен 1, значит существует цикл C'' длины n и индекса 1, состоящий только из прямых сдвигов $\overline{\varepsilon} = (0, ..., 0, e, 0, ..., 0)$ (где ненулевой e стоит на i-ом месте). Из определения индекса цикла следует, что при каждом таком прямом сдвиге значение полиморфизма вырастает на один. Отсюда $f(c_1, ..., c_k) = t$, $f(c_1, ..., c_{i-1}, c_i \oplus e, c_{i+1}, ..., c_k) = t \oplus 1$, $f(c_1, ..., c_{i-1}, c_i \oplus 2e, c_{i+1}, ..., c_k) = t \oplus 2$, ..., $f(c_1, ..., c_{i-1}, c_i \oplus (n-1) \cdot e, c_{i+1}, ..., c_k) = t \oplus (n-1)$. Тогда для $\overline{a} = (c_1, ..., c_{i-1}, c_i \ominus t \cdot e, c_{i+1}, ..., c_k)$ верно $f(\overline{a} + b \cdot \overline{\varepsilon}) = b$, $b \in E_n$. □

Пользуясь этим, докажем теорему 2:

Теорема 2. *Пусть* $f \in \mathrm{SPol}(C_n^{ref}), n \geq 4$, *тогда* f *существенно-унарен.*

Доказательство. По лемме 7 существуют $\overline{a} = (a_1, ..., a_k) \in E_n^k$, $e \in \{1, \ominus 1\}$, $i \in \{1, ..., k\}$ такие, что $\forall b \in E_n$: $f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i \oplus b \cdot e, a_{i+1}, ..., a_k) = b$, или $f(\overline{a} + b \cdot \overline{\varepsilon}) = b$, где $\overline{\varepsilon} = (0, ..., 0, e, 0, ..., 0)$ – вектор, где e стоит на i-ой позиции. Без ограничения общности будем считать, что $i = k$.
Рассмотрим множество E_n^{k-1}. Через $\overline{a'}$ будем обозначать элемент этого множества, равный $(a_1, ..., a_{k-1})$. Докажем, что для произвольного $\overline{y}' = (y_1, ..., y_{k-1}) \in E_n^{k-1}$ и для произвольного $s \in E_n$ верно $f(y_1, ..., y_{k-1}, a_k \oplus s \cdot e) = s$. Проведем доказательство индукцией по $\rho(\overline{y}', \overline{a}')$.

База индукции. Пусть $\rho(\overline{y}', \overline{a}') = 1$. Рассмотрим произвольное $s \in E_n$, через $\overline{y}$ обозначим вектор $(y_1, ..., y_{k-1}, a_k \oplus s \cdot e)$. Верно, что $\overline{y}$ – сосед $\overline{a} + s \cdot \overline{\varepsilon}$, при этом $f(\overline{a} + s \cdot \overline{\varepsilon}) = s$, значит, $f(\overline{y})$ равен $s, s \oplus 1$ или $s \ominus 1$. Но $\overline{y}$ также является соседом $\overline{a} + (s \oplus 1)\overline{\varepsilon}$ и $\overline{a} + (s \ominus 1)\overline{\varepsilon}$ и $f(\overline{a} + (s \oplus 1)\overline{\varepsilon}) = s \oplus 1$, $f(\overline{a} + (s \ominus 1)\overline{\varepsilon}) = s \ominus 1$. Отсюда, $f(\overline{y}) = s$.

Индуктивный переход. Пусть для всех $\overline{y}' = (y_1, ..., y_{k-1}) \in E_n^{k-1}$ таких, что $\rho(\overline{y}', \overline{a}') \leq m$ и для всех $s \in E_n$ верно, что $f(y_1, ..., y_{k-1}, a_k \oplus s \cdot e) = s$. Возьмем $\overline{x}'$ такой, что $\rho(\overline{x}', \overline{a}') = m + 1$. По лемме 2 существует путь из $\overline{a}'$ в $\overline{x}'$ длины $m + 1$. Рассмотрим предпоследний элемент этого пути $\overline{z}' = (z_1, ..., z_{k-1})$. Зафиксируем произвольный $s \in E_n$. $\rho(\overline{z}', \overline{y}') = m$, откуда по предположению индукции для $\overline{z} = (z_1, ..., z_{k-1}, a_k \oplus s \cdot e)$ верно $f(\overline{z}) = s$, $f(\overline{z} \oplus \overline{\varepsilon}) = s \oplus 1$, $f(\overline{z} \ominus \overline{\varepsilon}) = s \ominus 1$. При этом вектор $\overline{x} = (x_1, ..., x_{k-1}, a_k \oplus s \cdot e)$ является соседом $\overline{z}$, $\overline{z} \oplus \overline{\varepsilon}$ и $\overline{z} \ominus \overline{\varepsilon}$, откуда $f(\overline{x}) = s$.

Таким образом, мы доказали, что если f – k-местный сюръективный полиморфизм C_n^{ref}, то существуют $i \in \{1, ..., k\}$, g – функция от одной переменной такие, что $\forall \overline{x} \in E_n^k$ $f(\overline{x}) = g(x_i)$, то есть f – существенно-унарная функция. □

Следствие 3. *Все сюръективные полиморфизмы C_n^{ref}, $n \geq 4$, задаются следующим образом:*

$$f(x_1, ..., x_k) = e \cdot x_i + c \mod n,$$

где $e \in \{1, \ominus 1\}$, $c \in E_n$, $i \in \{1, ..., k\}$.

