О вычислимости целочисленных функций коллективами из двух автоматов

В. В. Ушакова[1]

В данной работе исследуется вычислимость одноместных частичных функций счётнозначной логики коллективами автоматов. Найден класс функций, вычислимых коллективами из двух автоматов. Это периодические функции и простейшие линейные функции, которые, начиная с некоторого значения аргумента x ведут себя, как функция $f(x) = x + C$. Показано, что класс одноместных частичных функций счётнозначной логики, вычислимых коллективами из трёх автоматов, является более широким.

Ключевые слова: вычислимость, автомат, коллективы автоматов, периодические функции.

1. Введение

В данной работе рассматривается понятие вычислимости одноместных частичных функций $f(x) : \mathbb{N}_0' \to \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0' \subseteq \mathbb{N}_0$) коллективом автоматов на целочисленной прямой. Значение аргумента задаётся расстоянием между определёнными автоматами коллектива в его начальной расстановке, а результат равен расстоянию между определёнными автоматами коллектива в его финальной расстановке, при условии, что коллектив останавливается. Аналогично определяется вычислимость частичных многоместных функций: значение каждого аргумента задаётся расстоянием между определёнными автоматами коллектива в его начальной расстановке, а результат равен расстоянию между определёнными автоматами коллектива в его финальной расстановке, при условии, что коллектив останавливается.

Вычислительные возможности коллективов автоматов, очевидно, не больше, чем вычислительные возможности машин Тьюринга. Соответственно, классы функций, вычислимые коллективами автоматов, являются подклассами вычислимых функций.

Настоящая работа нацелена на расслоение всех одноместных вычислимых функций на подклассы по минимальному числу n автоматов в коллективе, необходимом для вычисления данной функции. Класс ча-

[1] *Ушакова Валентина Владимировна* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: valentina.ushakova92@gmail.com.

Ushakova Valentina Vladimirovna — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

стичных (одноместных) функций, вычислимый коллективами из n автоматов, обозначается, как $F_{n,1}$. Начиная с некоторого n, коллектив из n автоматов может моделировать любую, в том числе универсальную машину Тьюринга. Это следует из результатов, имеющихся в [5]. Т.е. соответствующий класс функций $F_{n,1}$ становится равным классу всех одноместных вычислимых функций F_1. Можем считать, что функция тем сложнее, чем больше автоматов требуется для её вычисления.

Промежуточная градация сложности между указанными функциями возможна при помощи понятия сильной вычислимости. Функция сильно вычислима коллективом автоматов, если она может быть вычислена этим коллективом при условии неподвижности первого автомата. Несложно увидеть, что класс частичных одноместных функций, сильно вычислимых коллективами из n автоматов $\hat{F}_{n,1}$ удовлетворяет следующему соотношению: $F_{n-1,1} \subseteq \hat{F}_{n,1} \subseteq F_{n,1}$, т.е. задаётся промежуточная градация сложности.

Таким образом, в данной работе исследуется один из новых видов сложности вычислимости функций, который до недавних пор никем не исследовался.

В данной работе найдены классы $\hat{F_{2,1}}$ и $F_{2,1}$.

2. Основные определения и понятия

Обозначим множества натуральных и целых чисел как $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$, соответственно. Положим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Множество целых точек на прямой будем обозначать символом $\mathbb{L}_\mathbb{Z}$, рассматривая это множество как геометрический объект, а именно, как лабиринт, в котором могут перемещаться автоматы. Точку на этой прямой будем идентифицировать при помощи ее координаты x. Назовем $r-$окрестностью точки x_0 множество целых точек $D_{x_0,r} = \{x \in \mathbb{L}_\mathbb{Z} | \ |x - x_0| \leq r\}$.

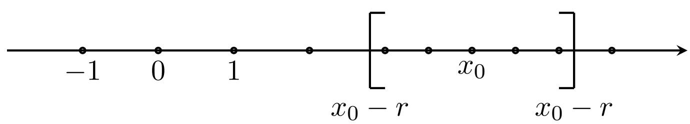

Рис. 1.

В данной работе рассматривается поведение коллектива автоматов $K = (W_1(R, V), ..., W_m(R, V))$ в лабиринте $\mathbb{L}_\mathbb{Z}$, где $m \geq 2$.

Будем использовать определение автомата, аналогичное рассматриваемому в [1], а определение коллектива автоматов, аналогичное рассматриваемому в [2].

Под автоматом будем понимать инициальный конечный автомат вида $\mathcal{A}=(A, Q, B, \varphi, \psi, q_0, R, V)$, где A- входной, B- выходной, Q- внутренний алфавиты автомата $\mathcal{A}$, $\varphi : Q\times A \to Q$ и $\psi : Q\times A \to B$ - функции переходов и выходов $\mathcal{A}$, соответственно, $q_0 \in Q$ - его начальное состояние, $R\in \mathbb{N}$ - обзор автомата, V - скорость автомата, где $V \leq R$. Алфавит A определяет возможности $\mathcal{A}$ "видеть" происходящее вокруг, а алфавит B- его возможности перемещаться. Алфавит Q и функции φ и ψ задают внутреннюю логику автомата.

Пусть автомат $\mathcal{A}$ со скоростью V и обзором R находится в точке x_0. Множество $D_{x_0,R}$ называется зоной обзора $\mathcal{A}$.

Фиксируем произвольные расположения и состояния всех автоматов коллектива K в лабиринте $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$. Состояние зоны обзора автомата W_j $(1 \leq j \leq m)$ определяется расположением других автоматов коллектива в зоне обзора W_j, а также состояниями автоматов, попавших в зону обзора W_j. Входным алфавитом автомата W_j является множество всех возможных состояний его конечной зоны обзора.

Выходным алфавитом автомата W_j, перемещающегося в лабиринте $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$, является множество $B = D_{0,V}$, где параметр $V \in \mathbb{N}$ называется скоростью автомата W_j.

В каждый такт времени каждый автомат W_j получает на вход символ, кодирующий состояние его зоны обзора. В соответствии со своими функциями переходов и выходов, W_j вырабатывает свой выходной символ b и меняет свое состояние. При этом, если W_j в такт t находился в точке $x(t)$ и выдал выходной символ $b(t)$, это означает, что он переходит в точку $x(t+1) = x(t) + b(t)$, где и будет находиться в такт $(t+1)$.

Все автоматы коллектива перемещаются одновременно, в соответствии со своими функциями переходов и выходов каждый.

Будем говорить, что автомат неподвижен на отрезке времени, если его выходной символ на этом отрезке времени равен 0 и его состояние не меняется. Будем говорить, что некий автомат остановился в такт времени t, если, начиная с этого такта, его выходной символ всегда нулевой и его состояние не меняется (т.е. автомат прекратил передвижение в лабиринте). Будем говорить, что коллектив автоматов K остановился в такт t, если к этому такту остановились все его автоматы.

Будем говорить, что автомат W_i видит автомат W_j, если автомат W_j находится в зоне обзора автомата W_i, то есть расстояние между ними не превосходит R.

Расположение коллектива автоматов $K = (W_1, ..., W_m)(R, V)$ в лабиринте $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$, при котором все автоматы, кроме W_2, находятся в одной и той же точке x_0, а W_2 находится в точке $x_0 + a$ (где $a \in \mathbb{Z}$), назовем a-расстановкой с центром x_0. Пусть дана частичная одноместная функция $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, определённая на подмножестве $\mathbb{N}_0' \subseteq \mathbb{N}_0$. Будем говорить, что коллектив автоматов K вычисляет функцию f, если стартуя в лабиринте $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$ из a-расстановки с любым центром при $a \geq 0$, коллектив K в некоторый такт времени остановится в $f(a)$-расстановке также с любым центром, если $a \in \mathbb{N}_0'$, и не остановится или остановится в расстановке, не являющейся a'-расстановкой ни для какого $a' \geq 0$, иначе. Аналогично можно определить вычислимость многоместных частичных функций.

