

Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова
Российская Академия Наук
Международная Академия Технологических Наук

Интеллектуальные Системы.

Теория и приложения

ТОМ 27 ВЫПУСК 3 * 2023

МОСКВА

Главный редактор: д.ф.-м.н., профессор Э.Э. Гасанов

Редакционная коллегия:

д.ф.-м.н., проф. А. Е. Андреев	(зам. главного редактора)
к.ф.-м.н., с.н.с. А.В. Галащенко	(зам. главного редактора)
к.ф.-м.н., доц. А. С. Строгалов	(зам. главного редактора)
к.ф.-м.н., м.н.с. В. В. Осокин	(ответственный секретарь)

д.ф.-м.н, проф. В.В.Александров, д.ф.-м.н, проф. С.В.Алешин, д.ф.-м.н, проф. Д.Н.Бабин, проф. К.Вашик, проф. Я.Деметрович, академик РАН, д.ф.-м.н, проф. Ю.Л.Ершов, проф. Г.Килибарда, д.ф.-м.н, проф. В.Н.Козлов, д.ф.-м.н, проф. А.В.Михалев, к.ф.-м.н, в.н.с. В.А.Носов, д.ф.-м.н, проф. А.С.Подколзин, д.ф.-м.н, проф. Ю.П.Пытьев, д.т.н, проф. А.П.Рыжов, академик РАН, д.т.н, проф. А.С.Сигов, проф. Б.Тальхайм, проф. Ш.Ушчумлич, д.ф.-м.н, доц. А.А.Часовских, д.ф.-м.н, проф. А.В.Чечкин, к.ф.-м.н. Р.Шчепанович.

Секретарь редакции: И. О. Бергер, Е. В. Кузнецова

В журнале «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» публикуются научные достижения в области теории и приложений интеллектуальных систем, новых информационных технологий и компьютерных наук.

Издание журнала осуществляется под эгидой МГУ имени М. В. Ломоносова, Научного Совета по комплексной проблеме «Кибернетика» РАН, Отделения «Математическое моделирование технологических процессов» МАТН.

Учредитель журнала: ООО «Интеллектуальные системы».

Журнал входит в список изданий, включенных ВАК РФ в реестр публикаций материалов по кандидатским и докторским диссертациям по математике и механике.

Спонсором издания является:

ООО «Два Облака»

Разработка корпоративных информационных систем

<http://www.dvaoblaka.ru>

Индекс подписки на журнал: 64559 в каталоге НТИ «Роспечать».

Адрес редакции: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, д. 1, механико-математический факультет, комн. 12-01.

Адрес издателя: 115230, Россия, Москва, Хлебозаводский проезд, д. 7, стр. 9, офис 9. Тел. +7 (495) 939-46-37, e-mail: mail@intsysjournal.org

*) Прежнее название журнала: «Интеллектуальные системы».

© ООО «Интеллектуальные системы», 2023.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть 1. Общие проблемы теории интеллектуальных систем

Гришаев А.В., Сазонов В.Ф. Нейробиологическая теория Карла Фристана: критический обзор 5

Часть 2. Специальные вопросы теории интеллектуальных систем

Колосов Д.Г., Городецкий Л.С., Миненков Д.С. Об оптимальном пропорционально справедливом распределении ресурсов в сотовых сетях 5G 96

Часть 3. Математические модели

Дергач П.С., Амирова С.Р. О сложности преобразования пар слов относительно операций выпадения-вставки специального вида 122

Ушакова В.В. О вычислимости целочисленных функций коллективами из двух автоматов 137

Часть 1.
Общие проблемы теории
интеллектуальных систем

Нейробиологическая теория Карла Фристана: критический обзор

А. В. Гришаев¹ В. Ф. Сазонов²

В данной работе впервые в русскоязычной литературе излагается нейробиологическая версия теории Карла Фристана. Впервые эта теория излагается целостно, подробно и логически выстроено в рамках одной статьи и, насколько это возможно, в адаптированном для понимания нейробиологов и нейрофизиологов виде. Обсуждается то, каким образом Фристон применяет эту теорию на практике. Проводится критический анализ внутренних проблем и противоречий в теории Фристана.

Ключевые слова: принцип свободной энергии, гипотеза байесовского мозга, предиктивное кодирование, ошибка предсказания, наблюдаемые состояния, ненаблюдаемые состояния.

1. Введение

Одной из важных тенденций в современной нейробиологии и нейрофизиологии является развитие представлений о прогностической (предиктивной) деятельности нервной системы. Возможно, что именно «предсказательная» деятельность как раз и является основной задачей нервной системы, обеспечивающей её выживание как системы, а заодно и выживание всего организма. Одна из интереснейших, но небесспорных, разработок в этом направлении принадлежит широко известному в качестве одного из изобретателей воксельной морфометрии (Voxel-based morphometry) британскому нейробиологу Карлу Фристону (K.J. Friston).

Примерно полтора десятилетия назад К. Фристон предложил амбициозную теорию (для краткости мы далее будем говорить просто «теория Фристана»), которая, согласно заявлениям автора [1]-[12], объединяя в рамках единого подхода экспериментальные данные о восприятии,

¹Гришаев Александр Викторович — выпускник каф. биологии и методики её преподавания Института естественных наук РГУ им. С. А. Есенина, e-mail: ecology.ag@yandex.ru.

Grishaev Alexander Victorovich — post-graduate student, Ryazan State University named after S.A. Esenin, Institute of Natural Sciences, Department of Biology and Its Teaching Methods.

²Сазонов Вячеслав Федорович — к.б.н., доцент каф. биологии и методики её преподавания Института естественных наук РГУ им. С. А. Есенина, e-mail: kineziolog@mail.ru.

Sazonov Vyacheslav Fedorovich — Ph. D., Associate Professor, Ryazan State University named after S.A. Esenin, Institute of Natural Sciences, Department of Biology and Its Teaching Methods.

обучении и двигательной активности, предлагает целостную теоретико-информационную и математическую конструкцию для объяснения самых разнообразных аспектов работы мозга.

Истоки этой теории восходят к представлениям ученого-универсала Г. фон Гельмгольца [13]. Гельмгольц в работе «Von den wahrnehmungen im Allgemeinen» из третьего тома его «*Handbuch der physiologischen Optik*» [13] предложил идею о восприятии как о «бессознательном выводе» или «бессознательном заключении» (на немецком: unbewusster Schluss, или на английском: unconscious inference [14], unconscious conclusion [15]). Сущность этой идеи состоит в том, что восприятие представляет собой процесс вывода, аналогичный логическому выводу (то есть выводу в логике), но только носящий бессознательный характер, в то время как логический вывод обычно рассматривают как сознательный процесс. Проще говоря, на основе исходных бессознательных суждений о мире (в данном случае это сенсорная информация, а также прошлый опыт субъекта, его знания об окружающем мире и т. д.) через бессознательные умозаключения осуществляется переход к новым суждениям — бессознательным заключениям о мире — ощущениям. Однако и у идей Гельмгольца, и, соответственно, теории Фристонa, а также у других сходных теорий [16], [17] с общим названием «Predictive processing», как недавно выяснилось благодаря работе Л. Свонсона [18], есть влиятельнейший предтеча — И. Кант с его трансцендентальной философией, где центральное в этой философии понятие — «вещь в себе» (на немецком: Ding an sich). Кроме того, идеи, аналогичные по смыслу идее об «бессознательном выводе», выдвигались Ф. Бэконом [19], Т. Гоббсом и Ф. Нортон [20].

Сама идея о восприятии как о бессознательном выводе имела и имеет как сторонников [21]-[26], так и противников [14], [27], [28]. В данной статье мы не будем обсуждать аргументы в поддержку этой идеи или её критику, так как это является темой для отдельного большого обсуждения. Заинтересованного читателя отсылаем к работе Г. Хатфилда [27], где как раз и содержится подробное обсуждение этой идеи, а также аргументы «за» и «против» неё.

Итак, идеи Гельмгольца о восприятии послужили отправной точкой для последовавших затем интерпретаций и наполнения этих представлений новыми смыслами.

В 1980 году Р. Грегори (известен среди отечественных ученых в первую очередь своей книгой «*Разумный глаз*») [21], продолжая идею «бессознательного вывода», сравнил перцепции с гипотезами в науке. А сам процесс восприятия он сопоставил с деятельностью ученого-экспериментатора, выдвигающего гипотезы, а затем проверяющего их в эксперименте.

В 1990-е годы идеи Гельмгольца нашли свое продолжение в работе Дж. Хинтона с соавторами [29], выдающегося специалиста в области искусственного интеллекта и машинного обучения. Авторы предложили считать, что «перцептивная система представляет собой устройство для статистического вывода, чья функция заключается в выводе вероятных причин сенсорного входа». Кроме того, они использовали в этой работе такие понятия (похожие по содержанию на понятия, используемые Фристонем), как «модель распознавания» и «порождающая модель». Модель распознавания, согласно Хинтону и соавторам, используется для «вывода вероятностного распределения основных причин из сенсорного входа», а порождающая модель используется для «обучения модели распознавания». Порождающая модель также обучается. Иначе говоря, *Хинтон и соавторы наполняют* исходное довольно расплывчатое понятие Г. фон Гельмгольца «*бессознательный вывод*» *статистическим смыслом*, значительно расширяя и уточняя это понятие.

Другой важной работой, которую можно считать предтечей теории Фристана, является работа Рао и Балларда 1999 года о предиктивном кодировании (predictive coding), описывающем процесс обработки зрительной информации [30]. Заметим, что в отечественной технической литературе и словарях термин predictive coding присутствует уже достаточно давно и переводится либо как «кодирование с предсказанием» [31], [32], либо как «предиктивное кодирование» [32]. Мы будем использовать в дальнейшем именно термин «предиктивное кодирование».

Идея *предиктивного кодирования* (по отношению к зрительной системе) состоит в том, что обратные связи от вышестоящих в иерархии областей зрительной коры несут прогнозы (предсказания) нейронной активности для нижестоящих областей зрительной коры, а прямые связи от нижестоящих областей зрительной коры возвращают вышестоящим областям ошибки между прогнозами (предсказаниями) и фактической активностью нижестоящих областей коры [30]. В дальнейшем, в работах других авторов [33]-[35], и самого Фристана [1], [5], идея предиктивного кодирования стала распространяться не только на обработку зрительной информации, но также и слуховой, и, в целом, на работу всей коры.

Стоит заметить, что несмотря на сходство этой идеи с нервной моделью стимула Е. Н. Соколова [36], состоящее в том, что в обоих случаях сравнивается степень схождения двух потоков информации и выдается «сигнал рассогласования» при несовпадении этих потоков, эта идея имеет существенные отличия. Предиктивное кодирование в формулировке Рао и Балларда [30] совершенно не связано с ориентировочной реакцией, в отличие от нервной модели стимула. Оно связано с потоком информации по иерархии зрительной системы. Нервная модель стимула ничего подобного не содержит. Нервная модель стимула формируется, согласно

Соколову [36], на нейронах гиппокампа, в то время как исходная формулировка предиктивного кодирования вообще не связана с работой гиппокампа. В версиях предиктивного кодирования, как и теория Фристана [37], выходящих за рамки зрительной системы, и включающих себя самые разнообразные области мозга, гиппокамп может являться лишь одним из многих уровней иерархии, в котором сравниваются потоки информации. Существенно различается и то, что сравнивается. Согласно предиктивному кодированию на самом нижнем уровне иерархии сравнивается предсказание, приходящее с вышележащего уровня иерархии, с сенсорной информацией; на всех же остальных уровнях иерархии уже сравниваются предсказания, приходящие с вышележащих уровней иерархии, с ошибками предсказания, приходящими из нижележащих уровней иерархии. Нервная модель стимула не содержит таких понятий как «предсказание» и «ошибка предсказания», и сравнивается в данном случае не предсказание с его ошибкой, а сенсорная информация с её моделью.