2.2. NP-трудность SCSP(C_n^{ref})

В данном разделе будет доказана теорема 2 об NP-трудности SCSP(C_n^{ref}) для $n \geq 7$.

Рассмотрим отношение $1IN3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ на множестве E_2. Задача CSP($1IN3$) является NP-трудной [11].

Через $\pi_i^j, i \leq j$ будем обозначать j-местную проекцию на i-ую переменную, то есть $\pi_i^j(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_j) = x_i$. Для множества E через Proj_E будем обозначать множество всех проекций на E.

Сигнатурой будем называть множество функциональных символов Σ, дополненное отображением $ar : \Sigma \to \mathbb{N}$, которое сопоставляет каждому функциональному символу его арность.

Для сигнатуры Σ и множества переменных $\{x_1, ..., x_n\}$ *минорное условие* (*minor condition*) $\mathcal{T}$ над Σ – это множество тождеств вида $f(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) = t(x_{j_1}, ..., x_{j_m})$, где $f, t \in \Sigma$ и $i_1, ..., i_n, j_1, ..., j_n \in \{1, ..., n\}$.

Пусть M – множество функций с одинаковой областью определения. Минорное условие $\mathcal{T}$ над Σ удовлетворяется на M, если существует отображение $F : \Sigma \to M$ такое, что:

- $\forall g \in \Sigma : g$ и $F(g)$ имеют одинаковую арность.
- Для каждого $f(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) = t(x_{j_1}, ..., x_{j_m})$ из $\mathcal{T}$ $F(f)(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) = F(t)(x_{j_1}, ..., x_{j_m})$ выполняется для любой подстановки значений из области определения M вместо $x_1, ..., x_n$.

Будем говорить, что отображение $F : \Sigma \to M$ является решением $\mathcal{T}$.

Пусть $\Sigma = \{f\}$, где f – трехместный символ. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} f(x,x,y) &= f(x,y,x) \\ f(x,y,x) &= f(y,x,x) \\ f(y,x,x) &= f(x,x,x). \end{aligned}$$

Это условие удовлетворяется на множестве $\{\mathrm{MAJ}\}$, где MAJ – функция голосования от трех переменных в P_2. При подстановке MAJ вместо f каждое тождество выполняется на всех наборах переменных из P_2. Однако, эта система не удовлетворяется на множестве $\mathrm{Proj}_{\{0,1\}}$: проекция на первую переменную не может быть из-за третьего уравнения, проекция на вторую переменную – из-за второго уравнения, и проекция на третью переменную – из-за первого уравнения.

Рассмотрим произвольный экземпляр $\mathcal{I}$ задачи CSP($1IN3$):

$$\mathcal{I} = 1IN3(u_{i_1}, u_{j_1}, u_{k_1}) \wedge 1IN3(u_{i_2}, u_{j_2}, u_{k_2}) \wedge ... \wedge 1IN3(u_{i_m}, u_{j_m}, u_{k_m}),$$

где $i_1, j_1, k_1, i_2, j_2, k_2, ..., i_m, j_m, k_m \in \{1, 2, ..., l\}$.

Возьмем сигнатуру $\Sigma_{\mathcal{I}} = \{f_1, ..., f_m, g_1, ..., g_l\}$, где $f_1, ..., f_m$ – трехместные символы и $g_1, ..., g_l$ – двуместные. Построим минорное условие $\psi(\mathcal{I})$ над $\Sigma_{\mathcal{I}}$ следующим образом:

1) Для каждого $s \in \{1, ..., m\}$ добавим в $\psi(\mathcal{I})$ следующие тождества:

$$\begin{aligned} f_s(y, x, x) &= g_{i_s}(x, y) \\ f_s(x, y, x) &= g_{j_s}(x, y) \\ f_s(x, x, y) &= g_{k_s}(x, y) \end{aligned}$$

2) Для каждой пары $i, j \in \{1, ..., m\}$ такой, что $i \neq j$ добавим в $\psi(\mathcal{I})$ следующие тождества:

$$f_i(x, x, x) = f_j(x, x, x).$$

В получившемся минорном условии каждому вхождению $1IN3$ в $\mathcal{I}$ будет соответствовать определенный функциональный символ f_i, а каждой переменной u_j – функциональный символ g_j.

Рассмотрим экземпляр $\mathcal{I} = 1IN3(u_1, u_2, u_3) \wedge 1IN3(u_2, u_4, u_5)$. Тогда соответствующее ему минорное условие $\psi(\mathcal{I})$ будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1(y, x, x) &= g_1(x, y) \\ f_1(x, y, x) &= g_2(x, y) \\ f_1(x, x, y) &= g_3(x, y) \\ f_2(y, x, x) &= g_2(x, y) \\ f_2(x, y, x) &= g_4(x, y) \\ f_2(x, x, y) &= g_5(x, y) \\ f_1(x, x, x) &= f_2(x, x, x). \end{aligned}$$

Более подробно конструкция минорных условий и их применение в алгебраическом анализе сложности CSP описаны в [20, 12].

Пусть $\mathcal{I}$ – произвольный экземпляр CSP($1IN3$), E – произвольное множество, $|E| > 1$. Решения $\mathcal{I}$ и $\psi(\mathcal{I})$ связаны: $\mathcal{I}$ имеет решение тогда и только тогда, когда $\psi(\mathcal{I})$ имеет решение на Proj_E. Эта лемма является следствием замечания 3.15 и примера 2.17 из [20].