Функцию назовем вычислимой некоторым классом коллективом κ, если существует коллектив $K \in \kappa$, вычисляющий эту функцию.

Очевидно, что для любого коллектива существует единственная функция, которую он вычисляет. В частности, если автоматы коллектива не останавливаются при старте из любой a-расстановки, коллектив вычисляет нигде не определенную функцию.

Класс всех частичных n-местных функций, вычислимых в $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$ коллективами из m автоматов, имеющих обзор R и скорость V, обозначим как $F_{m,n}^{R,V}$. Очевидно вложение $F_{2,n}^{R,V} \subseteq F_{3,n}^{R,V} \subseteq ... \subseteq F_n$, где F_n-множество всех вычислимых (по Тьюрингу) частичных функций от n переменных. Также очевидно, что класс функций $F_{m,1}^{R,V}$ замкнут относительно суперпозиции при любом m. В данной статье будем рассматривать только одноместные функции, то есть подмножества класса F_1.

Будем говорить, что коллектив автоматов K сильно вычисляет одноместную функцию f, если автомат W_1 неподвижен, при этом, коллектив K, стартуя в лабиринте $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$ из a-расстановки с любым центром при $a \geq 0$, в некоторый такт времени остановится в $f(a)$-расстановке с любым центром, если $a \in \mathbb{N}_0'$, и не остановится или остановится в расстановке, не являющейся a'-расстановкой ни для какого $a' \geq 0$, иначе. Аналогично можно определить сильную вычислимость многоместных частичных функций. Класс всех частичных n-местных функций, сильно вычислимых в $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$ коллективами из m автоматов, имеющих обзор R и скорость V, обозначим как $\hat{F}_{m,n}^{R,V}$. Очевидно вложение $F_{2,n}^{\hat{R},V} \subseteq \hat{F}_{3,n}^{R,V} \subseteq ... \subseteq \hat{F}_{m,n}^{R,V}$. Так же очевидно, что $\hat{F}_{m,n}^{R,V} \subseteq F_{m,n}^{R,V}$, так как все сильно вычислимые функции вычислимы, что следует из определения вычислимых и сильно вычислимых функций.

Последовательности $b_1(t)\,, b_2(t)\,, ..., b_n(t)$ назовем периодическими с общим периодом, если найдутся числа $T \in \mathbb{N}, T_0 \in \mathbb{N}_0$, такие, что для любого $i > T_0$, для любого $k \in \mathbb{N}$, для любой последовательности $b_j(t)$, где $j \in 1, 2, \ldots, n$, выполняется $b_j(i) = b_j(i + kT)$, где T_0 – общий предпериод, а T – общий период. В частности, при $n = 1$ получаем определение периодической последовательности. Периодическую последовательность с предпериодической частью $b(1)b(2)...b(T_0)$ и периодической частью $b(T_0 + 1)....b(T_0 + T)$ обозначим как $b(1)b(2)...b(T_0)(b(T_0 + 1)....b(T_0 + T))$.

Множество $\mathbb{N}_0' \subseteq \mathbb{N}_0$ называется периодическим, если если найдутся числа $T \in \mathbb{N}$, $T_0 \in \mathbb{N}_0$, такие, что $\forall x > T_0$, будет верно, что если $x \in \mathbb{N}_0'$, то $x + k * T \in \mathbb{N}_0', \forall k \in \mathbb{N}$.

Назовем частичную функцию $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ (область определения $\mathbb{N}_0' \subseteq \mathbb{N}_0$ которой - периодическое множество с периодом T и предпериодом T_0) периодической с периодом T и предпериодом T_0 , если $\forall x > T_0$, верно $f(x) = f(x + k * T), \forall k \in \mathbb{N}$ в случае, если функция определена в данных точках и функция f неопределена в обеих точках одновременно иначе.

Для задания автоматов в тексте статьи используются таблицы вида:

Q	A	φ	ψ
q_1^2	$(0, ..., 0, ..., 0)$	q_2^2	2
q_1^2	$(0, ..., q_1^3, ..., 0)$	q_0^2	1
q_2^2	$(0, ..., q_j^k, ..., 0, ..., 0)$	q_3^2	-3
...	...	...	...
q_i^3	$(a_{-V}, a_{-V+1}, ...a_0..., a_{V-1,} a_V)$	q_j^2	5
...	...	...	...
q_{C-1}^2	$(q_1^3, ..., 0, ..., 0)$	q_C^2	0
q_C^2	$(0, ., \{q_2^1, q_5^4\}, .., 0, .., q_8^3., 0)$	q_1^2	2
q_0^2	$(0, ..., q_1^3, ..., 0)$	q_0^2	1

где в первом столбце указано текущее состояние q автомата W_i, во втором столбце указан его входной символ a, в третьем столбце указывается $\varphi(q, a)$ - состояние, в которое автомат должен перейти, а в четвертом столбце указывается выходной символ $v = \psi(q, a), v \in [-V; V]$ - рассстояние, на которое должен сдвинуться автомат вправо или влево. Для удобства в некоторых случаях будем использовать следующие обозначения для выходных символов автоматов: $0 = \varLambda, 1 = \to, -1 = \leftarrow$.

Состояние с номером j автомата W_i будем обозначать q_j^i.

Входной символ автомата во втором столбце понимаем следующим образом: это строка из $2V + 1$ символов. Символ с номером $V + 1$ отвечает за состояние вершины лабиринта, где находится автомат, $V + 1 + i$ - отвечает за состояние вершины лабиринта, находящейся на i клеток правее, $V + 1 - i$ - на i клеток левее. То есть это строка вида:

$a_{-V}, a_{-V+1}, ...a_{-1}, a_0, a_1, ..., a_{V-1,}, a_V$

$a_i = 0$ - в данной клетке отсутствуют автоматы, кроме W_i.

$a_i = q_j^k$ - если в данной клетке есть автомат W_k в состоянии $q_j^k (k \neq i)$.

$a_i = \{q_j^k, ...q_m^l\}$ - если в данной клетке есть отличные от W_i автоматы $W_k, ..., W_l$ в состояниях $q_j^k, .., q_m^l$ соответственно.

Входной символ вида $(0, ..., 0)$ будем называть нулевым.

Если для какой-либо пары (q, a) строка, в которой в первом столбце записано q, а во второй a, в таблице автомата отсутствует, считаем, что автомат, находясь в состоянии q и воспринимая входной символ a стоит на месте и остаётся в том же состоянии q.

При задании автомата таблицей его начальное состояние указывается отдельно.

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть коллектив из двух автоматов при старте из x-расстановки на прямой перемещается так, что до момента времени t_0 автоматы коллектива не видят друг друга. Тогда на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ выходные последовательности и последовательности состояний автоматов коллектива совпадают с периодическими последовательностями, общий предпериод T_0 и общий период T которых удовлетворяют неравенству $T_0 + T \leq n_1 * n_2$, где n_1 и n_2 - количества состояний первого и второго автоматов, соответственно.*

Доказательство. Обозначим последовательности состояний рассматриваемых автоматов как $q_1(t)$ и $q_2(t)$, а их выходные последовательности как $b_1(t)$ и $b_2(t)$.