Из самой идеи предиктивного кодирования, по нашему мнению, прямо не следует наличие в ней какой-то вероятностной составляющей, однако эта гипотеза может быть трактована в вероятностном смысле, где прогнозы (предсказания) становятся *вероятностными* прогнозами. Помимо этого, тот математический аппарат, который используют Рао и Баллард, содержит вероятностную составляющую [30], что дополнительно указывает на возможность вероятностной трактовки этой гипотезы.

Ещё одной важной для становления теории Фристана идеей является гипотеза байесовского мозга или гипотеза байесовского кодирования [38].

Согласно *гипотезе байесовского кодирования* мозг представляет сенсорную информацию в форме вероятностных распределений, кодируя и вычисляя оптимальным, по Байесу, образом функции плотности вероятности или приближения к функциям плотности вероятности [38]. Стоит заметить, что представления Хинтона [29] и гипотеза байесовского кодирования близки по смыслу и взаимно дополняют друг друга. Подробнее о гипотезе байесовского кодирования можно узнать в обзорной статье D.C. Knill и A. Pouget [38] или в списке литературы этой статьи.

Таким образом, творчески осмысливая идеи Гельмгольца, Хинтон и другие исследователи, начавшие применение байесовских методов для объяснения тех или иных аспектов восприятия, заложили основу для создания Фристаном его теории.

Мы, в свою очередь, считаем важным моментом акцентировать внимание читателя на том, что в теории Фристана используется именно *вероятностный (байесовский) подход* к объяснению и моделированию нервных процессов.

Теория Фристана была создана не единомоментно, общее здание теории создавалось и описывалось её автором во множестве статей. Тем не

менее, развитие теории не закончилось и продолжается в течение уже более полутора десятилетий, начавшись от формулирования основных принципов в первых статьях [5], [11], затем обогатившись основами математического аппарата в формулировке с непрерывными величинами [2], [3], [7], [8], в дальнейшем развившись в концепцию активного вывода [4], [6], и в последующих статьях развиваясь, главным образом, в формулировке с дискретными величинами [12], [39].

Математический аппарат теории Фристана имеет лишь небольшие отличия от математического аппарата байесовских методов глубокого обучения (deep learning). Любопытно, что математический аппарат, изначально разрабатываемый и применяемый в искусственном интеллекте (ИИ), применяется Фристаном, в несколько видоизмененном виде, к «интеллекту естественному». Не менее интересно и то, что совсем недавно случился и обратный поворот, когда в нескольких работах [40], [41] математический аппарат теории Фристана применили уже для задач ИИ.

Научную значимость теории Фристана подчеркивает огромная цитируемость его работ, посвященных этой теории. Так, согласно информационно-поисковой системе Google Scholar, 5 самых цитируемых статей с изложением теории Фристана имеют цитируемость ~ 1000 -5000 цитирований [42].

Однако изучение и понимание теории Фристана, на наш взгляд, существенно осложняется тем, что разные аспекты этой теории разбросаны в десятках статей автора, и его теория на данной момент не представлена в каком-то едином обобщающем научном труде в целостном виде во всех своих аспектах и с подробным и последовательным изложением. К тому же в разных статьях Фристана основные математические тождества этой теории даются с разными обозначениями, и поэтому не всегда ясно то, откуда взялось какое-то математическое тождество, и как математические тождества из разных статей соотносятся друг с другом, что затрудняет понимание теории Фристана. Например, разными символами (буквами) в разных работах обозначены: сенсорные данные, состояния среды и состояния мозга [5], [6], [43], разные виды информационных энтропий и информационных энергий [5], [6], [11], [43], [44].

Кроме того во многих работах [45]-[48], которые обращены к теории Фристана, но в которых Фристан не является автором или членом авторского коллектива, рассматриваются только отдельные аспекты этой теории, и, как правило, наиболее простые для понимания идеи, например, связанные с предиктивным кодированием. Однако более сложные для понимания вещи, такие как, например, скрытые состояния, разные виды информационных энтропий и энергий и т.д., а также целостный взгляд на всю теорию – как правило, остаются вне рассмотрения.

Помимо этого мы считаем, что существует ещё одна проблема с пониманием теории Фристана, которая заключается в том, что она изложена на языке байесовской теории вероятностей, а для большинства нейробиологов (то есть для тех людей, кому она в первую очередь интересна и полезна) этот язык является малознакомым. Полноценное понимание теории Фристана требует от читателя математической подготовки. Так, от читателя требуются *как минимум* элементарные знания в байесовской теории вероятностей, байесовских методах машинного обучения, теории информации, математическом анализе, численных методах решения дифференциальных уравнений и т.д. Поэтому глубокое и всестороннее понимание этой теории вызывает вполне понятные затруднения у нейробиологов. Стоит также заметить, что подходящих книг с систематическим и подробным изложением байесовской теории вероятностей на русском языке нами обнаружено не было, что ещё более затрудняет понимание теории Фристана отечественными нейробиологами. Кроме того, байесовская теория вероятностей имеет свою специфическую терминологию, и многие термины из этой теории могут сбивать с толку неспециалистов, вызывая у них ложные ассоциации и интерпретации.

В связи с вышеизложенными обстоятельствами *актуальным* является критическое изложение теории Фристана, насколько это возможно, в максимально понятной (в том числе для российских нейробиологов), целостной и последовательной форме в одной статье.

Новизна данной статьи. Насколько нам известно, данная работа является первой публикацией на русском языке, содержащей подробный обзор и критический анализ нейробиологической теории К. Фристана.

Целями данной работы являются:

- целостное и последовательное описание нейробиологической теории К. Фристана на основе обзора его работ, адаптированное для понимания нейробиологов и нейрофизиологов;
- критический анализ внутренних проблем и противоречий в теории Фристана, в том числе и математических;
- обсуждение возможностей и проблем применения этой теории для моделирования более приближенных к реальности нейрональных процессов по сравнению с теми, которые моделируются в работах Фристана на данный момент.

Несмотря на то, что согласно Фристану, его теория имеет общебиологический характер [43], то есть обладает способностью описывать не только работу мозга, но и работу других биологических систем, мы в нашей работе ограничимся *нейробиологическим направлением* его теории,

на основании того, что последнее наиболее полно разработано и наиболее детально описано в работах Фристана.

Мы также обращаем внимание на то, что теория Фристана представлена в его работах в двух вариантах: формулировка с использованием дифференциальных уравнений, непрерывных значений времени и случайных величин (в дальнейшем «непрерывная формулировка») и формулировка, основанная на теории марковских процессов принятия решений и дискретных значениях случайных величин. Обе формулировки математически примерно эквивалентны, однако непрерывная формулировка теории описана в работах Фристана наиболее подробно, к тому же, и об этом пишет сам Фристон [12], теория в непрерывной формулировке более биологически реалистична, поэтому в нашей работе мы будем описывать теорию Фристана в *непрерывной формулировке*.

Итак, мы выделим и последовательно рассмотрим следующие основные положения, на которых базируется нейробиологическая теория К. Фристана:

- Принцип свободной энергии.
- Фристоновская формулировка гипотезы байесовского мозга.
- Фристоновская формулировка предиктивного кодирования.

Следует заметить, что словосочетание «фристоновская формулировка» означает, что гипотезы байесовского мозга и предиктивного кодирования у Фристана имеют смысловое наполнение, несколько отличное от того, с каким они были изначально предложены другими авторами [30], [38]. Поэтому читателям желающим более подробно познакомиться с этими гипотезами, мы рекомендуем начать с исходных статей по этим гипотезам [30], [38].

Согласно собственным представлениям Фристана [1], наиболее общей идеей из вышеперечисленных является *принцип свободной энергии*. Поэтому мы начнем изложение теории Фристана именно с него.

Ещё раз отметим, что поскольку в работах Фристана не соблюдается изложение его теории с логически выстроенным и последовательным формулированием основных понятий и выведением основных положений, то мы в нашей работе предпримем попытку самостоятельно произвести такое логически выстроенное и последовательное изложение. По ходу такого изложения мы будем вводить дополнительные важные предположения, фигурирующие в теории Фристана, но прямо не относящиеся к этим трём положениям. На этом будут сделаны отдельные акценты для каждого вновь вводимого предположения.

2. Принцип свободной энергии

Сначала мы приведем аргументацию в поддержку принципа свободной энергии, которую приводит Фристон, и наши замечания по этому поводу. А затем постепенно мы будем разъяснять содержание этого принципа и смежные вопросы.

В мотивировке принципа свободной энергии Фристон пишет о том, что биологические системы функционируют в условиях постоянно меняющейся среды, испытывают её воздействие на себя и с помощью гомеостаза поддерживают своё внутреннее состояние (или состояния) в пределах определённых границ [1], [5], [11], [49]. И эти тезисы, на первый взгляд, не вызывают вопросов.

Однако заметим, что уже в самом начале мотивировки своего принципа свободной энергии Фристон не указывает, что же имеется ввиду под словом «состояния». Не находится определения этого термина и в процессе анализа всех рассмотренных нами работ Фристана. Поэтому нам приходится излагать и рассматривать теорию Фристана в том виде, в каком она была сформулирована самим автором — без чёткого указания, что же подразумевается под термином «состояние». Хотя этот термин, на наш взгляд, требует подробного разъяснения.

Затем Фристон, например, в работе [1] продолжает рассуждения следующим образом: биологические системы *«противостоят естественной тенденции к беспорядку»*, и далее через несколько предложений: *«... это поддержание порядка... отличает биологические системы от самоорганизующихся систем; действительно физиология биологических систем может быть почти полностью сведена к их гомеостазу»*. Логично предположить, что здесь Фристон ведёт речь о термодинамической энтропии. И биологические системы противостоят естественной тенденции к возрастанию термодинамической энтропии и являются, таким образом, термодинамически негэнтропийными системами. Такое представление о биологических системах, как о термодинамически негэнтропийных, не является новым и встречается у многих авторов. Например, об этом писал известный советский физиолог Н. А. Бернштейн [50]. А одним из первых об отрицательной термодинамической энтропии (термодинамической негэнтропии) в биологии, насколько нам известно, заговорил Э. Шрёдингер в своей широко известной книге «Что такое жизнь?» [51].

Далее Фристон развивает свою мысль следующим образом: *«...набор физиологических и сенсорных состояний, в которых может находиться организм, ограничен, и эти состояния определяют фенотип организма. Математически это означает, что вероятность этих (интерцептивных и экстероцептивных) сенсорных состояний должна иметь низкую энтропию; другими словами, существует высокая вероятность*

того, что система будет находиться в любом из небольшого числа состояний, и низкая вероятность того, что она будет в остальных состояниях. Энтропия — это также средняя собственная информация или «сюрприз»...» [1].