Рассмотрим произвольное минорное условие $\mathcal{T}$. Покажем, что для произвольного $E, |E| > 1$, решение $\mathcal{T}$ на множестве проекций Proj_E соответствует решению этого минорного условия на множестве функций с ровно одной существенной переменной.

Лемма 8. *Пусть $S = \{f_1, f_2, ..., f_k\}$ – сигнатура, $\mathcal{T}$ – минорное условие над S, E, V – произвольные множества, $|E|, |V| > 1$, $n \geq 4$, $\mathcal{F}_V^{un}$ – множество функций, определённых на V, существенно зависящих ровно от одной переменной. Тогда $\mathcal{T}$ имеет решение на $\mathcal{F}_V^{un}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ имеет решение на* Proj_E.

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}$ имеет решение на Proj_E. Любое множество проекций из Proj_E будет соответствовать аналогичному множеству проекций на Proj_V. Так как $|V| > 1$, то $\mathrm{Proj}_V \subset \mathcal{F}_V^{un}$, и $\mathcal{T}$ имеет решение на $\mathcal{F}_V^{un}$.

Пусть $\mathcal{T}$ имеет решение на $\mathcal{F}_V^{un}$. Рассмотрим $P = \{p_1, p_2, ..., p_l\}$ – множество функций из решения. Пусть $F : S \to P$ – решение. Каждая функция из P имеет вид

$$p_i(x_{i_1}, ..., x_{i_{n_i}}) = g_i(x_{i_j})$$

для некоторой унарной g_i и $j \in \{1, ..., n_i\}$, $i \in \{1, ..., l\}$. Построим отображение $F' : S \to \mathrm{Proj}_V$ следующим образом: если

$$F(f_i) = g_i(x_{i_j}),$$

то

$$F'(f_i) = x_{i_j}.$$

Данное отображение является решением $\mathcal{T}$: если при подстановке F тождество принимало вид $g(x_t) = g(x_t)$ для некоторой переменной x_t и унарной функции g, то при подстановке F' это тождество примет вид $x_t = x_t$. Отсюда, $\mathcal{T}$ имеет решение на Proj_V, которое соответствует решению на Proj_E. □

Следствие 4. *Пусть $n \geq 4$, $\mathcal{I}$ – произвольный экземпляр* $\mathrm{CSP}(1IN3)$. *Тогда $\mathcal{I}$ имеет решение тогда и только тогда, когда $\psi(\mathcal{I})$ имеет решение на* $\mathrm{SPol}(C_n^{ref})$.

Рассмотрим произвольный полиморфизм $f(x_1, ..., x_k) \in \mathrm{Pol}(C_n^{ref})$. Он определяется множеством своих значений на всех n^k наборах переменных из E_n^k. При этом $f(x_1, ..., x_k)$ является полиморфизмом отношения $C_n^{ref} \iff \forall x_1, ...x_k, y_1, ..., y_k \in E_n : \rho((x_1, ..., x_k), (y_1, ..., y_k)) \leq 1 \Rightarrow$

$(f(x_1, ..., x_k), f(y_1, ..., y_k)) \in C_n^{ref}$. Тогда, если закодировать значения полиморфизма n^k переменными $f(0, ..., 0), ..., f(n-1, ..., n-1)$, то определение полиморфизма можно записать в виде формулы $\mathcal{J}_f$ над отношением C_n^{ref}:

$$\mathcal{J}_f = \bigwedge_{\substack{x_1,...,x_k,y_1,...,y_k \in E_n: \\ \rho((x_1,...,x_k),(y_1,...,y_k)) \leq 1}} C_n^{ref}(f(x_1, ..., x_k), f(y_1, ..., y_k)).$$

Иными словами, необходимо рассмотреть все соседние наборы $(x_1, ..., x_k)$, $(y_1, ..., y_k) \in E_n^k$ и записать для них условие $C_n^{ref}(f(x_1, ..., x_k), f(y_1, ..., y_k))$.

Для произвольной сигнатуры $\Sigma = \{f_1, ..., f_l\}$ требование того, что все $f_1, ..., f_l$ являются полиморфизмами C_n^{ref} можно записать в виде формулы $\mathcal{J}_\Sigma$:

$$\mathcal{J}_\Sigma = \bigwedge_{i \in \{1,...,l\}} \mathcal{J}_{f_i}.$$

Рассмотрим произвольное минорное условие $\mathcal{T}$ над $\Sigma = \{f_1, ..., f_l\}$. Построим формулу $\phi(\mathcal{T})$ над C_n^{ref} следующим образом: для каждого тождества $\mathcal{T}$ вида $f_i(x_{i,1}, ...x_{i,n_i}) = f_j(x_{j,1}, ...x_{j,n_j})$ отождествим в $\mathcal{J}_\Sigma$ значения $f_i(x_{i,1}, ...x_{i,n_i})$ и $f_i(x_{i,1}, ...x_{i,n_i})$ на всех наборах переменных $x_{i,1}, ...x_{i,n_i}$, $x_{j,1}, ...x_{j,n_j} \in E_n$. Набор полиморфизмов, удовлетворяющий $\mathcal{T}$, задает подстановку, которая по построению удовлетворяет $\phi(\mathcal{T})$. Аналогично, любое решение $\phi(\mathcal{T})$ соответствует набору полиморфизмов, который является решением $\mathcal{T}$. Отсюда, справедлива следующая лемма:

Лемма 9. *Пусть $\mathcal{T}$ – минорное условие. Тогда каждое решение $\mathcal{T}$ на $\mathrm{Pol}(C_n^{ref})$ соответствует решению $\phi(\mathcal{T})$, а каждое решение $\phi(\mathcal{T})$ соответствует решению $\mathcal{T}$ на $\mathrm{Pol}(C_n^{ref})$. Если $\mathcal{T}$ имеет решение на $\mathrm{SPol}(C_n^{ref})$, то $\phi(\mathcal{T})$ имеет сюръективное решение.*

Рассмотрим $\mathcal{I}$ – экземпляр CSP(1IN3). Пусть $\psi(\mathcal{I})$ задается над сигнатурой $\Sigma_\mathcal{I} = \{f_1, ..., f_k, u_1, ..., u_l\}$, где $f_1, ..., f_k$ – трехместные, $u_1, ..., u_l$ – двуместные. Рассмотрим формулу $\phi(\psi(\mathcal{I}))$. По следствию 4 и лемме 10 если $\mathcal{I}$ имеет решение, то $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ имеет сюръективное решение. Докажем, что для $n \geq 7$ если $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ имеет сюръективное решение, то $\psi(\mathcal{I})$ имеет решение на $\mathrm{SPol}(C_n^{ref})$ (откуда по следствию 4 будет следовать, что $\mathcal{I}$ имеет решение).

Рассмотрим сюръективное решение $\phi(\psi(\mathcal{I}))$. Каждая переменная в этом решении соответствует значению полиморфизма $p_i(x, y, z)$ для некоторых $i \leq k, x, y, z \in E_n$ (по построению каждая двуместная $p_i, i > k$ получается из некоторой трехместной $p_j, j \leq k$ путем отождествления пары переменных). По построению $\forall i, j \in \{1, ..., k\}, x \in E_n : p_i(x, x, x) = p_j(x, x, x)$. Через $p(x, x, x)$ будем обозначать значение каждой $p_i(x, x, x)$.

Диагональю решения d будем называть количество различных значений $p(x,x,x)$ на всех $x \in E_n$, $1 \leq d \leq n$. Заметим, что если показать, что $d = n$, то это докажет, что каждый полиморфизм $p_1, ..., p_{k+l}$ является сюръективным.
Докажем несколько лемм, помогающих оценить d.

Лемма 10. *Для любых $x, y, z \in E_n$ существует $r \in E_n$ такой, что $\rho((x,y,z),(r,r,r)) \leq c$, $c = \lceil \frac{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}{2} \rceil$.*

Доказательство. Заметим, что если в E_n есть путь длины s, то все элементы, через которые проходит этот путь (включая начальный и конечный), лежат в $\lceil \frac{s}{2} \rceil$ окрестности какого-то элемента E_n.

Возьмем произвольные $x, y, z \in E_n$. Они соответствуют вершинам x, y, z в C_n^{ref}. Между любыми двумя из выбранных вершин есть два пути: один имеет длину s и не проходит через третью вершину, другой проходит через третью вершину и имеет длину $n - s$. Можно выбрать две вершины так, чтобы путь, который не проходит через третью вершину, имел длину $s \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Отсюда, путь между этими вершинами, проходящий через третью вершину, имеет длину $s' \leq n - \lceil \frac{n}{3} \rceil = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$. Значит, эти вершины лежат в $c = \lceil \frac{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}{2} \rceil$-окрестности какого-то элемента r, откуда $\rho(x,r) \leq c$, $\rho(y,r) \leq c$ и $\rho(z,r) \leq c$. $\square$

Лемма 11. *Пусть f – k-местный полиморфизм C_n^{ref}, $\overline{x}, \overline{y} \in E_n^k$, $f(\overline{x}) = a$, $f(\overline{y}) = b$, P – путь из $\overline{x}$ в $\overline{y}$. Тогда P проходит через элементы со значениями $a \oplus 1, a \oplus 2, ..., b \ominus 1$ или значениями $b \oplus 1, b \oplus 2, ..., a \ominus 1$.*

Доказательство. Пусть P имеет вид

$$P = \overline{x^0} \text{ - } \overline{x^1} \text{ - ... - } \overline{x^s},$$

где $\overline{x^0} = \overline{y}$, $\overline{x^s} = \overline{y}$. Рассмотрим последовательность значений элементов этого пути в f. Так как f – полиморфизм, то для любого $i \in \{0, ..., s-1\}$ элементы $f(\overline{x^i})$ и $f(\overline{x^{i+1}})$ являются соседями. Тогда эта последовательность образует путь G в E_n:

$$G = f(\overline{x^0}) \text{ - } f(\overline{x^1}) \text{ - ... - } f(\overline{x^s}).$$

G соответствует пути в графе C_n^{ref} из вершины $f(\overline{x^0}) = a$ в вершину $f(\overline{x^s}) = b$. Этот путь проходит через вершины $a \oplus 1, a \oplus 2, ..., b \ominus 1$ или $b \oplus 1, b \oplus 2, ..., a \ominus 1$, откуда P также проходит через элементы с этими значениями. $\square$