Пусть $t_0 > n_1 * n_2 + 1$. Так как количество состояний автоматов W_1 и W_2 ограничено и входной символ на рассматриваемом отрезке времени постоянный, найдутся моменты времени i и j, такие что $1 \leq i < j \leq n_1 * n_2 + 1$ и пара состояний $q_1(j)$ и $q_2(j)$ первого и второго автоматов соответственно, будут теми же самыми, что и в момент i. То есть будет выполняться следующая система уравнений:

$$\begin{cases} q_1(i) = q_1(j) \\ q_2(i) = q_2(j) \end{cases}$$

Из функций переходов и выходов конечного автомата мы можем определить выходной символ в момент времени t и состояние автомата в момент времени $t + 1$:

$$\begin{cases} q(t+1) = \varphi(q(t), a(t)) \\ b(t) = \psi(q(t), a(t)) \end{cases}$$

Напишем системы для $t = i$ и $t = j$ для первого автомата:

$$\begin{cases} q_1(i+1) = \varphi(q_1(i), a_1(i)) \\ b_1(i) = \psi(q_1(i), a_1(i)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1(j+1) = \varphi(q_1(j), a_1(j)) \\ b_1(j) = \psi(q_1(j), a_1(j)) \end{cases}$$

Так как $q_1(i) = q_1(j)$, и $a_1(i) = a_1(j)$, получаем, что:
$\varphi(q_1(i), a_1(i)) = \varphi(q_1(j), a_1(j))$ и $\psi(q_1(i), a_1(i)) = \psi(q_1(j), a_1(j))$.
Это означает, что $q_1(i+1) = q_1(j+1)$ и $b_1(i) = b_1(j)$.

Проводя аналогичные рассуждения для второго автомата, получим, что $q_2(i+1) = q_2(j+1)$ и $b_2(i) = b_2(j)$.

То есть из того, что $q_1(i) = q_1(j)$ и $q_2(i) = q_2(j)$ следует, что $q_1(i+1) = q_1(j+1)$ и $q_2(i+1) = q_2(j+1)$, а также $b_1(i) = b_1(j)$ и $b_2(i) = b_2(j)$.

Обозначим $T = j - i$, $T_0 = i - 1$.

Проводя аналогичные рассуждения можно получить, что, до тех пор, пока входной символ не изменится (то есть автоматы коллектива не встретятся), для любого $t \in \mathbb{N}$, такого что $T_0 < t + T \leq t_0$, из того, что выполнено $q_1(t) = q_1(t+T)$ и $q_2(t) = q_2(t+T)$, верно:

$q_1(t+1) = q_1(t+1+T)$ и $q_2(t+1) = q_2(t+1+T)$,
$b_1(t) = b_1(t+T)$ и $b_2(t) = b_2(t+T)$.

Так как $T_0 = i-1, T = j-i, j \leq n_1 * n_2 + 1$, будет верно, что:
$T_0 + T = i - 1 + j - i = j - 1 < n_1 * n_2 + 1$.

Запишем последовательности состояний автоматов коллектива на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$:

$q_1(1)...q_1(T_0)q_1(i)...q_1(j-1)q_1(i+T)...q_1(j-1+T)...q_1(i+kT)...q_1(j-1+kT)...q_1(t_0-1)$

$q_2(1)...q_2(T_0)q_2(i)...q_2(j-1)q_2(i+T)...q_2(j-1+T)...q_2(i+kT)...q_2(j-1+kT)...q_2(t_0-1)$

Исходя из вышеприведенных равенств, последовательности состояний можно записать следующим образом:

$q_1(1)...q_1(T_0)q_1(i)...q_1(j-1)q_1(i)...q_1(j-1)...q_1(i)...q_1(j-1)...q_1(t_0-1)$

$q_2(1)...q_2(T_0)q_2(i)...q_2(j-1)q_2(i)...q_2(j-1)...q_2(i)...q_2(j-1)...q_2(t_0-1)$

Запишем выходные символы автоматов коллектива на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$:

$b_1(1)...b_1(T_0)b_1(i)...b_1(j-1)b_1(i+T)...b_1(j-1+T)...b_1(i+kT)...b_1(j-1+kT)...b_1(t_0-1)$

$b_2(1)...b_2(T_0)b_2(i)...b_2(j-1)b_2(i+T)...b_2(j-1+T)...b_2(i+kT)...b_2(j-1+kT)...b_2(t_0-1)$

Исходя из вышеприведенных равенств, выходные символы можно записать следующим образом:

$b_1(1)...b_1(T_0)b_1(i)...b_1(j-1)b_1(i)...b_1(j-1)...b_1(i)...b_1(j-1)...b_1(t_0-1)$
$b_2(1)...b_2(T_0)b_2(i)...b_2(j-1)b_2(i)...b_2(j-1)...b_2(i)...b_2(j-1)...b_2(t_0-1)$

Рассмотрим следующие периодические последовательности:
$q'_1 = q_1(1)...q_1(T_0)(q_1(i)...q_1(j-1))$
$q'_2 = q_2(1)...q_2(T_0)(q_2(i)...q_2(j-1))$
$b'_1 = b_1(1)...b_1(T_0)(b_1(i)...b_1(j-1))$
$b'_2 = b_2(1)...b_2(T_0)(b_2(i)...b_2(j-1))$

Так как $T_0 + T < n_1 * n_2 + 1$, очевидно, данные последовательности на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ совпадают с рассмотренными выше.

Пусть $t_0 \leq n_1 * n_2 + 1$.
Рассмотрим следующие периодические последовательности:
$q'_1 = (q_1(1), q_1(2)...q_1(t_0-1))$
$q'_2 = (q_2(1), q_2(2)...q_2(t_0-1))$
$b'_1 = (b_1(1), b_1(2)...b_1(t_0-1))$
$b'_2 = (b_2(1), b_2(2)...b_2(t_0-1))$
$T_0 = 0, T = t_0 - 1. T_0 + T = t_0 - 1 < n_1 * n_2 + 1.$

Очевидно, данные последовательности на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ совпадают с первыми t_0 элементами выходных последовательностей автоматов коллектива. $\square$

Лемма 2. *Пусть коллектив $K = (W_1, W_2)$ стартует из неотрицательной x-расстановки и, при этом, автоматы $W_1(R, V)$ и $W_2(R, V)$ никогда не попадают в зону обзора друг друга. Тогда, для любого $x' > x$, эти автоматы, стартуя из x-расстановки также никогда не попадают в зону обзора друг друга.*

Доказательство. Считаем, что при старте из x-расстановки автоматы коллектива K не видятся ни в какой момент времени. Рассмотрим поведение автоматов коллектива K при старте из x-расстановки и при старте из $(x+\delta)$-расстановки, где $\delta > 0$.

Докажем, что при старте из $(x+\delta)$-расстановки автоматы коллектива K не видятся ни в какой момент времени.

Для этого воспользуемся методом математической индукции (по времени).

Для того, чтобы убедиться, что в первый момент времени автоматы коллектива, стартующие из $(x+\delta)$-расстановки не видятся, достаточно вспомнить, что $\delta > 0$ и, так как на расстоянии x автоматы не находились в зонах обзора друг друга, на большем расстоянии они так же не находятся в зонах обзора друг друга.

Пусть стартовав из $(x+\delta)$-расстановки до момента времени t автоматы коллектива не видели друг друга. Покажем, что в момент времени $t+1$ они также не видят друг друга.

Так как автоматы коллектива не находились в зонах обзора друг друга до момента времени t, входные символы до момента времени t будут нулевыми. Так как при старте из x-расстановки автоматы коллектива не видят друг друга, их входные символы так же будут нулевыми, в том числе и в момент времени t. Так как начальное состояние автоматов в обоих случаях одно и то же, входные символы первые t моментов времени одинаковые, их выходные символы и состояния до момента времени $t+1$ будут также одинаковы, а, следовательно, будут равны перемещения автоматов за первые t тактов. Из этого следует, что в момент вемени $t+1$ автоматы коллектива в обоих случаях будут находиться в одних и тех же состояниях, но стартуя из $(x+\delta)$-расстановки, автоматы будут находиться дальше друг от друга, чем стартуя из x-расстановки, на расстояние δ, а значит, так же не видят друг друга. Шаг индукции доказан.