Получается, что, во-первых, здесь Фристон присоединяет сенсорные (то есть *информационные*) состояния к физиологическим состояниям, связанным с гомеостазом, а значит с *термодинамической* энтропией. И почему-то (не вполне понятно почему) сенсорные состояния должны быть связаны с термодинамической негэнтропией. А во-вторых, начав говорить о *термодинамической* негэнтропии, Фристон без приведения достаточных, на наш взгляд, обоснований переходит к *информационной* энтропии сенсорных состояний. С чем связан такой переход в рассуждениях — неясно. Иначе говоря, у Фристона информационная энтропия сенсорных состояний ещё оказывается как-то связанной с термодинамической негэнтропией.

Одно дело, на наш взгляд, когда термодинамическую энтропию можно вывести, аналогично тому, как это делал Больцман [52], из вероятностей состояний ансамбля частиц, где под состояниями понимаются скорости или энергии частиц ансамбля. И совсем другое дело, когда информационная энтропия сенсорных состояний связывается с термодинамической негэнтропией. Это, на наш взгляд, отнюдь не обратная операция по отношению к тому, что делал Больцман. Больцман не связывал состояния системы (ансамбля частиц) ни с какой сенсорикой, а связывал их с вполне определенными физическими понятиями и параметрами — скоростями и энергиями частиц в ансамбле.

Логика такого перехода в рассуждениях из термодинамики в теорию информации вызывает вопросы к Фристону и, как нам представляется, требует подробных разъяснений со стороны автора теории.

У нас нет возражений по поводу негэнтропии живых систем. Однако мы считаем важным различать понятия термодинамической энтропии и информационной энтропии, и в том числе — в приложении к живым системам. При сходных чертах эти понятия всё же не являются тождественными, и этот факт не следует игнорировать.

Таким образом, исходя из рассуждений Фристона, можно сказать, что степени свободы варьирования (в дальнейшем, просто *степени свободы*) своих состояний, которыми может обладать организм и не погибать или не повреждаться, находятся в определённых рамках. Поэтому, для того чтобы поддерживать свои физиологические параметры в пределах этих границ, организму необходимо соблюдать определённый оптимум степеней свободы. Для этого он должен *уменьшать* количество степеней свободы своих состояний.

Аналогичные рассуждения К. Фристон применяет не только ко всему организму, но и к мозгу [1], [5], [11]. В этом случае в роли внешней среды по отношению к мозгу выступает как окружающая организм среда (то есть весь окружающий мир), так и внутренняя среда организма [1], [5]. Внешние по отношению к мозгу состояния среды производят в нервной системе «сенсорные состояния» путём воздействия на сенсорные рецепторы. Другими словами, в этом случае мы имеем систему, состоящую из внешней среды, рецепторов органов чувств (экстероцепторов) и рецепторов внутренних органов (интероцепторов) и мозга. Сенсорные состояния связаны с активностью рецепторов органов чувств и внутренних органов. Эти состояния необходимо держать в определенных границах, совместимых с границами выживания организма.

В теории информации мерой неопределенности состояний системы является величина, называемая *информационной энтропией* [53]-[55]. Устранение неопределённости своих сенсорных состояний, исходя из вышеописанного, согласно Фристону [1]-[12], эквивалентно минимизации информационной энтропии.

По аналогии с энтропией и свободной энергией Гельмгольца [56] из статистической физики (но только по аналогии, не больше!), с информационной энтропией Фристоном [1]-[12] связывается ещё одна величина, называемая им «свободной энергией». Мы пока не будем давать этой величине чёткого определения. В дальнейшем мы сначала уточним это понятие, а в затем раскроем его смысл более подробно. Соответственно, в таком случае минимизация информационной энтропии приводит к минимизации «свободной энергии».

В теории информации и машинном обучении термины «свободная энергия» или «вариационная свободная энергия» одним из первых начал использовать, насколько нам известно, Дж. Хинтон [29], [57]-[60].

Важно принять во внимание то, что понятие «свободная энергия», используемое Хинтоном, а в дальнейшем Фристоном, имеет лишь формальное поверхностное сходство с термодинамической свободной энергией Гельмгольца. Дело в том, что математические формулы для термодинамической свободной энергии Гельмгольца и свободной энергии, используемой Хинтоном и Фристоном, очень похожи. Скорее всего, именно на основании этой аналогии Хинтон ввел данный термин в теорию информации. Фристон в своих работах чаще всего употребляет термин «свободная энергия» без дополнительных прилагательных, хотя термин «вариационная свободная энергия» у него также встречается.

В контексте вышеизложенного, «свободную энергию» Хинтона и Фристана мы будем называть *информационной свободной энергией (ИСЭ)*. Нам кажется, что термин «информационная свободная энергия» более информативен и понятен для восприятия, особенно для неспеци-

алистов в байесовской теории вероятностей. Кроме того, этот термин, как нам кажется, поможет избежать неверных аналогий с соответствующей величиной из термодинамики, так как подчеркивает теоретико-информационный, а не термодинамический характер этой величины. Другими словами, ИСЭ — это не то же самое, что термодинамическая свободная энергия (свободная энергия Гельмгольца) и *ставит знак равенства между этими двумя энергиями категорически неверно*. Об этом неоднократно пишет и сам Фристон [1], [4], [43]. ИСЭ выражается через *информационную энтропию*, а термодинамическая свободная энергия — через *термодинамическую энтропию*. Исходя из этого, не стоит связывать с информационной энтропией такие понятия, ассоциируемые с термодинамической энтропией, как порядок и хаос.

Подчеркнём особенности ИСЭ.

ИСЭ не измеряется ни в джоулях, ни в каких бы то ни было других величинах для измерения энергии из физики. Она не может ни запасаться, ни храниться, ни передаваться, ни преобразовываться, ни тратиться. ИСЭ, по нашему мнению, вполне можно было бы измерять в натах (нат — единица измерения количества информации, определяемая через натуральный логарифм, в отличие, например от бита, определяемого через логарифм по основанию 2 и равная 1.443 бит [61]). Однако, Фристон в своих статьях не упоминает, что ИСЭ может быть измерена в каких-то величинах из теории информации.

В байесовской теории вероятностей, а точнее, в вариационных байесовских методах, очень часто для процедуры вывода, аналогичной той, которая используется в теории Фристана, используется величина, называемая по-разному: «вариационная нижняя оценка», «нижняя оценка обоснованности» или «нижняя оценка предельного правдоподобия» [55]. ИСЭ является величиной, *противоположной* вариационной нижней оценке (нижней оценке обоснованности, нижней оценке предельного правдоподобия), то есть ИСЭ равна вариационной нижней оценке, взятой со знаком минус [55]. В работах Фристана [6], [49] встречается и другой подход для обоснования принципа свободной энергии, состоящий из двух основных идей.

Согласно первой идее предполагается, что любые биологические системы (в том числе и мозг) могут быть описаны как эргодические случайные динамические системы (аттракторы). А гомеостаз выступает как своего рода неотъемлемый атрибут такой системы, связанный с пребыванием состояний этой системы в некотором аттрактивном множестве состояний. Помимо этого, такой эргодический случайный динамический аттрактор имеет, по определению, ещё один атрибут, называемой эргодической плотностью. Эргодическая плотность — это инвариантная вероятностная мера, пропорциональная, в данном случае, количеству времени

в течение которого организм занимает каждое состояние. Или, другими словами, эргодическую плотность можно рассматривать как вероятность нахождения целевой системы в любом из состояний в любой момент времени. А уже в свою очередь с эргодической плотностью можно связать ещё одну величину, называемую энтропией эргодической плотности.

Энтропия эргодической плотности — инвариантная мера, которая суммирует количество различных состояний, которые занимает система.

Согласно второй идее, понятия, связанные эргодической случайной динамической системой, трактуются в байесовском и теоретико-информационном смыслах. В этом случае эргодическая плотность трактуется как предельное правдоподобие, а энтропия эргодической плотности трактуется как информационная энтропия (если говорить более точно — то как дифференциальная энтропия). В результате производится своего рода синтез эргодических случайных динамических систем с теорией информации и байесовской статистикой.

Другими словами, способность живых организмов поддерживать гомеостаз, не повреждаться и не погибать получает при таком подходе [6], [49] теоретико-информационное и статистическое обоснование. Однако и этот подход Фристонa не свободен от серьезной критики. Так, в работе [62] подробно разбираются и оспариваются основания считать биологические системы эргодическими случайными динамическими аттракторами. А в работе [63] демонстрируется математическая необоснованность трактовки эргодических случайных динамических систем в теоретико-информационном и байесовском смыслах и прочие нестыковки в теории Фристонa с точки зрения математики. Тем не менее в своих последних работах Фристон [64], [65] пытается укрепить математические основания своей теории. Итак, познакомившись с основаниями принципа свободной энергии, можно перейти, наконец, к формулировке этого принципа.

Согласно Фристону, принцип свободной энергии заключается в том, что *«любая самоорганизующаяся система, находящаяся в равновесии с окружающей средой, должна минимизировать свою свободную энергию, противостоя естественной тенденции к беспорядку»* [1].

Это определение нам представляется не очень удачным, потому что в нём не ясно, что значит «противостоя тенденция к беспорядку», и о какой именно свободной энергии идет речь: термодинамической или информационной.

В одной из работ Фристонa есть и такое, не проясняющее ситуацию, а скорее ещё более запутывающее, определение: *«Пусть $m = (R^d, \varphi)$ — эргодическая случайная динамическая система с пространством состояний $X = R \times S \in R^d$. Если внутренние состояния $r \in R$ минимизируют свободную энергию, то система подчиняется принципу наименьшего действия и является активной системой.»*

Учитывая эти определения, мы предлагаем сформулировать рассмотренный принцип, в приложении к мозгу, следующим образом:

«Мозг должен минимизировать свою информационную свободную энергию, противостоя возрастанию своей информационной энтропии».

Формулировка принципа свободной энергии именно в таком виде, в котором мы предлагаем, а не в том виде, который предложил Фристон, важна ещё и по следующей причине. Дело в том, что в работах Фристана [1], [5] присутствует некоторый терминологический и смысловой переход (или даже перескок) в рассуждениях: с термодинамики — в теории информации, когда речь идёт о мотивировке Фристоном его принципа свободной энергии. Об этом неожиданном переходе в рассуждениях мы написали выше и он, как нам кажется, не имеет достаточных оснований. Поэтому, читая формулировку принципа свободной энергии, предложенную Фристоном, можно подумать, что речь в ней идёт о термодинамике, но оказывается, нет — речь о теории информации. Наше определение, как мы думаем, не провоцирует таких неоднозначных интерпретаций.

Помимо принципа свободной энергии Фристон использует в своей теории [1], [7], [49] *принцип наименьшего действия*, широко применяемый в физике [56], [66], [67]. Соответственно, в теории Фристана фигурирует ещё одна величина, которую, в связи с соображениями, изложенными выше в отношении ИСЭ, правильнее называть не просто «действием» или «свободным действием», а «*информационным свободным действием*». Математическое выражение, соответствующее принципу наименьшего действия, встречается у Фристана [1], [7], и оно аналогично тому же принципу из физики [56]:

$$S = \int F dt, \quad (1)$$

где S — информационное свободное действие, F — информационная свободная энергия.