Лемма 12. *Если произвольный $f \in \mathrm{Pol}(C_n^{ref})$ принимает больше, чем $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ значений, то он сюръективен.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{Pol}(C_n^{ref})$ принимает только m значений $s, s\oplus 1, ..., s\oplus m\ominus 1$ (по лемме 11 f должна принимать последовательные значения). Пусть также $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 < m < n$. Заметим, что в таком случае f не принимает $s \ominus 1$, $s \oplus m$. Тогда существуют $\overline{x}$, $\overline{y}$ такие, что $f(\overline{x}) = s$, $f(\overline{y}) = s\oplus m\ominus 1$. По лемме 1 $\rho(\overline{x}, \overline{y}) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, значит, по лемме 2 существует путь из $\overline{x}$ в $\overline{y}$ длиной не более, чем $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Однако, по лемме 11 любой путь из $\overline{x}$ в $\overline{y}$ должен принимать все $m-2$ промежуточных значений, отсюда, длина этого пути должна быть $m-1$. Но $m-1 > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Противоречие. Значит, либо $m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, либо $m = n$. □

Лемма 13. *Пусть $\mathcal{I}$ – произвольный экземпляр задачи* CSP$(1IN3)$. *Тогда для каждого сюръективного решения $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ диагональ этого решения $d \geq n - 2c$, где $c = \lceil \frac{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}{2} \rceil$.*

Доказательство. По лемме 10 любой элемент $(x, y, z) \in E_n^3$ находится на расстоянии не больше, чем c от какого-то диагонального (r, r, r), при этом из сюрьективности каждое значение $\{0, ..., n-1\}$ принимается в какой-то точке (x, y, z) на какой-то функции p_i. Это значит, что если на диагонали принимаются значения $\{s, s\oplus 1, ..., s\oplus d\ominus 1\}$, то c-окрестность этих значений должна покрывать все $\{0, ..., n-1\}$, то есть $d + 2c \geq n$. □

Лемма 14. *Пусть $\mathcal{I}$ – произвольный экземпляр* CSP$(1IN3)$. *Для каждого сюръективного решения $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ верно:*

- *Если n – чётное, то диагональ решения $d = n$ или $d < 3$.*
- *Если n – нечётное, то диагональ решения $d = n$ или $d < 2$.*

Доказательство. Пусть n – чётное, $d \geq 3$, на диагонали принимаются значения $s, s\oplus 1, s\oplus 2$. Пусть $p_1, p_2, ..., p_k$ – решение, $\forall i \in \{1, ..., k\}$: $p_i(r, r, r) = s \oplus 1$.
$\exists x, y, z \in E_n, j \in \{1, ..., k\}$: $p_j(x, y, z) = \frac{n}{2} \oplus s \oplus 1$. По лемме 1 $\rho((x, y, z), (r, r, r)) \leq \frac{n}{2}$, откуда по лемме 2 между этими элементами есть путь длины не более, чем $\frac{n}{2}$, принимающий на p_j значения

$$s \oplus 1, s \oplus 2, ..., \frac{n}{2} \oplus s, \frac{n}{2} \oplus s \oplus 1$$

или

$$\frac{n}{2} \oplus s \oplus 1, \frac{n}{2} \oplus s \oplus 2, ..., s, s \oplus 1.$$

Заметим, что этот путь не принимает либо s, либо $s \oplus 2$. При этом, оба этих значения принимаются на диагонали. Тогда функция p_j всего принимает как минимум $\frac{n}{2} + 2$ значения, откуда по лемме 11 она сюрьективна, и по следствию 3 $d = n$.

Пусть теперь n – нечётное, $d \geq 2$, на диагонали принимаются элементы $s, s \oplus 1$. Пусть $\forall i \in \{1, ..., k\} : p_i(r, r, r) = s \oplus 1$. Из сюръективности $\exists x, y, z \in E_n, j \in \{1, ..., k\} : p_j(x, y, z) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus s \oplus 1$. По лемме 1 $\rho((x, y, z), (r, r, r)) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, откуда по лемме 2 между этими элементами есть путь длины не более, чем $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Этот путь принимает на p_j значения

$$s \oplus 1, s \oplus 2, ..., \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus s, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus s \oplus 1$$

(и не принимает значение s), откуда всего функция p_j принимает $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \oplus 2$ значения, значит, по лемме 12 она сюръективна, и по следствию 3 $d = n$. $\square$

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{I}$ – произвольный экземпляр* CSP($1IN3$)*, $n \geq 7$. Тогда $\psi(\mathcal{I})$ имеет решение на* $\mathrm{SPol}(C_n^{ref})$ *тогда и только тогда, когда $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ имеет сюръективное решение.*

Доказательство. Пусть $\psi(\mathcal{I})$ задается над $\Sigma_{\mathcal{I}} = \{f_1, ..., f_k, u_1, ..., u_l\}$, где $f_1, ..., f_k$ – трехместные символы, $u_1, ..., u_l$ – двуместные.

Пусть $\psi(\mathcal{I})$ имеет решение на $\mathrm{SPol}(C_n^{ref})$. Рассмотрим решение – множество сюръективных полиморфизмов $p_1, ..., p_k, p_{k+1}, ..., p_{k+l}$. Оно соответствует подстановке в переменные $\phi(\psi(\mathcal{I}))$. По построению эта подстановка будет решением, при этом, так как каждая функция $p_1, ..., p_{k+l}$ – сюръективная, то и подстановка в $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ будет сюръективной.