Обозначив $x' = x + \delta$ получим утверждение леммы. □

Следствие 1. *Пусть коллектив $K = (W_1, W_2)$ стартует из неотрицательной x-расстановки и, при этом, найдется момент времени t, в который автоматы $W_1(R,V)$ и $W_2(R,V)$ попадают в зону обзора друг друга. Тогда, для любого $x' < x$, для автоматов $W_1(R,V)$ и $W_2(R,V)$, стартовавших из неотрицательной x'-расстановки также найдется момент времени t', в который автоматы W_1 и W_2 попадают в зону обзора друг друга.*

Действительно, пусть дано x, удовлетворяющее условию следствия. Пусть дано $x' < x$. Предположим, что стартуя из x'-расстановки автоматы не видятся. Получим, что стартуя из x-расстановки автоматы $W_1(R,V)$ и $W_2(R,V)$ коллектива K видятся, и существует x'-расстановка, $x' < x$, такая что автоматы W_1 и W_2 не видятся, что противоречит лемме 2.

Следствие 2. *Пусть коллектив $K = (W_1, W_2)$ стартует из неотрицательной x-расстановки и, при этом, автоматы $W_1(R,V)$ и $W_2(R,V)$ на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ не попадают в зону обзора друг друга. Тогда, для любого $x' > x$, эти автоматы, стартуя из x'-расстановки также на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ не попадают в зону обзора друг друга.*

Следствие 3. *Пусть автоматы коллектива при старте из неотрицательной x-расстановки на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ не видятся. Тогда* *выходные последовательности и последовательности состояний автоматов коллектива совпадают с таковыми на данном отрезке времени* $[1, t_0 - 1]$ *при старте из* x'*-расстановки, для любого* $x' > x$.

Доказательство. Рассмотрим старт автоматов коллектива из x'- расстановки. Так как по следствию 2 автоматы не встретятся на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$, в данные моменты времени входные символы для автоматов нулевые. Также как и для случая старта из x-расстановки. Состояние первого автомата в случае старта из x'-расстановки совпадает с состоянием первого автомата в случае старта из x-расстановки. Поскольку его функция переходов зависит только от входных символов и текущих состояний и поскольку последовательности входных символов в обоих случаях нулевые, последующие состояния для обоих случаев будут идентичными. Аналогично, поскольку функция выходов первого автомата зависит только от его входных символов и текущих состояний и поскольку последовательности входных символов в обоих случаях нулевые, последующие выходные символы для обоих случаев будут идентичными. То есть, его последовательности выходных символов и состояний на данном отрезке времени совпадают из старта из обеих данных расстановок. То же верно для второго автомата. □

Пусть автоматы коллектива при старте из неотрицательной x- расстановки на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ не видятся. Согласно лемме 1 на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ появится общий предпериод T_0 и общий период T выходных последовательностей автоматов. Обозначим вектор перемещения за период T второго автомата относительно первого как s.

Следствие 4. *Вектор* s *будет одинаковым каждые следующие* T *тактов до момента встречи автоматов коллектива (если встреча состоится). При этом, при направлении вектора* s *влево, через каждые* T *тактов времени автоматы сближаются на расстояние* $|s|$*, при направлении вправо - отдаляются на расстояние* $|s|$ *или, если вектор* s *нулевой, через каждые* T *тактов времени автоматы будут находиться на одном и том же расстоянии друг от друга.*

Действительно, так как рассматривается только отрезок времени, на котором автоматы коллектива не видятся, по лемме 1 выходные последовательности и последовательности состояний автоматов коллектива на данном отрезке совпадают с периодическими последовательностями, общий предпериод T_0 и общий период T которых удовлетворяют неравенству $T_0 + T \leq n_1 * n_2$, где n_1 и n_2 - количества состояний первого и второго автоматов, соответственно. Вектор s же можем считать разностью сумм выходных символов второго и первого автоматов за T тактов. Из периодичности выходных последовательностей на рассматриваемом отрезке времени следует, что вектор s будет одинаковым каждые T тактов на рассматриваемом временном отрезке, начиная с момента времени $T_0 + 1$.

Лемма 3. *Для любого коллектива K из двух автоматов верно одно из следующих утверждений:*

а) Для любой неотрицательной x-расстановки существует момент времени, в который автоматы увидятся;

б) Существует такое значение x_0>0, такое что при старте из любой неотрицательной x-расстановки, где $x < x_0$, автоматы видятся, а при старте из x-расстановки, где $x > x_0$ автоматы не видятся.

Доказательство. Докажем, что если не выполняется случай а, то имеет место случай б.

Так как не выполняется случай а, найдется такое значение x', что при старте из x'-расстановки автоматы не видятся. Тогда, по лемме 2, при всех $x > x'$ автоматы также не видятся.

Будем уменьшать значение x' на единицу до тех пор, пока при старте из новой получившейся точки x_0 автоматы не видятся. Как только при старте из точки x_0 автоматы видятся, можем сказать, что при старте из всех $x \leq x_0$ автоматы коллектива увидятся(следствие 1). Такая точка обязательно найдется, так как, если автоматы стартуют в зоне обзора друг друга, они увидятся уже в первый момент времени.

В силу сказанного выше, точка x_0 удовлетворяет условию леммы. □

Лемма 4. *Если для коллектива K из двух автоматов выполнен случай «а» леммы 3, а именно, автоматы коллектива видятся при любой начальной неотрицательной x-расстановке, коллектив вычисляет периодическую функцию.*

Доказательство. Рассмотрим коллектив K из двух автоматов, имеющий траекторию типа «а», то есть автоматы коллектива видятся, стартуя из любой начальной x-расстановки. Пусть коллектив K вычисляет функцию $f(x)$. Количество состояний первого и второго автоматов коллектива K соответственно равно n_1 и n_2.

Расстояние, пройденное автоматом за отрезок времени $[1, t]$ будем называть перемещением за время t для любого $t \in \mathbb{N}$. Если автомат переместился влево, то будем обозначать его перемещение отрицательным числом, если вправо - положительным. Перемещение первого автомата из начальной x-расстановки за время t обозначим $s_1(t, x)$, второго автомата $s_2(t, x)$, а перемещение второго автомата относительно первого $s(t, x)$. Тогда, $s(t, x) = s_2(t, x) - s_1(t, x)$.

Обозначим перемещение второго автомата относительно первого при старте из x-расстановки за отрезок времени $[t_1, t_2]$ как $r(t_2, t_1, x) =$
$= s(t_2, x) - s(t_1, x)$ для любых двух моментов времени $t_1 \leq t_2$.

Рассмотрим К при произвольной начальной х-расстановке, где
$x > 3 * (R + 1 + 2 * V * (n_1 * n_2 + 1))$. (1)

Как минимум первые $n_1 * n_2 + 1$ тактов автоматы коллектива не видятся(так как за это время перемещение второго автомата относительно первого не превосходит $2 * V * (n_1 * n_2 + 1)$). По лемме 1, первые $n_1 * n_2 + 1$ тактов выходные последовательности автоматов коллектива совпадают с периодическими последовательностями, общий предпериод T_0 и общий период T которых удовлетворяют неравенству $T_0 + T < n_1 * n_2 + 1$. Перемещение второго автомата относительно первого за время $T_0 + T$ будет равно $s(T_0 + T, x)$ и
$s(T_0 + T, x) \leq 2 * V * (n_1 * n_2 + 1)$. (2)

Заметим,что $T_0 + 2T \leq 2(T_0 + T)$, поэтому в момент времени $T_0 + 2T$ расстояние между автоматами также будет больше, чем $R + 1 + 2 * V * n_1 * n_2$ (так как $x - 4 * V * (n_1 * n_2 + 1) > 3(R + 1) + 2 * V * (n_1 * n_2 + 1)$), тогда как минимум следующие $n_1 * n_2 + 1$ тактов их входные символы будут нулевыми. Для простоты обозначим $r(T) = r(T_0 + 2T, T_0 + T, x)$.