Кроме того, под знаком интеграла для аналогичного математического выражения для принципа наименьшего действия из физики стоит лагранжиан. Также и у Фристана [68] свободная энергия — это лагранжиан, то есть некоторая функция от обобщённых координат. Соответственно, для того, чтобы ИСЭ соответствовала форме лагранжиана, Фристоном вводятся в его теорию обобщённые координаты, а ИСЭ, таким образом, является функцией от обобщённых координат.

Фристон называет *информационным свободным действием интеграл по траектории (или пути эволюции) информационной свободной энергии* [3], [4]. А в одной из работ Фристана [49] присутствует более развернутая формулировка этого же: «*внутренние состояния активной системы минимизируют неожиданность..., так что вариация δS действия S по отношению к её внутренним состояниям... обращается в*

нуль». Однако Фристон не приводит подробных пояснений в отношении того, что обозначают эти определения.

Мы, в свою очередь, будем называть информационным свободным действием число, которое получается при интегрировании информационной свободной энергии по времени от момента времени t_1 до момента времени t_2 . А принцип наименьшего действия в этом случае заключается в том, что это число будет наименьшим при подстановке в уравнение 1 кривой, соответствующей истинному пути эволюции информационной свободной энергии.

Говоря о стремлении мозга минимизировать неопределённость сенсорных состояний, например, состояний рецепторов органов чувств, Фристон выдвигает важное для его теории положение о том, что мозг не может изменять их *непосредственно*, однако может это делать *опосредованно* через двигательную активность, активно влияя, таким путём, на среду [1], [4], [6]. Поведенческая активность организма изменяет состояние окружающей его среды, а изменение состояний среды, в свою очередь, приводит к изменению сенсорных состояний рецепторов органов чувств.

Однако данное положение о недоступности для мозга прямого управления состояниями сенсорных рецепторов, по нашему мнению, может быть оспорено. Уже довольно давно известно о существовании сенсорных эфферентов, таких как гамма-эфференты [69], оливокохлеарные эфференты [70], ретинопетальные эфференты [71]. По оливокохлеарным и ретинопетальным эфферентам нервные импульсы идут напрямую из головного мозга к соответствующим рецепторам. Благодаря этому головной мозг напрямую управляет чувствительностью сенсорных рецепторов и, следовательно, сенсорными состояниями [70], [71]. Однако, например, гамма-эфферентам Фристон [72] отводит роль своего рода регулятора шума проприоцептивных состояний. В работах Фристона нами не было найдено подробного обсуждения роли оливокохлеарных и ретинопетальных эфферентов. В связи с этим мы считаем недостаточно проработанным вопрос о роли сенсорных эфферентов в теории Фристона.

Следуя логике Фристона, можно сказать, что сенсорные состояния (то есть состояния рецепторов органов чувств), являясь отражением состояний среды, влияют на состояния мозга. Для того, чтобы иметь возможность успевать реагировать на воздействие среды или изменения в среде, мозгу нужно уметь заранее прогнозировать эти воздействия или изменения. Но составлять подобные прогнозы можно лишь на основе той сенсорной информации, которую мозг уже получил ранее.

Главной проблемой, порождающей необходимость в составлении прогнозов, является то, что для организма наиболее выгодно формировать ответную реакцию на изменение среды заранее, ещё *до наступления* это-

го события, до получения сенсорной информации о нём. А это можно сделать только на основании прогноза, составленного на будущее. Можно сказать, что мозг вынужден «работать на опережение» для того чтобы выжить в условиях постоянно меняющейся среды. В дальнейшем мы рассмотрим то, как мозг прогнозирует состояния среды на основе имеющейся сенсорной информации с позиций теории К. Фристана. Важно, что на основе этого прогноза о состояниях среды прогнозируются и будущие предполагаемые сенсорные состояния.

Подводя итог вышеизложенному, можно сказать, что принцип (информационной) свободной энергии К. Фристана имеет потенциальный объяснительный потенциал. Однако этот принцип игнорирует возможность прямого управляющего влияния мозга на сенсорные состояния и допускает неясности в отношении таких понятий как «термодинамическая энтропия», с одной стороны, и «информационная энтропия», с другой стороны. Кроме того, как мы уже упоминали, остаётся неясным, что же подразумевается под термином «состояние». Эти моменты, как нам представляется, являются существенными недоработками теории Фристана.

3. Фристоновская формулировка гипотезы байесовского мозга (байесовского кодирования)

В этом разделе мы продолжаем рассматривать систему, состоящую, с одной стороны, из среды, экстерорецепторов органов чувств и интерорецепторов внутренних органов, которые мы называем *сенсорными рецепторами*, и, с другой стороны, мозга, не вдаваясь в конкретные детали его устройства. Работу мозга с информацией мы будем рассматривать с позиций байесовской теории вероятностей, предоставляющей математический аппарат для такого рассмотрения. В дальнейшем, при таком подходе, речь идёт скорее не о работе реального мозга, а о работе абстрактного, «байесовского мозга». А для того чтобы рассматривать работу мозга таким образом, сначала мы введём основные понятия, необходимые для такого рассмотрения.

Как мы писали в предыдущем разделе, внешние по отношению к мозгу состояния среды производят сенсорные состояния, связанные с активностью сенсорных рецепторов. Иначе говоря, перефразируя Фристана [1], [2], [11], [43], можно сказать, что *мозгом воспринимаются не сами объекты внешней среды непосредственно, а сенсорные состояния, которые являются результатом действия внешней среды на сенсорные рецепторы*. О похожих по смыслу вещах писал ещё Гельмгольц [13], [15] (о подобных вещах помимо Гельмгольца писали ещё Платон с его пред-

ставлением о «ноуменах» [73] и И. Кант — как о «вещах в себе» [74]). Другими словами, состояния среды являются для самого мозга *ненаблюдаемыми*, не доступными непосредственно величинами, а сенсорные состояния являются *наблюдаемыми*, доступными непосредственно самим мозгом величинами. И, соответственно, *состояния внешней среды «доступны» для мозга только опосредованно*, через сенсорные состояния (наблюдаемые мозгом величины), являющиеся зависимыми от состояний внешней среды (ненаблюдаемых состояний), так как сенсорные состояния порождаются состояниями среды [1], [2], [11], [43].

По этому поводу можно образно сказать, что между внешней средой и мозгом есть своего рода «стена» за которую мозг не может выйти и которую не может преодолеть. А сенсорные рецепторы в этом случае выполняют роль своего рода «переводчика», который переводит информационные сигналы с «языка окружающей среды» на «язык мозга». Среда непосредственно влияет только на состояние «переводчика», воспринимающего её «язык», но не на сам мозг. Без такого «рецепторно-сенсорного перевода» информационные сигналы окружающей среды для мозга просто недоступны. Поскольку состояния среды являются ненаблюдаемыми величинами, то о том, в каком состоянии находится внешняя среда, можно говорить только в предположительном, *вероятностном* ключе, выдвигая *гипотезы* о ней [1], [2], [11], [43]. О близких по смыслу вещах, правда на другую тему, пишет, например, известный физик-теоретик Ричард Фейнман: «*Откуда мы всё-таки знаем, что атомы существуют? А здесь идёт в ход уже описанный приём: мы предполагаем их существование, и все результаты один за другим оказываются такими, как мы предскажем, какими они должны быть, если всё состоит из атомов*» [75].

Такая *вероятность*, которая позволяет работать с ненаблюдаемыми величинами вне зависимости от природы процесса, которому подчиняется их поведение, называется *байесовской вероятностью* [76]-[78].

В соответствии с этим подходом, мозг решает так называемую *обратную задачу* [1], [2], [11], [43]. Он по *результатам* (в роли результата выступают сенсорные состояния) делает суждение о *причинах* (в роли причин выступают состояния среды), приведших к этому результату. Обратной эта задача называется потому, что она является противоположной по отношению к *прямой задаче*, то есть задаче, где мы на основе исходных причин делаем предположения о возможных следствиях (результатах).

Другими словами, обобщая написанное Фристоном в его работах [1], [4], [5], можно сказать, что идея о том, что мозг делает суждения о состояниях среды по сенсорным состояниям, аналогична по смыслу идее «бессознательного вывода», предложенной Гельмгольцем.

Интересно отметить, что прямая задача — это по сути вывод следствий в классической и булевой логиках. Однако эти логики не способны решать обратные задачи, в то время как байесовский подход в теории вероятностей позволяет решать как прямые задачи, так и обратные, таким образом являясь обобщением правил вывода классической и булевой логик [70], [71], [76]-[78].

Соответственно, предполагая байесовские вероятности состояний внешней среды и принимая во внимание зависимость от них сенсорных состояний, мы можем говорить, в свою очередь, о *байесовской вероятности сенсорных состояний*, то есть о вероятности наступления сенсорных состояний при условии, что внешняя среда имеет некоторое состояние [1], [2], [4], [5], [11], [43]. Такая вероятность называется *условной вероятностью или условной байесовской вероятностью*. Такой подход соответствует байесовскому подходу в теории вероятностей, который позволяет работать как с ненаблюдаемыми (скрытыми, латентными) величинами, так и с наблюдаемыми величинами [76]-[78].

Для точного подсчёта как условной вероятности, так любых других байесовских вероятностей используется, как известно, теорема Байеса [53], [54], [79]-[81].

Теорема Байеса (или формула Байеса) в теории Фристана является той первоосновой, которая пронизывает весь математический аппарат этой теории, и вокруг которой он вращается. Можно даже сказать, что те основные *уравнения теории Фристана*, к которым мы придём через некоторое время — *это изменённая почти до неузнаваемости, преобразованная и дополненная добавочными членами, но, по сути, всё та же формула Байеса. А все вероятности, которые мы используем в этой статье, являются байесовскими вероятностями.*

Согласно теореме Байеса условная вероятность события B при условии, что событие A наступило, равна произведению условной вероятности события A при условии B и безусловной вероятности события A , делённой на безусловную вероятность события B [53]-[55]. Или:

$$p(B|A) = \frac{p(A|B)p(A)}{p(B)}, \quad (2)$$

где $p(A|B)$ — условная вероятность события A при условии, что событие B наступило; $p(B|A)$ — условная вероятность события B при условии A ; $p(A)$ — безусловная вероятность события A ; $p(B)$ — безусловная вероятность события B .

Буква « p » (от англ. probability) во всех формулах, которые мы используем, обозначает вероятность.

В байесовской теории вероятностей величина $p(A|B)$ называется *правдоподобием*, величина $p(B|A)$ называется *апостериорной вероят-*

ностью, величина $p(A)$ называется *предельным или интегрированным правдоподобием, или обоснованностью, или обоснованностью модели, и $p(B)$ — априорной вероятностью* [53]-[55].

В нашем случае событие A — это сенсорные состояния, событие B — состояния среды.

Стоит сразу отметить, что мы в дальнейшем будем иметь дело не с какими-то одиночными вероятностями, соответствующими соотношениям между этими состояниями, а с *вероятностными распределениями*, определяющими эти соотношения. В соответствии с этим будут производиться не точечные оценки тех или иных вероятностей, а будут оцениваться вероятностные распределения.