Пусть существует сюръективное решение $\phi(\psi(\mathcal{I}))$. Оно соответствует набору полиморфизмов $p_1, ..., p_k, p_{k+1}, ..., p_{k+l}$. Пусть d – диагональ этого решения. Пусть также $d < n$. Тогда по лемме 14 $d < 3$ для четных n и $d < 2$ для нечётных n. Но по лемме 13 $d \geq n - 2c(n)$, где $c(n) = \lceil \frac{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}{2} \rceil$. Пусть $t(n) = n - 2c(n)$. Заметим, что $t(n+6) = t(n) + 2$. При этом $t(7) = 3, t(8) = 2, t(9) = 3, t(10) = 4, t(11) = 3, t(12) = 4$. Отсюда для четных n таких, что $n \geq 10$ верно $d \geq n - 2c(n) \geq 3$, но $d < 3$ – противоречие. Аналогично, для нечетных n таких, что $n \geq 7$ верно $d \geq n - 2c(n) \geq 2$, но $d < 2$. Отсюда, для $n = 7, n \geq 9$ имеем $d = n$, каждая функция принимает на диагональных элементах все значения, значит, сюръективное решение $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ соответствует решению $\psi(\mathcal{I})$ на $\mathrm{SPol}(C_n^{ref})$.

Рассмотрим теперь случай $n = 8$. Из леммы 14 следует, что для любого сюръективного решения $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ верно $d < 3$ или $d = 8$. При этом, если $d < 8$, то из леммы 13 следует, что $d \geq 2$.

Пусть $d = 2$. Тогда на диагональных элементах принимаются какие-то значения $s, s \oplus 1$. Пусть m – число различных диагональных элементов, на которых принимается значение s, $1 \leq s \leq 8$. Тогда значение $s \oplus 1$ принимается на $8 - m$ элементах. Из сюръективности решения существуют $i, j \in \{1, ..., k\}$, $x, y, z, x', y', z' \in E_8$ такие, что $p_i(x, y, z) = s \oplus 4$ и $p_j(x', y', z') = s \oplus 5$. Расстояние от (x, y, z) до всех (r, r, r) таких, что

$p_i(r,r,r)=s$ должно быть 4. Заметим, что таких элементов может быть не более трех: это $(x\oplus 4, x\oplus 4, x\oplus 4)$, $(y\oplus 4, y\oplus 4, y\oplus 4)$ и $(z\oplus 4, z\oplus 4, z\oplus 4)$ (некоторые из них могут совпадать). Отсюда, $m \le 3$. Аналогично, если $p_j(x',y',z') = s\oplus 5$, то значение $s\oplus 1$ может приниматься только на элементах $(x'\oplus 4, x'\oplus 4, x'\oplus 4)$, $(y'\oplus 4, y'\oplus 4, y'\oplus 4)$ и $(z'\oplus 4, z'\oplus 4, z'\oplus 4)$ откуда $8-m \le 3$. Противоречие. Отсюда, при $n=8$ верно $d=n$ и сюръективное решение $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ соответствует решению $\psi(\mathcal{I})$ на $\mathrm{SPol}(C_n^{ref})$. □

Наконец, докажем теорему 3 об NP-трудности $\mathrm{SCSP}(C_n^{ref})$.

Теорема 3. SCSP*(C_n^{ref}) является NP-трудной при* $n \ge 7$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный экземпляр $\mathcal{I} \in \mathrm{CSP}(\mathit{1IN3})$. По следствию 4 $\mathcal{I}$ имеет решение тогда и только тогда, когда $\psi(\mathcal{I})$ имеет решение на $\mathrm{SPol}(C_n^{ref})$, при этом по теореме 4 при $n \ge 7$ $\psi(\mathcal{I})$ имеет решение на $\mathrm{SPol}(C_n^{ref})$ тогда и только тогда, когда существует сюръективное решение $\phi(\psi(\mathcal{I}))$. Отсюда при $n \ge 7$ произвольный экземпляр $\mathcal{I} \in \mathrm{CSP}(1IN3)$ имеет решение тогда и только тогда, когда определенный экземпляр $\mathrm{SCSP}(C_n^{ref})$ имеет решение. Таким образом мы свели решение $\mathrm{CSP}(1IN3)$ к решению $\mathrm{SCSP}(C_n^{ref})$. При этом $\mathrm{CSP}(1IN3)$ является NP-трудной, откуда при $n \ge 7$ $\mathrm{SCSP}(C_n^{ref})$ также является NP-трудной. □

2.3. Контрпримеры для случаев $n = 5, 6$

В данном разделе мы продемонстрируем примеры, которые показывают, почему предложенная в разделе 2.2 конструкция не подходит для определения сложности рефлексивных циклов длины 5, 6. Так как доказательство строилось на сведении NP-трудной задачи $\mathrm{CSP}(1IN3)$, достаточно показать такой экземпляр $\mathcal{I}$ этой задачи, что он не имеет удовлетворяющей подстановки, тогда как формула $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ имеет сюръективную подстановку.

Теорема 5. *Пусть $n = 5, 6$. Тогда существует такой экземпляр $\mathcal{I}$ задачи* $\mathrm{CSP}(1IN3)$*, что $\mathcal{I}$ не имеет решения, но $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ имеет сюръективное решение.*

Доказательство. Рассмотрим следующий $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} = 1IN3(x_1,x_2,x_3) \wedge 1IN3(x_4,x_5,x_6) \wedge 1IN3(x_1,x_5,x_7).$$

Очевидно, он не имеет решения, так как $\mathrm{1IN3}(x_1,x_1,x_1)$ либо содержит три единицы, либо не содержит единиц вообще. Минорное условие $\psi(\mathcal{I})$ определяется следующим образом:

$$\begin{array}{lll}
f_1(y,x,x) = g_1(x,y) & f_2(y,x,x) = g_4(x,y) & f_3(y,x,x) = g_1(x,y)\\
f_1(x,y,x) = g_2(x,y) & f_2(x,y,x) = g_5(x,y) & f_3(x,y,x) = g_5(x,y)\\
f_1(x,x,y) = g_3(x,y) & f_2(x,x,y) = g_6(x,y) & f_3(x,x,y) = g_7(x,y)
\end{array}$$

$$f_1(x,x,x) = f_2(x,x,x)$$
$$f_2(x,x,x) = f_3(x,x,x).$$

Любое решение $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ соответствует решению $\psi(\mathcal{I})$ на полиморфизмах C_n^{ref}.