Согласно следствию 3, если на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ при старте из x-расстановки автоматы коллектива не видятся, их выходные последовательности и последовательности состояний совпадают с таковыми на данном отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ при старте из x'-расстановки, для любого $x' > x$. Из этого следует, что значения T_0 и T не зависят от начальной x-расстановки автоматов при соблюдении условия (1), так как по лемме 1 верно, что $T_0 + T \leq n_1 * n_2$. Также по следствию 4, так как по условию леммы автоматы видятся при любой начальной x-расстановке, значение $r(T)$ будем считать отрицательным, так как расстояние между автоматами за период сокразается на величину $|r(T)|$.

Перемещение второго автомата относительно первого за время $T_0 + 2T$ будет равно $s(T_0 + 2T, x) = s(T_0 + T, x) + r(T)$.

Рассмотрим поведение коллектива K при начальной $(x + r(T))$- расстановке. Так как расстояние между автоматами $x + r(T) > 2 * (R + 1 + 2 * V * (n_1 * n_2 + 1))$, как минимум первые $n_1 * n_2 + 1$ тактов их входные символы будут нулевыми.

Для старта из x-расстановки запишем выходные символы и состояния автоматов за время $T_0 + 2T$:
$q_1(1), ..., q_1(T_0), q_1(T_0 + 1), ..., q_1(T_0 + T), q_1(T_0 + 1 + T), ..., q_1(T_0 + 2T)$

$q_2(1), ..., q_2(T_0), q_2(T_0+1), ..., q_2(T_0+T), q_2(T_0+1+T), ..., q_2(T_0+2T)$
$b_1(1), ..., b_1(T_0), b_1(T_0+1), ..., b_1(T_0+T), b_1(T_0+1+T), ..., b_1(T_0+2T)$
$b_2(1), ..., b_2(T_0), b_2(T_0+1), ..., b_2(T_0+T), b_2(T_0+1+T), ..., b_2(T_0+2T)$

В силу периодичности вышеприведенных последовательностей, верно, что:
$q_1(T_0+2T, x) = q_1(T_0+T, x)$
$q_2(T_0+2T, x) = q_2(T_0+T, x)$
$b_1(T_0+2T, x) = b_1(T_0+T, x)$
$b_2(T_0+2T, x) = b_2(T_0+T, x)$

Для старта из $(x+r(T))$-расстановки запишем выходные символы и состояния автоматов за время T_0+T:
$q(1), ..., q_1(T_0), q_1(T_0+1), ..., q_1(T_0+T)$
$q_2(1), ..., q_2(T_0), q_2(T_0+1), ..., q_2(T_0+T)$
$b_1(1), ..., b_1(T_0), b_1(T_0+1), ..., b_1(T_0+T)$
$b_1(1), ..., b_2(T_0), b_2(T_0+1), ..., b_2(T_0+T)$

Из вышеприведенных равенств будет верно:
$q_1(T_0+2T, x) = q_1(T_0+T, x+r(T))$
$q_2(T_0+2T, x) = q_2(T_0+T, x+r(T))$
$b_1(T_0+2T, x) = b_1(T_0+T, x+r(T))$
$b_2(T_0+2T, x) = b_2(T_0+T, x+r(T))$

Также, очевидно, что для одиночного автомата, перемещающегося на прямой, его выходная последовательность не зависит от точки старта. А значит, что для автоматов коллектива вектор перемещения каждого из них от старта за одинаковое время не зависит от его собственного начального расположения на прямой и от начального расположения на прямой второго автомата при отсутствии встречи в данный промежуток времени в любом из случаев. Поэтому $s(T_0+T, x+r(T)) = s(T_0+T, x)$.
Также, по определению $s(T_0+2T, x) = s(T_0+T, x) + r(T)$.
То есть выполнено, что:

$$\begin{cases} x + s(T_0+2T, x) = x + r(T) + s(T_0+T, x+r(T)) \\ q_1(T_0+2T, x) = q_1(T_0+T, x+r(T)) \\ q_2(T_0+2T, x) = q_2(T_0+T, x+r(T)) \end{cases}, \qquad (3)$$

То есть, при старте из любой x-расстановки, где $x > 3*(R+1+2*V*(n_1*n_2+1))$ в момент времени T_0+2T автоматы коллектива будут находиться на том же расстоянии и в тех же состояниях соответственно, что и при старте из $(x+r(T))$-расстановки в момент времени T_0+T. Из этого следует, что дальнейшее поведение автоматов коллектива будет идентично, то есть при старте из x-расстановки, для любого $t \in \mathbb{N}$ в момент времени $T_0 + 2T + t$ автоматы коллектива будут находиться на том же расстоянии и в тех же состояниях соответственно, что и при старте из $(x + r(T))$-расстановки в момент времени $T_0 + T + t$.

Из этого следует, что дальнейшее поведение автоматов коллектива при старте из x-расстановки и $(x+r(T))$-расстановки будет происходить одинаковым образом. То есть либо автоматы коллектива остановятся в одинаковых расстановках, либо не остановятся в обоих случаях. То есть, значения $f(x)$ и $f(x+r(T))$ определены или не определены одновременно, и если определены, то $f(x) = f(x + r(T))$.

Пусть $D = -r(T)$ и $x + r(T) = x'$.

Заметим, что по условию леммы автоматы встречаются при старте из любой расстановки. Это значит, что как бы ни перемещались автоматы, вектор перемещения второго автомата относительно первого за общий период T направлен навстречу первому автомату (не смотря на то, что на каких-то отрезках времени это может быть и не так), в противном случае они бы не встретились. Поэтому $D > 0$, так как $r(T)$ отрицательно.

Тогда, если автоматы коллектива остановятся при старте из x'- расстановки, $f(x') = f(x'+D)$, для любого $x' > 3*(R+1+2*V*(n_1*n_2+1))$, и не остановятся при старте из $(x' + D)$- расстановки иначе. Это верно для любого $x' > 3*(R+1+2*V*(n_1*n_2+1))$, так как формула верна для любого $x > 3*(R+1+2*V*(n_1*n_2+1))$, а в силу отрицательности $r(T)$ получим $x + r(T) > 3*(R+1+2*V*(n_1*n_2+1)) + r(T) \Rightarrow$ будет верно и для всех $x' > 3*(R+1+2*V*(n_1*n_2+1))$, так как верно $3*(R+1+2*V*(n_1*n_2+1)) > 3*(R+1+2*V*(n_1*n_2+1)) + r(T)$.

Очевидно, что формула $f(x'+D) = f(x'+D+D)$ будет верна, так как $x'+D > 3*(R+1+2*V*(n_1*n_2+1))$. Получим, что $f(x') = f(x'+D) = f(x' + D + D)$. Проводя далее аналогичные рассуждения получим, что $f(x') = f(x' + kD), \forall k \in \mathbb{N}$.

То есть выполнено, что для любого $x' > 3*(R+1+2*V*(n_1*n_2+1))$ такого что $f(x')$ определена, верно что $f(x' + kD)$ определена и $f(x') = f(x' + kD), \forall k \in \mathbb{N}$. Если $f(x')$ не определена, то $f(x' + kD)$ также не определена. То есть функция f - периодическая функция.

Что и требовалось доказать. □

Замечание 1. *При выводе системы (3) в доказательстве леммы 4 не использовался факт встречи автоматов коллектива. Поэтому система будет верна для любого значения $r(T)$. При этом заметим, что при $r(T) > 0$ автоматы также вычисляют периодическую функцию, а именно функцию, неопределённую на своём периоде, так как возник-*

нет период и автоматы большую часть времени будут отдаляться и никогда не остановятся.