Теорема Байеса принимает тогда следующий вид: вероятностное распределение нахождения внешней среды в некотором состоянии при условии сенсорных состояний равно произведению вероятностного распределения наступления сенсорных состояний при условии, что внешняя среда находится в некотором состоянии, и вероятностного распределения состояний внешней среды, делённой на вероятностное распределение сенсорных состояний. Обозначив $s = s(t)$ — сенсорные состояния, $v = v(t)$ — состояния среды (Буква t в s и v обозначает, что сенсорные состояния и причинные состояния среды изменяются во времени, однако, для экономии места и меньшей нагромождённости формул, мы будем использовать s и v , не указывая зависимость этих переменных от времени) и заменив на s и B на v , получим:

$$p(v|s) = \frac{p(s|v)p(v)}{p(s)}, \quad (3)$$

где v — состояния среды, или ненаблюдаемые переменные, или причины сенсорных данных, которые состоят из скрытых (латентных) состояний x , скрытых причин ν и параметров состояний внешней среды θ и γ ; s — сенсорные данные, или наблюдаемые переменные; $p(v|s)$ — апостериорное распределение вероятностей; $p(s|v)$ — правдоподобие; $p(s)$ — предельное правдоподобие, интегрированное правдоподобие, обоснованность, или нормировочная константа; $p(v)$ — априорное распределение вероятностей состояний среды (скрытых, или латентных, состояний x и параметров состояний внешней среды θ) [1], [2], [4], [5], [11], [43].

Теперь давайте разберёмся в этих обозначениях более подробно.

Для начала скажем, что мы употребляем понятия «состояния среды», «причинные состояния среды» или «ненаблюдаемые переменные», или «ненаблюдаемые величины», или «причины сенсорных данных» синонимично и равнозначно. Стоит ещё добавить, что вместо термина «состояния среды» мы в дальнейшем будем чаще употреблять термин «причин-

ные состояния среды» для того, чтобы у читателей не возникали ложные ассоциации с понятием «среда» из экологии.

Сначала разберёмся в отношении того, что такое *причинные состояния среды* v . Как мы написали выше, v состоят из скрытых (латентных) состояний x , скрытых причин ν и параметров состояний внешней среды θ и γ . В статьях Фристана есть путаница по этому поводу. Например, в одной из своих работ [11] он пишет следующее: «*Причины — это просто состояния процессов, генерирующих сенсорные данные. Причины могут быть категориальными по своей природе, например, идентичность лица или семантическая категория, к которой принадлежит объект. Другие могут быть параметрическими, например положение объекта...*» и «*...Причины — это количества или состояния, которые необходимы для определения продуктов процесса, генерирующего сенсорную информацию...*». И называет в качестве примера причин такие вещи как скорость конкретного объекта, направление световых лучей и т. д. [11]. Причём из текста работы не совсем ясно о чём же идёт речь: о скрытых состояниях, скрытых причинах, параметрах или обо всём этом сразу. В другой работе [82] Фристон, первоначально вводит термин «скрытые состояния», затем пишет, что скрытые состояния делятся на скрытые динамические состояния и скрытые причины, а затем по ходу текста термин «скрытые состояния» вновь употребляется без каких-либо дополнительных пояснений о том, что речь идет о скрытых динамических состояниях. Другими словами, из этой работы [82], а также из других работ [1], [3]-[5], [7] можно подумать, что скрытые состояния делятся на скрытые состояния и скрытые причины. А ещё в одной из работ [123] Фристон исходно использует термин «причины» для обозначения величины, аналогичной нашей v . А затем в этой же работе выясняется, что причины v делятся на скрытые состояния x и причины ν . Причем причины ν , как пишет Фристон, являются состояниями, как и, собственно, скрытые состояния x . Иначе говоря, исходя из этой работы [123], можно подумать, что причины делятся на скрытые состояния и причины. Общим знаменателем этих работ, тем не менее, является то, что есть некоторое общее понятие, которое делится на две категории: скрытые состояния и причины. Нужно сказать, что и наше определение для этого общего понятия, такое как «состояния среды» или «причинные состояния среды», тоже может показаться несколько неудачным. Однако достаточно сложно предложить термин, который был бы близок к тому, что употребляет Фристон, и был бы свободен от вышеописанных недостатков. Мы считаем, что эти наши пояснения освободят читателя от возможного недопонимания работ Фристана в отношении скрытых состояний и причин.

Исходя из написанного выше, мы, для состояний среды или «причин сенсорных данных» v , для начала предлагаем такое определение: *причинные состояния среды v — это любые состояния окружающей среды, функции от этих состояний и функции, связанные с этими состояниями, информацию о которых мозг получает через сенсорные рецепторы, то есть через изменения сенсорных состояний.*

Для скрытых состояний и скрытых причин Фристон даёт следующие определения. Скрытые причины v — это функции от скрытых состояний [82]. «Состояния v называются причинами, входами или источниками «могут быть детерминированными, стохастическими или и теми, и другими» [123]. Состояния x называются скрытыми состояниями, «потому что их редко можно наблюдать напрямую» и они «опосредуют влияние ввода на вывод и наделяют систему памятью» [123]. В следующей главе эти определения будут нами расширены и уточнены.

Заметим, что байесовский подход в теории вероятностей допускает работать с ненаблюдаемыми (скрытыми, латентными, неопределёнными) состояниями точно так же, как с обычными случайными величинами, вне зависимости от природы процесса их породившего (здесь имеется в виду, что процесс, порождающий ненаблюдаемые состояния может быть как случайным, так и детерминистическим). В этом случае в байесовской интерпретации вероятность связывается с уровнем доверия (belief). И с помощью теоремы Байеса в таком случае оценивается доверие предположению (гипотезе) о распределении ненаблюдаемой (скрытой, латентной) величины (причины) до и после принятия во внимание сенсорных данных [53]-[55].

Для сенсорных состояний s Фристон чёткого определения не приводит, поэтому мы дадим наше собственное определение. Под *сенсорными состояниями s* мы понимаем *состояния сенсорных рецепторов*, которые являются зависимыми от среды. Зависимость сенсорных состояний от причин заключается в том, что причины порождают сенсорные данные. Процесс порождения причинами сенсорных данных называется *порождающим процессом*. «Задать порождающий процесс» — означает задать математическую модель того, как причины порождают сенсорные данные. Сенсорные состояния являются наблюдаемыми величинами. В роли «наблюдателя» сенсорных состояний выступает мозг.

Апостериорное распределение вероятностей (или просто апостериорное распределение) Фристон определяет так [[1]]: «*апостериорное распределение вероятностей — это распределение вероятностей состояний среды или параметров модели, учитывая некоторые данные, то есть вероятностное отображение (отображение — математический термин) из наблюдаемых данных в состояния среды*».

Мы, в свою очередь, называем апостериорным распределением вероятностей условное вероятностное распределение нахождения внешней среды в некотором состоянии при учёте данных сенсорных состояний. Апостериорное вероятностное распределение $p(v|s)$ можно также назвать *вероятностным распределением причинных состояний среды v* при условии, что сенсорные данные s получены. Процедура оценки или вычисления апостериорной вероятности или апостериорного вероятностного распределения называется *байесовским выводом* [53]-[55].

Априорное распределение вероятностей (или просто априорное распределение), по Фристону [1], — это вероятностное распределение состояний среды, которое кодирует убеждения (beliefs) об этих состояниях *перед* наблюдением сенсорных данных. Мы называем априорным распределением вероятностей (априорным распределением вероятностей причинных состояний среды) $p(v)$ величину, которая выражает *предварительные предположения* о причинных состояниях среды до учёта реальных сенсорных данных. Иначе это можно назвать *гипотезой о ненаблюдаемых состояниях перед непосредственным опытом*, то есть перед получением сенсорных данных, верифицирующих (подтверждающих или отвергающих) данную гипотезу.

Правдоподобие $p(s|v)$, согласно Фристону [84], определяет то, каким образом состояния среды приводят к сенсорным данным. Правдоподобием мы называем условное распределение вероятностей наступления сенсорных состояний при условии, что внешняя среда находится в некотором причинном состоянии. Проще можно сказать, что *правдоподобие показывает, каким образом наступление сенсорных состояний зависит от причинных состояний среды*.

Предельное правдоподобие (обоснованность) $p(s)$ по Фристону — это вероятностное распределение выборки некоторых данных в рамках конкретной модели [85].

Мы называем предельным правдоподобием вероятностное распределение сенсорных состояний, при котором причинные состояния среды v исключены с помощью операции маргинализации, то есть интегрирования произведения правдоподобия $p(s|v)$ и априорного распределения $p(v)$ по причинным состояниям среды v .

Помимо вышеописанных величин, в теории Фристона [1], [2], [11], [43] фигурирует ещё одна величина, которая может быть получена преобразованием числителя в правой части уравнения 3 следующим образом:

$$p(v|s) = \frac{p(s, v)}{p(s)}, \quad (4)$$

эта новая величина $p(s, v)$ — совместное распределение вероятностей.

Совместным распределением вероятностей $p(s, v)$ называется величина равная произведению правдоподобия $p(s|v)$ на априорную вероятность $p(v)$ [86]. Совместное распределение вероятностей в байесовской теории вероятностей называется *порождающей моделью*. Фристон приводит такое определение порождающей модели: «*порождающая модель — это вероятностная модель зависимостей между причинами и следствиями (данными), из которых могут быть получены выборки*» [1].

Мы, со своей стороны, можем дать такое определение порождающей модели: порождающая (генеративная) модель — это вероятностная (статистическая) модель совместного распределения вероятностей причинных состояний внешней среды (причин сенсорных данных) и сенсорных данных (для точного понимания и корректного употребления термина «порождающая модель» его всегда можно заменить на словосочетание «совместное распределение вероятностей» или «произведение правдоподобия на априорное распределение вероятностей»).

А статистическая модель — это, в свою очередь, набор математических функций, которые описывают поведение объектов в терминах случайных величин и связанных с ними распределений вероятностей [86]. (Заметим, что «статистическая модель» является более общим понятием, чем «вероятностная модель». Иначе говоря, статистическая модель представляет из себя набор вероятностных моделей [87]. Хотя с точки зрения теории вероятностей не совсем корректно эти понятия использовать синонимично, однако, в контексте нашей статьи, этот момент не является принципиальным.) Порождающая модель называется порождающей потому, что мы можем сделать выборку из совместного распределения для получения новых данных вместе с их метками [81].

Задать вероятностную (статистическую) модель — это значит задать совместное распределение вероятностей [53]-[55]:

$$p(s, v) = p(s|v)p(v). \quad (5)$$

(При использовании теории Фристона в собственных исследованиях для задания порождающих моделей можно использовать графовое представление порождающей модели. Иначе можно сказать, что порождающую модель можно представить как ориентированный граф. Такое представление порождающей модели может быть полезно для того, чтобы не забыть условные вероятности между одними узлами и другими узлами этой сети (графа) и правильно задать порождающую модель.) А сам процесс, при котором выборочные информационные данные (сенсорные сэмплы) используются для получения некоторого представления о состояниях среды, в теории Фристона называется статистическим выводом [1]. Теперь, когда мы охарактеризовали основные понятия, фигурирующие

в фристонской формулировке гипотезы байесовского мозга, можно перейти к определению для этой гипотезы.