Пусть $n = 5$. Рассмотрим следующие полиморфизмы:

$$p_1(x,y,z) = \begin{cases} 2, & \text{если } (x,y,z) = (2,3,0), \\ 1, & \text{если } \rho((x,y,z),(2,3,0)) = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$p_2(x,y,z) = \begin{cases} 3, & \text{если } (x,y,z) = (1,4,2), \\ 4, & \text{если } \rho((x,y,z),(1,4,2)) = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$p_3(x,y,z) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x,y,z) \in \{(1,4,4),(2,4,4),(3,4,4)\} \\ 4, & \text{если } (x,y,z) \in \begin{matrix} \{(1,0,1),(1,1,1),(1,2,1), \\ (2,0,2),(2,1,1),(2,2,2)\} \end{matrix} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$p_{1_1}(x,y) = p_1(y,x,x), \quad p_{2_1}(x,y) = p_2(y,x,x),$$
$$p_{1_2}(x,y) = p_1(x,y,x), \quad p_{2_2}(x,y) = p_2(x,y,x),$$
$$p_{1_3}(x,y) = p_1(x,x,y), \quad p_{2_3}(x,y) = p_2(x,x,y),$$
$$h(x,y) = 0.$$

Затем, рассмотрим следующее отображение F:

$$F(f_1) = p_1, \quad F(g_3) = p_{1_3},$$
$$F(f_2) = p_2, \quad F(g_4) = p_{2_1},$$
$$F(f_3) = p_3, \quad F(g_5) = p_{2_2},$$
$$F(g_1) = p_{1_1}, \quad F(g_6) = p_{2_3},$$
$$F(g_2) = p_{1_2}, \quad F(g_7) = h.$$

Можно легко убедиться в том, что это отображение действительно будет решением $\psi(\mathcal{I})$ на $\mathrm{Pol}(C_5^{ref})$. При этом, решение $\phi(\psi(\mathcal{I}))$, соответствующее F, будет сюръективным, так как $p_1(0,0,0) = 0, p_1(1,4,0) = 1, p_2(2,3,0) = 2, p_2(4,1,2) = 3, p_2(0,0,1) = 4$. Значит, $\mathcal{I}$ не имеет решения, а $\psi(\phi(\mathcal{I}))$ имеет сюръективное решение.

Пусть теперь $n = 6$. Если полиморфизмы из решения $\psi(\mathcal{I})$ не сюръективны, то, согласно леммам 14, 15, диагональ d этого решения должна быть равна 2. Рассмотрим следующие полиморфизмы:

$$p_1(x,y,z) = \begin{cases} 3, & \text{если } (x,y,z) = (0,2,4), \\ 2, & \text{если } \rho((x,y,z),(0,2,4)) = 1, \\ 0, & \text{если } (x,y,z) \in \{(1,1,1),(3,3,3),(5,5,5)\}, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$p_2(x,y,z) = \begin{cases} 4, & \text{если } (x,y,z) = (1,3,5), \\ 5, & \text{если } \rho((x,y,z),(1,3,5)) = 1, \\ 1, & \text{если } (x,y,z) \in \{(0,0,0),(2,2,2),(4,4,4)\}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$p_3(x,y,z) = \begin{cases} 2, & \text{если } (x,y,z) \in \{(5,3,3),(0,3,3),(1,3,3)\} \\ 5, & \text{если } (x,y,z) \in \{(0,2,0),(0,3,0),(0,4,0)\} \\ 0, & \text{если } (x,y,z) \in \{(1,1,1),(3,3,3),(5,5,5)\}, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\begin{gathered} p_{1_1}(x,y) = p_1(y,x,x), \quad p_{2_1}(x,y) = p_2(y,x,x), \\ p_{1_2}(x,y) = p_1(x,y,x), \quad p_{2_2}(x,y) = p_2(x,y,x), \\ p_{1_3}(x,y) = p_1(x,x,y), \quad p_{2_3}(x,y) = p_2(x,x,y), \\ h(x,y) = 0. \end{gathered}$$

Затем, рассмотрим следующее отображение:

$$\begin{gathered} F(f_1) = p_1, \quad F(g_3) = p_{1_3}, \\ F(f_2) = p_2, \quad F(g_4) = p_{2_1}, \\ F(f_3) = p_3, \quad F(g_5) = p_{2_2}, \\ F(g_1) = p_{1_1}, \quad F(g_6) = p_{2_3}, \\ F(g_2) = p_{1_2}, \quad F(g_7) = h. \end{gathered}$$

Данное отображение удовлетворяет всем тождествам (так, на диагональных элементах все полиморфизмы совпадают и выводят 0 или 1). Значит, F является решением $\psi(\mathcal{I})$ на $\mathrm{Pol}(C_6^{ref})$. Подстановка, в $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ соответствующая этому решению, является сюръективной, так как $p_1(1,1,1) = 0, p_1(0,0,0) = 1, p_1(1,2,3) = 2, p_1(0,2,4) = 3, p_2(1,3,5) = 4, p_2(0,2,4) = 5$. Значит, $\mathcal{I}$ не имеет решения, но $\phi(\psi(\mathcal{I}))$ имеет сюръективное решение.