При $r(T) = 0$ система является тавтологией и вместе с фунцией, неопределённой на своём периоде, описывает ситуацию, когда выполнен случай «б)», а именно, существует такое значение x_0, такое что при старте из всех $x \leq x_0$ автоматы видятся, а при всех $x > x_0$ автоматы не видятся.

Определим класс функций $G_{x+const}$.

Пусть $T_0 \in \mathbb{N}$.

Во-первых, в класс $G_{x+const}$ будут входить все функции вида:

$$g(x) = \left[\begin{array}{c} C_0, \text{при } x = 0 \\ C_1, \text{при } x = 1 \\ .... \\ C_{T_0-1}, \text{при } x = T_0 - 1 \\ x + C, \ \text{при } x \geq T_0 \end{array}\right. ,$$

где $C \in \mathbb{Z}$, $T_0 + C \geq 0, C_i \in \mathbb{N}_0 \cup \{\lambda\}$, $i \in [0, T_0 - 1]$.

При $C_i \in \mathbb{N}_0, g(i) = C_i$ и при $C_i = \lambda$ значение $g(i)$ не определено.

Также в класс $G_{x+const}$ будут входить все функции вида $f(x) = x+C$, где $C \in \mathbb{N}_0$.

Лемма 5. *Если для коллектива K из двух автоматов выполнен случай «б)», а именно, существует такое неотрицательное значение x_0, что при старте из всех неотрицательных $x \leq x_0$ автоматы видятся, а при всех $x > x_0$ автоматы не видятся, то коллектив либо вычисляет функцию $f \in G_{x+const}$, либо периодическую функцию, значения которой не определены при всех $x > x_0$.*

Доказательство. Пусть дан коллектив K, вычисляющий функцию f, который имеет траектории типа «б)», то есть существует такое значение x_0, такое что при старте из всех $x \leq x_0$ автоматы видятся, а при всех $x > x_0$ автоматы не видятся.

Положим:

$$\begin{cases} C_0 = f(0), \text{ если } f(0) \text{ определено и } \lambda \text{ иначе} \\ C_1 = f(1), \text{ если } f(1) \text{ определено и } \lambda \text{ иначе} \\ ..... \\ C_{x_0} = f(x_0), \text{ если } f(x_0) \text{ определено и } \lambda \text{ иначе} \end{cases}$$

Легко видеть, что если автоматы коллектива стартуют из x- расстановки, где $x \in [0, x_0]$, функция f принимает такие же значения, как и функции из $G_{x+const}$.

Так как при старте на расстоянии $x > x_0$ автоматы не видятся, каждый из них до остановки перемещается так же, как он перемещался бы в отсутствие другого автомата. Очевидно, что для одиночного автомата, перемещающегося на прямой, его выходная последовательность не зависит от точки старта. А значит, что для автоматов с траекториями типа «б)», стартовавших на расстоянии $x > x_0$, вектор перемещения каждого из них не зависит от его собственного начального расположения на прямой, и от начального расположения на прямой второго автомата.

Если автоматы коллектива не останавливаются, то коллектив вычисляет функцию, неопределенную во всех точках $x > x_0$ (случай $r(T) > 0$). Эта функция является частным случаем периодической функции.

Если автоматы коллектива останавливаются ($r(T) = 0$), перемещение первого автомата с начала движения обозначим s_1, второго автомата s_2, а общее перемещение s. Тогда, $s = s_2 - s_1$. То есть $f(x) = x + s$, причем, очевидно, что, так как s_1 и s_2 вычислялись для каждого автомата независимо от другого, независимо от их начальных расположений, s не зависит от значения $x > x_0$, то есть s- константа. Положим $C = s$. Тогда, при $x > x_0$, $f(x) = x + C$.

Легко видеть, что если коллектив стартует в x-расстановке, где $x > x_0$, коллектив вычисляет значение, равное $x + C$, то есть значение, соответствующее функции $f \in G_{x+const}$, где в роли T_0 в определении функции из класса $G_{x+const}$ выступает $x_0 + 1$.

Следовательно, $f \in G_{x+const}$. □

Лемма 6. *Любая функция вида $f(x) = C * x (C \in \mathbb{N})$ сильно вычислима коллективом из трёх автоматов.*

Доказательство. Пусть дана функция вида $f(x) = C * x$. Построим коллектив из трех автоматов, сильно вычисляющий эту функцию.

В качестве автомата W_1 возьмем неподвижный автомат.

В качестве W_2 возьмем автомат со следующей таблицей:

Q	A	$\varphi(Q)$	$\Psi(Q)$
q_1^2	$(a_{-V}, a_{-V+1}, ...a_0..., a_{V-1}, a_V)$, $a_0 \neq q_1^3$	q_2^2	$\rightarrow$
q_1^2	$(a_{-V}, a_{-V+1}, ...a_0..., a_{V-1}, a_V)$, $a_0 = q_1^3$	q_0^2	Λ
q_2^2	a	q_3^2	Λ
...	...	...	...
q_i^2	a	q_{i+1}^2	Λ
...	...	...	...
q_{C-1}^2	a	q_C^2	Λ
q_C^2	a	q_1^2	Λ

где начальным состоянием автомата W_2 является состояние q_1^2.

В качестве W_3 возьмем автомат со следующей таблицей:

Q	A	$\varphi(Q)$	$\Psi(Q)$
q_1^3	$(a_{-V}, a_{-V+1}, ...a_0..., a_{V-1}, a_V)$, $a_0 \neq q_1^2$	q_2^3	Λ
q_1^3	$(a_{-V}, a_{-V+1}, ...a_0..., a_{V-1}, a_V)$, $a_0 = q_1^2$	q_0^3	Λ
...	...	...	...
q_i^3	a	q_{i+1}^3	Λ
...	...	...	...
q_{C-2}^3	a	q_{C-1}^3	Λ
q_{C-1}^3	a	q_1^3	$\rightarrow$
q_0^3	$(a_{-V}, a_{-V+1}, ...a_0..., a_{V-1}, a_V)$, $a_0 \neq q_1^1$	q_0^3	$\leftarrow$

где начальным состоянием автомата W_3 является состояние q_1^3.

То есть автомат W_1 не передвигается и находится в своем единственном состоянии q_0. Автомат W_2 движется по одному шагу каждый C-й момент времени, до того, как W_2 и W_3 окажутся в одной клетке. Автомат W_3 движется по одному шагу каждый $(C-1)$-й момент времени, до того, как W_2 и W_3 окажутся в одной клетке, а именно на расстоянии $C * x$ от автомата W_1.

Рассмотрим моменты времени, в которых автоматы W_2 и W_3 окажутся на расстоянии $C * x$ от автомата W_1. Автомат W_2 до данной точки пройдёт $(C-1) * x$ шагов, а автомат W_3 пройдёт $C * x$ шагов. Двигаясь каждый $(C-1)$-й такт времени, автомат W_3 пройдет расстояние $C * x$ за время $(C-1) * C * x$, а автомату W_2 до точки $C * x$ нужно пройти расстояние $(C-1) * x$, и он пройдёт его, двигаясь каждый C-й такт, начиная с первого за время $((C-1)*x)-1)*C+1 = (C-1)*x*C-(C-1)$ и будет там находиться в следующие $C-1$ тактов, в том числе в такт времени $(C-1) * C * x$. В этот момент и произойдёт встреча автоматов W_2 и W_3. Необходимо также отметить, что это первая встреча автоматов W_2 и W_3, так как автоматы W_2 и W_3 изначально находятся на расстоянии x и каждый $C * (C-1)$-й такт расстояние между автоматами сокращается на 1. Исходя из этого, на величину x расстояние между автоматами уменьшится в такт времени $x * C * (C-1)$.

В следующий такт времени, то есть в такт $(C-1) * C * x + 1$ оба автомата, очевидно, окажутся в своих первых состояниях. Автомат W_2 останется на месте и перейдёт в своё финальное состояние.