Фристон предлагает такое определение: мозг использует внутренние вероятностные (порождающие) модели для обновления апостериорных вероятностей, используя сенсорную информацию, в (приблизительно) оптимальном, по Байесу, виде [1].

В литературе по байесовской теории вероятностей нам удалось найти только одну формулировку того, что такое оптимальность по Байесу: вероятностная модель является оптимальной по Байесу, если выполняются предположения об истинном апостериорном распределении [81].

Во введении мы уже приводили гипотезу байесовского кодирования (байесовского мозга), однако, по нашему мнению, и фристонская формулировка гипотезы байесовского мозга, и та, которая была приведена нами во введении, недостаточно удачны, поэтому мы приведём здесь свой вариант гипотезы байесовского мозга. Гипотеза байесовского мозга состоит в следующем:

- Мозг представляет сенсорную информацию в форме вероятностных распределений: как совместного распределения вероятностей сенсорных данных и причинных состояний среды (причин сенсорных данных), так и предельного правдоподобия (обоснованности) сенсорных данных.
- Мозг кодирует и вычисляет оптимальным, по Байесу, образом функции плотности вероятности апостериорного распределения причинных состояний среды и сенсорных данных или приближения к функциям плотности вероятности апостериорного распределения (вариационное распределение состояний среды или плотность распознавания). Здесь встречается термин «функция плотности вероятности» или просто «плотность вероятности», которая является ничем иным как способом задания вероятностного распределения. Для дискретной случайной величины вероятностное распределение задается как функция вероятности, а для непрерывной случайной величины — как плотность вероятности. Так как плотность вероятности является способом задания вероятностного распределения непрерывной случайной величины и учитывая то, что в нашей статье мы рассматриваем теорию Фристана в непрерывной формулировке, то в дальнейшем мы будем использовать термины «вероятностное распределение» и «плотность вероятности» как взаимозаменяемые. О том, что такое «вариационное распределение причинных состояний среды (плотность распознавания)» — будет написано ниже.

Из гипотезы байесовского мозга и из рассуждений, представленных выше, по нашему мнению, вытекает ряд следствий, нигде явно не упомянутых Фристоном:

- 1) Мозг строит вероятностные (статистические) модели окружающей среды. У Фристана речь идёт не о каких-то там «нервных моделях», а о моделях именно вероятностных (статистических).
- 2) Вероятностные распределения, используемые мозгом, имеют марковское свойство.
- 3) Работа мозга может быть описана в согласии с теоремой Байеса.

Теперь перейдем к математическим преобразованиям, связывающим теорему Байеса и, соответственно, гипотезу байесовского мозга, с одной стороны, и ИСЭ, введенную в предыдущем разделе, с другой стороны. Отметим, что основную часть этих преобразований Фристон не приводит в своих работах, ограничиваясь кратким изложением [1], [2], [11], [43], однако в работах других авторов встречаются аналогичные, приводимым нами, математические преобразования [45], [46].

Помимо уравнений 3 и 4, описанные выше величины можно представить по-другому, а именно:

$$p(v|s) = \frac{p(s|v)p(v)}{\int p(s, v)dv} = \frac{p(s, v)}{\int p(s, v)dv}, \quad (6)$$

Тогда предельное правдоподобие, или обоснованность, можно выразить следующим образом:

$$p(s) = \frac{p(s, v)}{p(v|s)}, \quad (7)$$

При работе с плотностями вероятностей удобнее работать с логарифмическими значениями (натуральный логарифм) соответствующих плотностей, поэтому логарифмируя левую и правую части уравнения 7 получим:

$$\ln p(s) = \ln \frac{p(s, v)}{p(v|s)}, \quad (8)$$

Расчёт предельного правдоподобия (обоснованности) $p(s)$ сопряжён со значительными, часто непреодолимыми, трудностями, потому что эта величина представляет из себя интеграл: $p(s) = \int p(s, v)dv$. Поэтому вместо расчёта этого интеграла, согласно вариационным байесовским методам, вводится новая функция — вариационное распределение $q(v)$, которая в теории Фристана называется «плотностью распознавания». Соответственно, Фристоном вводится дополнительное предположение: мозг

должен кодировать плотность распознавания $q(v)$ (несмотря на важность этого предположения для всего последующего формулирования математического аппарата теории Фристана, в изученных нами работах Фристана нигде отдельно это предположение явно не выделяется). Апостериорное распределение набора ненаблюдаемых (скрытых, латентных) причинных состояний среды v над наблюдаемыми сенсорными данными s в том случае приближается вариационным распределением $q(v)$ (плотностью распознавания, прокси-функцией) (вариационные байесовские методы (или, что то же самое, «ансамблевое обучение») — это методы вычисления апостериорного распределения вероятностей, основанные на введении вариационного распределения (прокси-функции, плотности распознавания). Или, проще говоря, плотность распознавания $q(v)$ (вариационное распределение или вариационное распределение причинных состояний среды) становится приблизительным апостериорным распределением $p(v|s)$:

$$p(v|s) \approx q(v). \quad (9)$$

Плотность распознавания (прокси-функция, вариационное распределение) $q(v)$ нормируется как:

$$\int q(v)dv = 1. \quad (10)$$

Учитывая уравнение 10, согласно неравенству Йенсена [53]-[55] уравнение 8 можно переписать так:

$$\ln p(s) = \int q(v) \ln \frac{p(s, v)}{p(v|s)} dv, \quad (11)$$

или, соблюдая тождество, так:

$$\ln p(s) = \int q(v) \ln \frac{p(s, v)q(v)}{p(v|s)q(v)} dv, \quad (12)$$

а произведение под знаком натурального логарифма в правой части уравнения 12 может быть переписано как сумма натуральных логарифмов:

$$\ln p(s) = \int q(v) \left(\ln \frac{q(v)}{p(v|s)} + \ln \frac{p(s, v)}{q(v)} \right) dv. \quad (13)$$

Интеграл суммы равен сумме интегралов:

$$\ln p(s) = \int q(v) \ln \frac{q(v)}{p(v|s)} dv + \int q(v) \ln \frac{p(s, v)}{q(v)} dv. \quad (14)$$

Теперь перепишем 2-й интеграл в правой части уравнения 14, поменяв местами $p(s, v)$ и $q(v)$. Это приводит и к смене знака перед этим интегралом на противоположный. В итоге получим:

$$\ln p(s) = \int q(v) \ln \frac{q(v)}{p(v|s)} dv - \int q(v) \ln \frac{q(v)}{p(s, v)} dv. \quad (15)$$

или для краткости:

$$\ln p(s) = D[q(v)||p(v|s)] - F(s, q(v)). \quad (16)$$

Первый член в правой части уравнений 15 и 16 — это дивергенция (расхождение) Кульбака-Лейблера $D(q(v)||p(s|v))$ между вариационным распределением $q(v)$ и апостериорным распределением $p(s|v)$, второй член в этих уравнениях — это информационная свободная энергия $F(s, q(v))$, то есть:

$$F(s, q(v)) = \int q(v) \ln \frac{q(v)}{p(s, v)} dv. \quad (17)$$

Хотя, совершенно равнозначное к данному, это представление информационной свободной энергии может иметь вид:

$$F(s, q(v)) = - \int q(v) \ln \frac{p(s, v)}{q(v)} dv. \quad (18)$$

Другими словами, исходя из уравнений 6-17, мы, вслед за Фристоном, устанавливаем связь между теоремой Байеса и, соответственно, гипотезой байесовского мозга, и ИСЭ, введенной в первом разделе. И оказывается, что ИСЭ выражается через вероятностные зависимости между ненаблюдаемыми состояниями и сенсорными данными. Так, если проанализировать уравнение 18, видно, что чем меньше будет разница между порождающей моделью и плотностью распознавания, то тем меньше будет информационная свободная энергия и, следовательно, тем точнее мозг предсказывает изменения среды, причины сенсорного входа. То есть тем ближе вероятностное распределение, производимое плотностью распознавания $q(v)$, к истинному распределению причинных состояний среды v . А чем точнее мозг предсказывает причинные состояния среды, тем точнее он предсказывает свой сенсорный вход, так как последний зависим от состояний среды. Чем меньше информационная свободная энергия, тем менее неопределёнными для мозга являются будущие сенсорные состояния и скрытые причинные состояния среды, их породившие.

В этом контексте *восприятие* предстает перед нами как *статистический вывод о причинных состояниях среды (причинах сенсорного входа)*, а не просто как измерение или отбор сенсорных данных [6].

Кроме того, взглянув на уже описанное, мы приходим к ещё одному следствию из гипотезы байесовского мозга в теории Фристана: *о том, что всю деятельность мозга можно рассматривать как работу с вероятностными репрезентациями ненаблюдаемых и наблюдаемых состояний, носящую характер статистического вывода о ненаблюдаемых состояниях на основе наблюдаемых.*

Заметим, что если посмотреть на второй интеграл в правой части уравнения 15, соответствующий информационной свободной энергии, то видно, что он похож на первый интеграл из той же части, того же уравнения.

Иначе говоря, следуя логике К. Фристана, мы можем сделать собственный вывод о том, что, *информационная свободная энергия — это своего рода дивергенция Кульбака-Лейблера между вариационным распределением $q(v)$ и плотностью совместного распределения вероятностей $p(s, v)$, то есть порождающей моделью.*

Если вариационное распределение (плотность распознавания) $q(v)$ совпадает с плотностью совместного распределения вероятностей (порождающей моделью) $p(s, v)$, то есть $q(v) = p(s, v)$, то имеем:

$$\int q(v) \ln \frac{q(v)}{p(s, v)} dv = \int q(v) \ln 1 dv = \int 0 dv = Const. \quad (19)$$

Как мы видим из уравнения 19, если вариационное распределение $q(v)$ совпадает с порождающей моделью $p(s, v)$, то расхождение Кульбака-Лейблера $D(q(v)||p(s, v))$ равно константе. Вспомним, однако, что и предельное правдоподобие (обоснованность) - это нормировочная константа. Иначе говоря, если вариационное распределение $q(v)$ (плотность распознавания) практически совпадает с порождающей моделью $p(s, v)$, то информационная свободная энергия $F(s, q(v))$ приближается к нулю. Это можно интерпретировать в том ключе, что ИСЭ приближается к нулю в случае, если мозг спрогнозировал причинные состояния среды с точностью приближающейся к 100

И наоборот, чем сильнее вариационное распределение $q(v)$ (плотность распознавания) отличается от порождающей модели $p(s, v)$ тем больше расхождение Кульбака-Лейблера $D(q(v)||p(s, v))$ между этими распределениями и, соответственно, тем больше значение, принимаемое информационной свободной энергией $F(s, q(v))$. Или же: чем менее точно мозг прогнозирует причинные состояния среды, тем выше ИСЭ. Поэтому, чтобы осуществить байесовский вывод, необходимо с помощью оптимизации минимизировать информационную свободную энергию $F(s, q(v))$.