$\square$

Complexity of surjective homomorphism problem to reflexive cycles

Korchagin N.P.

In this article we explore the complexity of the decision problem which takes a graph as an input and asks, if there is a surjective homomorphism from it to some fixed graph $\mathcal{G}$. We prove, that if $\mathcal{G}$ is a reflexive cycle with 7 or more vertices, then this problem is NP-hard.

The proof is based on a novel approach, which enables reduction of a constraint satisfaction problem to the problem of satisfying a system of equations, which, in turn, is reduced to solving surjective constraint satisfaction problem.

Keywords: surjective homomorphisms, computation complexity, constraint satisfaction, polymorphisms.

References

[1] Bodirsky, M., Kára, J. & Martin, B. The complexity of surjective homomorphism problems—a survey. *Discrete Applied Mathematics.* **160**, 1680-1690 (2012), https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X12001333

[2] Chen, H. An algebraic hardness criterion for surjective constraint satisfaction. *Algebra Universalis.* **72** pp. 393-401 (2014)

[3] Golovach, P., Johnson, M., Martin, B., Paulusma, D. & Stewart, A. Surjective H-colouring : new hardness results.. *Computability..* **8**, 27-42 (2019), http://dro.dur.ac.uk/24228/

[4] Bulatov, A. A Dichotomy Theorem for Nonuniform CSPs. *2017 IEEE 58th Annual Symposium On Foundations Of Computer Science (FOCS).* pp. 319-330 (2017), http://arxiv.org/abs/1703.03021

[5] Zhuk, D. A Proof of the CSP Dichotomy Conjecture. *J. ACM.* **67** (2020,8), https://doi.org/10.1145/3402029

[6] Focke, J., Goldberg, L. & Živný, S. The Complexity of Counting Surjective Homomorphisms and Compactions. *SIAM Journal On Discrete Mathematics.* **33**, 1006-1043 (2019),

[7] Larose, B., Martin, B. & Paulusma, D. Surjective H-Colouring over Reflexive Digraphs. *ACM Trans. Comput. Theory.* **11** (2018,11), https://doi.org/10.1145/3282431

[8] Vikas, N. Computational Complexity Relationship between Compaction, Vertex-Compaction, and Retraction. *Journal Of Discrete Algorithms.* **52-53** pp. 168-181 (2018), https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1570866718301631, Combinatorial Algorithms – Special Issue Devoted to Life and Work of Mirka Miller

[9] Vikas, N. A complete and equal computational complexity classification of compaction and retraction to all graphs with at most four vertices and some general results. *Journal Of Computer And System Sciences.* **71**, 406-439 (2005), https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022000004000911

[10] Martin, B. & Paulusma, D. The computational complexity of disconnected cut and 2K2-partition. *Journal Of Combinatorial Theory, Series B.* **111** pp. 17-37 (2015), https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095895614001026

[11] Schaefer, T. The Complexity of Satisfiability Problems. *Proceedings Of The Tenth Annual ACM Symposium On Theory Of Computing*. pp. 216-226 (1978), https://doi.org/10.1145/800133.804350

[12] Barto, L. Algebraic Theory of Promise Constraint Satisfaction Problems, First Steps. *Fundamentals Of Computation Theory: 22nd International Symposium, FCT 2019, Copenhagen, Denmark, August 12-14, 2019, Proceedings*. pp. 3-17 (2019), https://doi.org/10.1007/978-3-030-25027-0_1

[13] Vikas, N. Algorithms for Partition of Some Class of Graphs under Compaction and Vertex-Compaction. *Algorithmica*. **67** pp. 180 - 206 (2011)

[14] Zhuk, D. No-Rainbow Problem and the Surjective Constraint Satisfaction Problem. *Proceedings Of The 36th Annual ACM/IEEE Symposium On Logic In Computer Science*. (2021), https://doi.org/10.1109/LICS52264.2021.9470632

[15] Golovach, P., Paulusma, D. & Song, J. Computing vertex-surjective homomorphisms to partially reflexive trees. *Theoretical Computer Science*. **457** pp. 86-100 (2012), https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397512006561

[16] Vikas, N. Computational complexity of compaction to irreflexive cycles. *Journal Of Computer And System Sciences*. **68**, 473-496 (2004), https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022000003000345

[17] Vikas, N. Computational Complexity of Graph Partition under Vertex-Compaction to an Irreflexive Hexagon. *42nd International Symposium On Mathematical Foundations Of Computer Science, MFCS 2017, August 21-25, 2017 - Aalborg, Denmark*. **83** pp. 69:1-69:14 (2017), https://doi.org/10.4230/LIPIcs.MFCS.2017.69

[18] Larivière, I., Larose, B. & Pullas, D. Surjective polymorphisms of reflexive cycles. (2022)

[19] Feder, T. & Vardi, M. The Computational Structure of Monotone Monadic SNP and Constraint Satisfaction: A Study through Datalog and Group Theory. *SIAM Journal On Computing*. **28**, 57-104 (1998),

[20] Barto, L., Bulın, J., Krokhin, A. & Opršal, J. Algebraic Approach to Promise Constraint Satisfaction. *J. ACM*. **68** (2021,7), https://doi.org/10.1145/3457606