Далее, автомат W_3 вернётся к автомату W_1 и перейдёт в своё финальное состояние. Коллектив остановился в $C * x$- расстановке. □

Замечание 2. *Очевидно, что функция $f(x) = C * x$ не совпадает ни с одной из функций из класса $G_{x+const}$, а также то, что она не является периодической.*

4. Основные результаты

Теорема 1. *Класс* $F_{2,1}^{R,V}$ *описывается следующим образом:*

1) $F_{2,1}^{R,V}$ *содержит все функции из класса* $G_{x+const}$*, то есть все функции вида*

$$f(x)=\left[\begin{array}{c} C_0, \textit{при } x=0 \\ C_1, \textit{при } x=1 \\ .... \\ C_{T_0-1}, \textit{при } x=T_0-1 \\ x+C, \ \textit{при } x \geq T_0 \end{array}\right.,$$

где $T_0 \in \mathbb{N}$*,* $C \in \mathbb{Z}$*,* $T_0+C \geq 0$*,* $C_i \in \mathbb{N}_0 \cup \{\lambda\}$*,* $i \in [0, T_0-1]$*,*

а также все функции вида $f(x)=x+C$*, где* $C \in \mathbb{N}_0$*.*

2) $F_{2,1}^{R,V}$ *содержит все периодические функции;*

3) $F_{2,1}^{R,V}$ *не содержит никаких функций, кроме указанных выше в п. 1) и 2).*

4) $F_{2,1}^{R,V}=\hat{F}_{2,1}^{R,V}$

Доказательство. 1) Покажем, что класс $\hat{F}_{2,1}^{R,V}$ содержит все функции из класса $G_{x+const}$.

Приведем пример коллектива из двух автоматов, сильно вычисляющего произвольную всюду определенную функцию $f(x) \in G_{x+const}$ вида:

$$\text{f(x)}=\left[\begin{array}{c} C_0, \text{при } x=0 \\ C_1, \text{при } x=1 \\ .... \\ C_{T_0-1}, \text{при } x=T_0-1 \\ x+C, \ \text{при } x \geq T_0 \end{array}\right.,$$

где $T_0 \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{Z}, \ T_0+C \geq 0, C_i \in \mathbb{N}_0, i \in [0, T_0-1]$.

В качестве автомата W_1 возьмем неподвижный автомат с единственным состоянием q.

В качестве W_2 возьмем автомат со следующей таблицей:

Q	A	$\varphi(Q)$	$\Psi(Q)$
q_i'	$(a_{-V}, a_{-V+1}, ...a_0..., a_{V-1}, a_V)$, $a_0 \neq q$	q_{i+1}'	$\leftarrow$
q_i'	$(a_{-V}, a_{-V+1}, ...a_0..., a_{V-1}, a_V)$, $a_0 = q$	$q_{i,0}$	Λ
$q_{i,0}$ $(C_i \neq 0)$	a	$q_{i,}$	$\rightarrow$
q_{i,k_i}	a	q_{i,k_i+1}	$\rightarrow$
q_{i,C_i}	a	q	Λ
q_l'	a	q_{l+1}'	$\rightarrow$
q_{2T_0}'	a	q_1	Λ
q_j	a	q_{j+1}	$sgn(C)$
q_C	a	q	$sgn(C)$

где $i \in [0, T_0 - 1], k_i \in [1, C_i - 1], j \in [1, C - 1], l \in [T_0, 2 * T_0 - 1]$,

$$sgn(C) = \left[\begin{array}{l} -1, \text{при } C < 0 \\ \ \ 0, \text{при } C = 0 \\ \ \ 1, \text{при } C > 0 \end{array}\right.$$

где начальным состоянием автомата W_2 является состояние q_0', а $a-$ произвольный входной символ. Строка с номером 3 присутствует в программе только в случае $C_i \neq 0$.

То есть автомат W_1 не передвигается и находится в своем единственном состоянии q_0. Сначала делаем проверку, попадает ли значение x в интервал $[0; T_0 - 1]$. Для этого автомат W_2 делает T_0 шагов влево, навстречу автомату W_1.

Если автомат W_2 увидит по пути автомат W_1, это будет означать, что значение x лежит в интервале $[0, T_0 - 1]$, в котором значения функции могут отличаться от $f(x) = x + C$, поэтому автомат W_2 переходит в одну из строк 3-5. То есть в строки, предназначенные для вычисления констант C_i, $i \in [0, T_0 - 1]$. Автомат W_2 будет вычислять константы $C_1, C_2, ..., C_{T_0} \in \mathbb{N}_0$, равные соответственно $f(0), f(1)..., f(T_0 - 1)$, двигаясь от W_1 на C_i шагов вправо, $i \in [0, T_0 - 1]$.

Если автомат W_2 не увидит автомат W_1, это будет означать, что $x \notin [0, T_0 - 1]$, тогда автомат W_2 вернется назад на T_0 шагов. Далее автомат W_2 не передвигается и переходит в свое финальное состояние при $C = 0$, движется по одному шагу вправо при $C > 0$ и по одному шагу влево при $C < 0$ каждый момент времени, пока он не сделает ровно C шагов.

Замечание 1: для случая, когда $T_0 = 0$ (то есть функция имеет вид $f(x) = x + C$) начальным состоянием автомата W_2 будет являться состояние q_1 в вышеприведенной таблице.

Замечание 2: для случая частичных функций достаточно строчки программы 3-5 для вычисления констант $C_i, i \in [0, T_0 - 1]$, изменить на любой цикл при тех значениях, при которых функция не определена.

Легко видеть, что функция из класса $G_{x+const}$ может быть не определена только на интервале $[0, T_0 - 1]$.

Поскольку $\hat{F}^{R,V}_{2,1}$ содержит все функции из класса $G_{x+const}$, и верно, что $\hat{F}^{R,V}_{2,1} \subseteq F^{R,V}_{2,1}$, класс $F^{R,V}_{2,1}$ также содержит все функции из класса $G_{x+const}$.

2) Покажем, что класс $\hat{F}^{R,V}_{2,1}$ содержит все периодические функции.

Приведем пример коллектива из двух автоматов, сильно вычисляющего произвольную всюду определенную периодическую функцию вида:

$$\text{f(x)}=\left[\begin{array}{c} C_0, \text{при } x = 0 \\ C_1, \text{при } x = 1 \\ .... \\ C_{T_0-1}, \text{при } x = T_0 - 1 \\ C_{T_0}, \text{ при } x = T_0 + k * T \\ .... \\ C_{T_0+T-1}, \text{ при } x = T_0 + T - 1 + k * T \end{array}\right. ,$$

где $T_0 \in \mathbb{N}$, $C_i \in \mathbb{N}_0, i \in [0, T_0 + T - 1]$, $k \in \mathbb{N}_0$.

В случае $T_0 = 0$ функция задаётся лишь последними T строками.

Рассмотрим случай, когда $T_0 \neq 0$.

В качестве автомата W_1 возьмем неподвижный автомат с единственным состоянием q.