Другими словами, принимая во внимание формулировку принципа свободной энергии, о том, что мозг должен минимизировать свою ин-

формационную свободную энергию, можно сказать, что осуществление байесовского вывода, в контексте теории Фристана, эквивалентно принципу информационной свободной энергии. Помимо уравнений 17 и 18, Фристон в своих работах [1]-[12] даёт ещё несколько представлений для ИСЭ. Несколько изменив уравнение 16, получим ещё одно представление ИСЭ, встречающееся у Фристана:

$$F(s, q(v)) = D[q(v)||p(v|s)] - \ln p(s). \quad (20)$$

Информационная свободная энергия — это расхождение Кульбака-Лейблера $D(q(v)||p(s, v))$ между вариационным распределением $q(v)$ и апостериорным распределением $p(v|s)$ минус сенсорный сюрприз $\ln p(s)$ (логарифмическое предельное правдоподобие, логарифмическая обоснованность, а в дискретной формулировке теории Фристана — собственная информация (собственная информация — это количественная мера неожиданности конкретного исхода [53])) [1].

В своих работах [1], [4], [5] Фристон приводит представление ИСЭ ещё в четырёх вариантах. В первом из этих вариантов определение ИСЭ не связано с конкретной формулой и звучит следующим образом:

Информационная свободная энергия (ИСЭ) — это, согласно Фристану, мера, которая «ограничивает или лимитирует неожиданность при выборке некоторых данных от данной порождающей модели»: «An information theory measure that bounds or limits (by being greater than) the surprise on sampling some data, given a generative model» [1]. Это означает, что неожиданность выборочных данных не может быть больше ИСЭ. Три других представления связаны с конкретными формулами.

Так как $p(s, v) = p(s|v)p(v)$, то в уравнении 17 $p(s, v)$ может быть заменена на $p(s|v)p(v)$, то получаем:

$$\begin{aligned} F(s, q(v)) &= \int q(v) \ln \frac{q(v)}{p(s, v)} dv \\ &= \int q(v) \ln \frac{q(v)}{p(s|v)p(v)} dv \\ &= \int q(v) \ln \frac{q(v)}{p(v)} dv - \int q(v) \ln p(s|v) dv \\ &= D[q(v)||p(v)] - \langle \ln p(s|v) \rangle_{q(v)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Другими словами, **ИСЭ** — это $D(q(v)||p(v))$, то есть дивергенция Кульбака-Лейблера между вариационным распределением $q(v)$ и априорным распределением причинных состояний среды $p(v)$ [4] минус «ассигасу» (адекватный перевод термина «ассигасу» на русский язык непрост и вызывает проблемы в различных областях науки и техники [88], поэтому мы воздержимся от неточных вариантов перевода этого

термина русский язык) $\langle \ln p(s|v) \rangle_{q(v)}$. «Ассигасу» показывает, насколько вероятны сенсорные данные при конкретных исходах причинных состояний среды. Кроме того, можно ввести величину равную $-\langle \ln p(s|v) \rangle_{q(v)}$, которую можно назвать перекрёстной информационной энтропией между вариационным распределением $q(v)$ и правдоподобием $p(s|v)$, то есть:

$$H(q(v), p(s|v)) = - \int q(v) \ln p(s|v) dv. \quad (22)$$

Уравнение 17 можно преобразовать иначе:

$$\begin{aligned} F(s, q(v)) &= - \int q(v) \ln p(s, v) dv + \int q(v) \ln q(v) dv \\ &= L(s, v) - H(q(v)), \end{aligned} \quad (23)$$

где $L(s, v) = - \int q(v) \ln p(s, v) dv$ — информационная энергия Гиббса, $H(q(v)) = - \int q(v) \ln q(v) dv$ — дифференциальная энтропия вариационного распределения.

Иначе говоря, **ИСЭ** — это информационная энергия Гиббса $L(s, v)$ (ожидаемая энергия, или средняя энергия) плотности совместного распределения вероятностей $p(s, v)$ минус дифференциальная энтропия вариационного распределения $H[q(v)]$.

Фристон в своих работах [7] приводит такое определение для информационной энергии Гиббса $L(s, v)$: *информационная энергия Гиббса — это логарифмическая вероятность, которая сообщает о совместной неожиданности сенсорных данных и вызывающих их причинных состояний среды.*

Однако, внимательно приглядевшись к представленным уравнениям, мы можем дать другое определение. Как нетрудно заметить, посмотрев на уравнения 21 и 23, информационная энергия Гиббса $L(s, v)$ — это величина обратная ассигасу $\langle \ln p(s|v) \rangle_{q(v)}$. Или, сравнив уравнения 22 и 23, мы обнаруживаем, что *информационная энергия Гиббса $L(s, v)$ — это величина равная перекрёстной информационной энтропии между вариационным распределением $q(v)$ и правдоподобием $p(s|v)$.*

Для дифференциальной энтропии вариационного распределения $H[q(v)]$ у Фристана нам не удалось найти чёткого определения, поэтому мы рискуем дать собственное определение: *дифференциальная энтропия вариационного распределения $H[q(v)]$ — это мера неопределённости вариационного распределения $q(v)$.*

Из этих пяти формулировок, именно представление ИСЭ, используемое в уравнении 23, и использует в своих работах Фристон для более детального формулирования математического аппарата своей теории [2], [3], [7].

Прежде чем подводить итог описанного в этой главе, необходимо сделать ещё две вещи.

Во-первых, следует вспомнить то, о чём мы писали в предыдущей главе, и привести то, что описано здесь, в соответствие с тем, что было описано ранее. Как было сказано в предыдущей главе, для того чтобы ИСЭ соответствовала форме лагранжиана, Фристоном [7] вводятся в его теорию обобщённые координаты, а ИСЭ, таким образом, является функцией (а ещё точнее функционалом) от обобщённых координат. Другими словами, так как ИСЭ является функционалом от сенсорных состояний s и ненаблюдаемых состояний v , то это означает, что эти состояния должны быть представлены в форме обобщённых координат. Обобщённые координаты в теории Фристана представляют из себя производные по времени от функций, описывающих состояния [2]-[5]. Эти производные представляют из себя нулевую производную по времени, то есть сами функции состояний или просто состояния, 1-ю производную по времени, то есть скорость изменения во времени этих функций, 2-ю производную по времени и т. д. В этом случае как наблюдаемые состояния s , так и ненаблюдаемые состояния v предстают как наборы из производных по времени разных порядков. Такие наборы производных представляют собой векторы. Под вектором здесь мы понимаем набор величин, над которым производятся некоторые операции. Векторы в подавляющем большинстве наших формул будут, для экономии места, представлены в форме вектор-строк с использованием верхнего индекса T .

Набор из производных разного порядка по времени от функций, описывающих наблюдаемые состояния s , мы будем называть *обобщёнными сенсорными состояниями* и обозначать \mathbf{s} или

$$\mathbf{s} = [s, \dot{s}, \ddot{s}]^T, \quad (24)$$

где \mathbf{s} — наблюдаемые состояния сенсорных рецепторов, \dot{s} — 1-я производная по времени от наблюдаемых состояний или скорость изменения наблюдаемых состояний, \ddot{s} — 2-я производная по времени от наблюдаемых состояний или ускорение изменения наблюдаемых состояний [1]-[12].

Несмотря на то, что обобщённые наблюдаемые состояния согласно Фристону [3] представляют собой, в общем случае, бесконечномерный вектор, в практических расчетах такой вектор всегда используется в конечном виде. Количество производных по времени в этом конечномерном векторе Фристон [89] называет *порядком вложения* (embedding order) или *динамическим порядком*. Например, если порядок вложения равен 2, то такой вектор содержит всего 3 элемента: саму функцию, определяющую состояние, а также первую и вторую производную по времени этой функции. Мы в нашей статье будем использовать порядок вложения равный 2.

Использование слова «обобщённые» связано с тем, что такой набор из производных по времени разных порядков — это и есть обобщённые координаты; соответственно, наблюдаемые состояния, представленные с использованием обобщённых координат — это обобщённые наблюдаемые состояния.

Аналогично наблюдаемым состояниям, ненаблюдаемые состояния, представленные в форме обобщённых координат — это обобщённые ненаблюдаемые состояния. Последние тоже являются вектором. Обозначаться обобщённые ненаблюдаемые состояния будут аналогично наблюдаемым — \mathbf{v} , и представляют из себя набор из производных разного порядка по времени от ненаблюдаемых состояний, то есть

$$\mathbf{v} = [v, \dot{v}, \ddot{v}]^T, \quad (25)$$

где \mathbf{v} — ненаблюдаемые состояния, \dot{v} — 1-я производная по времени от ненаблюдаемых состояний, или скорость изменения ненаблюдаемых состояний, \ddot{v} — 2-я производная по времени от ненаблюдаемых состояний, или ускорение изменения ненаблюдаемых состояний.

Для того чтобы завершить переход в обобщённые координаты, во всех уравнениях, приведённых выше, s заменяется на \mathbf{s} , v на \mathbf{v} , все остальные обозначения остаются теми же, а уравнения 17, 23, которые мы будем использовать в качестве основы в дальнейшем, принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{s}, q(\mathbf{v})) &= \int q(\mathbf{v}) \ln \frac{q(\mathbf{v})}{p(\mathbf{s}, \mathbf{v})} d\mathbf{v} \\ &= - \int q(\mathbf{v}) \ln p(\mathbf{s}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} + \int q(\mathbf{v}) \ln q(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \\ &= L(\mathbf{s}, \mathbf{v}) - H(q(\mathbf{v})). \end{aligned} \quad (26)$$

И следовательно, в дальнейшем наблюдаемые и ненаблюдаемые состояния используются только в форме обобщённых координат, то есть \mathbf{s} и \mathbf{v} , соответственно.

Во-вторых, нетрудно заметить, что сама ИСЭ в форме уравнения 26, так и величины её слагающие, а именно информационная энергия Гиббса и дифференциальная энтропия, являются интегральными величинами. Помимо этого уравнение 26 содержит неизвестную и принципиально недоступную для мозга, по соображениям изложенным выше, величину \mathbf{v} . Это уже само по себе, мягко говоря, существенно осложняет расчет этих величин. Однако уравнение 26 можно существенно упростить. Для этого Фристон использует *приближение Лапласа* [2], [3], [5], [7], [8].