В качестве W_2 возьмем автомат со следующей таблицей:

Q	A	$\varphi(Q)$	$\Psi(Q)$
q'_i	$(a_{-V}, a_{-V+1}, ...a_0..., a_{V-1}, a_V)$, $a_0 \neq q$	q'_{i+1}	$\leftarrow$
q'_i	$(a_{-V}, a_{-V+1}, ...a_0..., a_{V-1}, a_V)$, $a_0 = q$	$q_{i,0}$	Λ
q'_l	a	q'_{l+1}	$\rightarrow$
q'_{2T_0}	a	q_1	Λ
q_j	$(a_{-V}, a_{-V+1}, ...a_0..., a_{V-1}, a_V)$, $a_0 \neq q$	q_{j+1}	$\leftarrow$
q_T	$(a_{-V}, a_{-V+1}, ...a_0..., a_{V-1}, a_V)$, $a_0 \neq q$	q_1	$\leftarrow$
q_j	$(a_{-V}, a_{-V+1}, ...a_0..., a_{V-1}, a_V)$, $a_0 = q$	$q_{T_0-1+j,0}$	Λ
q_T	$(a_{-V}, a_{-V+1}, ...a_0..., a_{V-1}, a_V)$, $a_0 = q$	$q_{T_0-1+T,0}$	Λ
$q_{m,0}$ при $C_m \neq 0$	a	$q_{m,1}$	$\rightarrow$
q_{m,k_m}	a	q_{m,k_m+1}	$\rightarrow$
q_{m,C_m}	a	q	Λ

где $i \in [0, T_0 - 1]$, $m \in [0, T_0 - 1 + T]$, $k_m \in [1, C_m - 1]$, $l \in [T_0, 2T_0 - 1]$, $j \in [1, T - 1]$,

где начальным состоянием автомата W_2 является состояние q'_0. Строка с номером 9 присутствует в программе только в случае $C_m \neq 0$.

То есть автомат W_1 не передвигается и находится в своем единственном состоянии q_0. Сначала делаем проверку, попадает ли значение x в интервал $[0; T_0 - 1]$. Для этого автомат W_2 делает T_0 шагов влево, навстречу автомату W_1.

Если автомат W_2 увидел по пути автомат W_1, значение x лежит в предпериоде нашей функции, поэтому автомат W_2 переходит в одну из подпрограмм, вычисляющую значение функции в предпериоде. Эти подпрограммы будут вычислять некоторые константы $C_1, C_2, ..., C_{T_0} \in \mathbb{N}_0$, равные соответственно $f(0), f(1)..., f(T_0-1)$, двигаясь от W_1 на C_i шагов вправо, $i \in [0, T_0 - 1]$.

Если автомат W_2 не увидел автомат W_1, значит $x \notin [0, T_0-1]$, поэтому автомат W_2 вернётся назад на T_0 шагов.

Автомат W_2 идет навстречу автомату W_1, меняя циклично состояния от 1 до T. И в момент, когда автомат W_2 увидит автомат W_1, переходит в подпрограмму и начинает вычислять, в зависимости от своего состояния при встрече, одну из констант C_k, $k \in [T_0, T_0+T-1]$. То есть он двигаться вправо, пока он не пройдет количество шагов, равное константе C_k.

Замечание 1: для случая, когда $T_0 = 0$ (то есть функция имеет вид $f(x) = x + C$) начальным состоянием автомата W_2 будет являться состояние q_1 в вышеприведенной таблице.

Замечание 2: для случая частичных функций достаточно изменить строчки программы для вычисления констант (последние 3) на любой цикл при тех значениях, которых функция не определена.

Поскольку $\hat{F}_{2,1}^{R,V}$ содержит все все периодические функции, и верно, что $\hat{F}_{2,1}^{R,V} \subseteq F_{2,1}^{R,V}$, класс $F_{2,1}^{R,V}$ также содержит все все периодические функции.

3) Покажем, что класс $F_{2,1}^{R,V}$ не содержит никаких функций, кроме функций из класса $G_{x+const}$ и периодических функций.

Пусть дана функция $f \in F$, вычислимая некоторым коллективом автоматов K из двух автоматов W_1 и W_2. По лемме 3, для коллектива K выполняется либо случай а), либо случай б). Если выполняется а) - по лемме 5 он вычисляет функцию $f(x) \in G_{x+const}$, что соответвстует первому пункту теоремы. Иначе - по лемме 4 он вычисляет периодическую функцию, что соответствует второму пункту теоремы.

4) Покажем, что $F_{2,1}^{R,V} = \hat{F}_{2,1}^{R,V}$.

Очевидно, что $\hat{F}_{2,1}^{R,V} \subseteq F_{2,1}^{R,V}$. А в доказательствах пунктов 1 и 2 теоремы доказано, что соответствующие классы функций сильно вычислимы. Поэтому, из доказательств пунктов 1, 2 и пункта 3 теоремы следует, что $F_{2,1}^{R,V} = \hat{F}_{2,1}^{R,V}$.

□

Из формулировки теоремы 1 видно, что что $F_{m,1}^{R,V}$ не зависит от параметров R и V, так как класс $G_{x+const}$ и класс периодических функций не зависят от этих параметров.

Следствие 5. *$\forall R_1, R_2, V_1, V_2$ верно $F_{2,1}^{R_1,V_1} = F_{2,1}^{R_2,V_2}$.*

Это следствие позволяет нам ниже заменить обозначение $F_{2,1}^{R,V}$ на более простое обозначение того же класса функций $F_{2,1}$.

Следствие 6. $\forall R, V F_{2,1} \neq F_{3,1}^{R,V}$.

Согласно лемме 6, для любого $C \in \mathbb{N}$ существует коллектив из трех автоматов, вычисляющий функцию $f(x) = C{*}x$. В то же время, согласно теореме 1, ни один коллектив из двух автоматов не решает эту задачу. Значит, для любых R, V класс $F_{3,1}^{R,V}$ шире, чем $F_{2,1}$.

5. Заключение

Исследования по автоматам в лабиринтах велись в 1963-2021 годах в Московском Государственном Университете под руководством академика В.Б.Кудрявцева. Он же в 1980е годы сформулировал задачу преследования в терминах автоматов в лабиринтах. В.Б.Кудрявцевым и его учеником Н.Ю.Волковым были получены значимые результаты в задаче преследования, которые дали исходный толчок для исследования вычислимости функций коллективами автоматов. Результаты работ [3] и [4] сделали актуальной задачу исчерпывающего описания функций, вычислимых на прямой малыми коллективами автоматов. В то же время задача нахождения для каждого m класса функций, вычислимых коллективами из m автоматов, является интересной задачей из теории алгоритмов.

Автор работы выражает признательность Н.Ю.Волкову за постановку задачи.

Список литературы

[1] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., *Введение в теорию автоматов*, «Наука», Москва, 1985, 320 с.

[2] Kilibarda G., Kudryavtsev, V., Ušćumlić Š., “Collectives of automata in labyrinths”, *Discrete Mathematics and Applications*, **13**:5 (2003), 429–466

[3] Волков Н. Ю., “Об автоматной модели преследования”, *Дискретная математика*, **19**:2 (2007), 131–160

[4] Волков Н. Ю., “Об автоматной модели преследования в базовых плоских областях.”, *Интеллектуальные системы*, **11**:1-4 (2007), 361–402

[5] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, Prentice Hall, U.S., 1985, 560 c.

Computability of integer functions by means of collectives of two automata

Ushakova V.V.

In this work the computability of one-place partial functions of countable-valued logic by collectives of automata is explored. The class of functions computable by two-automata collectives is found. These are periodic functions and the simplest linear functions, which, starting from some value of the argument x behave like $f(x) = x + C$ function. It is shown that the class of one-place partial functions of countable-valued logic computable by three-automata collectives is wider.

Keywords: computability, automaton, collectives of automata, periodic functions.

References

[1] Kudryavtsev V.B., Alyoshin S.V., Podkolzin A.S., *Introduction to automata theory*, «Science», Moscow, 1985, 320 c.

[2] Kilibarda G., Kudryavtsev, V., Ušćumlić Š., “Collectives of automata in labyrinths”, *Discrete Mathematics and Applications*, **13**:5 (2003), 429–466

[3] Volkov N. Yu., “On an automaton model of pursuit”, *Diskretnaya Matematika*, **19**:2 (2007), 131–160 (In Russian)

[4] Volkov N. Yu., “On an automaton model of pursuit in basic flat mazes”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **11**:1-4 (2007), 361–402 (In Russian)

[5] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, Prentice Hall, U.S., 1985, 560 c.