Величина \mathbf{v} , соответствующая обобщённым ненаблюдаемым состояниям — это то, как уже было сказано, что неизвестно мозгу. Однако

для того чтобы рассчитать свободную энергию и, что эквивалентно, выполнить байесовский вывод, эту величину необходимо каким-либо путём найти. Фристон предполагает [2], [3], [5], [7], [8], что *мозг делает гипотезы о математическом ожидании ненаблюдаемых состояний*. Или другими словами, *мозг кодирует условное математическое ожидание ненаблюдаемых состояний*. Иначе говоря, *математическое ожидание неизвестной величины \mathbf{v} , которое тоже неизвестно, как и сами ненаблюдаемые состояния, приближается величиной $\boldsymbol{\mu}_v$* . Так как теория Фристана сформулирована в обобщённых координатах, то величина $\boldsymbol{\mu}_v$ также предстает в обобщённых координатах. В этом случае вариационное распределение $q(\mathbf{v})$ заменяется на $q(\mathbf{v}; \boldsymbol{\mu}_v)$ и становится функцией от состояний среды и гипотез, которые делает мозг о математическом ожидании ненаблюдаемых состояний. Точка с запятой в $q(\mathbf{v}; \boldsymbol{\mu}_v)$ означает, что речь идёт не об условной зависимости $\boldsymbol{\mu}_v$ от \mathbf{v} , а о том, что, говоря языком байесовской теории вероятностей, \mathbf{v} параметризуется $\boldsymbol{\mu}_v$. Аналогичным образом дифференциальная энтропия вариационного распределения $H[q(\mathbf{v})]$ преобразуется в $H[q(\mathbf{v}; \boldsymbol{\mu}_v)]$. О форме вариационного распределения $q(\mathbf{v})$ и, соответственно, $q(\mathbf{v}; \boldsymbol{\mu}_v)$, исходно ничего не известно, поэтому Фристон [2], [3], [5], [7], [8] *делает допущение, что эта величина имеет форму нормального или гауссова распределения, или $q(\mathbf{v}) \approx q(\mathbf{v}; \boldsymbol{\mu}_v) = N(\mathbf{v}; \boldsymbol{\mu}_v, C)$* . В вариационных байесовских методах такой подход, при котором вариационное распределение приближается нормальным, соответствует *приближению Лапласа* (Приближение Лапласа, также известное как метод перевала используется не только в вариационных байесовских методах, но и при решении разных физических задач [90]. Более подробно о использовании приближения Лапласа в теории Фристана смотри в работах [2], [8].). При этом приближении дифференциальная энтропия вариационного распределения $H[q(\mathbf{v}; \boldsymbol{\mu}_v)]$ параметризованная $\boldsymbol{\mu}_v$ будет выглядеть следующим образом, причём, как будет видно из дальнейшего, замену вариационного распределения достаточно провести только под знаком логарифма:

$$H[q(\mathbf{v}; \boldsymbol{\mu}_v)] = - \int q(\mathbf{v}) \ln N(\mathbf{v}; \boldsymbol{\mu}_v, C) d\mathbf{v} \quad (27)$$

или:

$$H[q(\mathbf{v}; \boldsymbol{\mu}_v)] = - \int q(\mathbf{v}) \left(-\frac{1}{2}(\mathbf{v} - \boldsymbol{\mu}_v)C^{-1}(\mathbf{v} - \boldsymbol{\mu}_v)^T - \frac{1}{2} \ln |C| - \frac{n}{2} \ln(2\pi) \right) d\mathbf{v}. \quad (28)$$

где n — размерность $\boldsymbol{\mu}_v$. Выражение 28 можно существенно упростить.

Матрица ковариации для данного многомерного нормального распределения, по определению [91], определяется следующим выражением:

$$C = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|C|^{1/2}} \int e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{v}-\boldsymbol{\mu}_v)C^{-1}(\mathbf{v}-\boldsymbol{\mu}_v)^T} (\mathbf{v} - \boldsymbol{\mu}_v)(\mathbf{v} - \boldsymbol{\mu}_v)^T d\mathbf{v}. \quad (29)$$

Учитывая уравнение 29 и условие нормировки, то есть уравнение 10, дифференциальную энтропию можно представить следующим образом:

$$H[\mathbf{v}; \boldsymbol{\mu}_v] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln |C| + \frac{n}{2} \ln(2\pi). \quad (30)$$

Введём, вслед за Фристоном [2], [3], [5], [7], [8], величину, называемую *закодированная по Лапласу информационная энергия* $U(\mathbf{s}, \mathbf{v})$, равную натуральному логарифму от совместного распределения наблюдаемых и ненаблюдаемых состояний.

$$U(\mathbf{s}, \mathbf{v}) = \ln p(\mathbf{s}, \mathbf{v}) \quad (31)$$

Разложим $U(\mathbf{s}, \mathbf{v})$ в ряд Тейлора по \mathbf{v} в $\boldsymbol{\mu}_v$, проинтегрируем по $d\mathbf{v}$, отбросим производные порядка выше 2 и тогда, учитывая то, что второй член ряда равен нулю, потому что интеграл равен математическому ожиданию, в результате получим:

$$L(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v) = U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v) + \frac{1}{2} C \left. \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}^2} U(\mathbf{s}, \mathbf{v}) \right|_{\mathbf{v}=\boldsymbol{\mu}_v}. \quad (32)$$

В этом случае ИСЭ принимает вид:

$$F(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v) = U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v) + \frac{1}{2} C \left. \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}^2} U(\mathbf{s}, \mathbf{v}) \right|_{\mathbf{v}=\boldsymbol{\mu}_v} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln |C| - \frac{n}{2} \ln(2\pi). \quad (33)$$

Фристон [7] пишет о том, что если минимизировать информационное свободное действие и, соответственно, ИСЭ относительно условных обратных ковариаций (условных точностей), то есть посмотреть, в каком случае частная производная ИСЭ по обратной ковариации равна нулю, то выяснится, что обратная ковариация является аналитической функцией от математического ожидания. Другими словами, для выполнения минимизации ИСЭ достаточно того, чтобы она зависела только от математического ожидания ненаблюдаемых состояний и сенсорных входов, то есть

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial C} F(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial C} \left(U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v) + \frac{1}{2} C \left. \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}^2} U(\mathbf{s}, \mathbf{v}) \right|_{\mathbf{v}=\boldsymbol{\mu}_v} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln |C| - \frac{n}{2} \ln(2\pi) \right) \\ \frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{1}{2} C \left. \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}^2} U(\mathbf{s}, \mathbf{v}) \right|_{\mathbf{v}=\boldsymbol{\mu}_v} - \frac{1}{2} \ln |C| \right) &= 0 \\ \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}^2} U(\mathbf{s}, \mathbf{v}) \right|_{\mathbf{v}=\boldsymbol{\mu}_v} - \frac{1}{2} C^{-1} &= 0 \\ \left. \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}^2} U(\mathbf{s}, \mathbf{v}) \right|_{\mathbf{v}=\boldsymbol{\mu}_v} &= C^{-1}. \end{aligned} \quad (34)$$

Подставив выражение 34 в уравнение 33 и отбросив константу $\frac{n}{2} \ln(2\pi)$, получим значительное упрощение выражения:

$$F(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v) = U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}^2} U(\mathbf{s}, \mathbf{v}) \right|_{\mathbf{v}=\boldsymbol{\mu}_v}. \quad (35)$$

Нет никакой разницы в том, сначала ли продифференцировать по \mathbf{v} закодированную по Лапласу информационную энергию, а потом заменить в получившемся тождестве \mathbf{v} на $\boldsymbol{\mu}_v$, или сразу заменить \mathbf{v} на $\boldsymbol{\mu}_v$, а потом продифференцировать по $\boldsymbol{\mu}_v$. С учётом этого уравнение 35 можно сразу переписать как:

$$F(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v) = U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\mu}_v^2} U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v) \right|. \quad (36)$$

Как видно из уравнения 36, при принятии *гипотезы о кодировании мозгом математического ожидания ненаблюдаемых состояний и допущения о гауссовой форме вариационного распределения* можно обнаружить 2 вещи. Во-первых, оказывается, что ИСЭ зависит только от плотности совместного распределения сенсорных данных и гипотез о математическом ожидании ненаблюдаемых состояний (порождающей модели). Другими словами, при принятии этих гипотез вместо принципиально, в рамках фристоновского подхода, неизвестных и недоступных для мозга ненаблюдаемых состояний, для расчёта ИСЭ используются доступные и наблюдаемые величины, что и позволяет её рассчитать. А во-вторых, для того, чтобы вычислить ИСЭ достаточно задать лишь совместное распределение сенсорных данных и гипотез о математическом ожидании ненаблюдаемых состояний.

Вспомним положение из 1-ой главы о том, что ненаблюдаемые состояния слагаются из скрытых (латентных) состояний x , скрытых причин ν и параметров состояний внешней среды θ и γ . Соответственно гипотезы о математическом ожидании ненаблюдаемых состояний $\boldsymbol{\mu}_v$ будут состоять из гипотез о математическом ожидании скрытых состояний $\boldsymbol{\mu}_x$, скрытых причин $\boldsymbol{\mu}_\nu$, параметров $\boldsymbol{\mu}_\theta$ и гиперпараметров $\boldsymbol{\mu}_\gamma$. Термин «гиперпараметры» как у Фристана [2], [3], [5], [7], [8], так и в байесовских методах машинного обучения, используется для того, чтобы как-то различать параметры θ и γ и, соответственно, $\boldsymbol{\mu}_\theta$ и $\boldsymbol{\mu}_\gamma$.

Другими словами, $\boldsymbol{\mu}_v$ можно рассматривать как вектор, состоящий из $\boldsymbol{\mu}_x$, $\boldsymbol{\mu}_\nu$, $\boldsymbol{\mu}_\theta$ и $\boldsymbol{\mu}_\gamma$ или

$$\boldsymbol{\mu}_v = [\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma]^T. \quad (37)$$

Тогда уравнение 36 преобразуется к следующему виду:

$$F(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma) = U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\mu}_v^2} U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v) \right|. \quad (38)$$

В этом случае вторую вариационную производную от закодированной по Лапласу информационной энергии в уравнении 38 Фристон [7] представляет аналогично случаю, когда векторный оператор Лапласа действует на вектор, то есть в форме квадратной матрицы следующего вида:

$$\frac{\partial^2 U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v)}{\partial \boldsymbol{\mu}_v^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v)}{\partial \boldsymbol{\mu}_x^2} & \frac{\partial^2 U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v)}{\partial \boldsymbol{\mu}_x \partial \boldsymbol{\mu}_\nu} & \frac{\partial^2 U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v)}{\partial \boldsymbol{\mu}_x \partial \boldsymbol{\mu}_\theta} & \frac{\partial^2 U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v)}{\partial \boldsymbol{\mu}_x \partial \boldsymbol{\mu}_\gamma} \\ \frac{\partial^2 U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v)}{\partial \boldsymbol{\mu}_\nu \partial \boldsymbol{\mu}_x} & \frac{\partial^2 U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v)}{\partial \boldsymbol{\mu}_\nu^2} & \frac{\partial^2 U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v)}{\partial \boldsymbol{\mu}_\nu \partial \boldsymbol{\mu}_\theta} & \frac{\partial^2 U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v)}{\partial \boldsymbol{\mu}_\nu \partial \boldsymbol{\mu}_\gamma} \\ \frac{\partial^2 U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v)}{\partial \boldsymbol{\mu}_\theta \partial \boldsymbol{\mu}_x} & \frac{\partial^2 U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v)}{\partial \boldsymbol{\mu}_\theta \partial \boldsymbol{\mu}_\nu} & \frac{\partial^2 U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v)}{\partial \boldsymbol{\mu}_\theta^2} & \frac{\partial^2 U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v)}{\partial \boldsymbol{\mu}_\theta \partial \boldsymbol{\mu}_\gamma} \\ \frac{\partial^2 U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v)}{\partial \boldsymbol{\mu}_\gamma \partial \boldsymbol{\mu}_x} & \frac{\partial^2 U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v)}{\partial \boldsymbol{\mu}_\gamma \partial \boldsymbol{\mu}_\nu} & \frac{\partial^2 U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v)}{\partial \boldsymbol{\mu}_\gamma \partial \boldsymbol{\mu}_\theta} & \frac{\partial^2 U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v)}{\partial \boldsymbol{\mu}_\gamma^2} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Закодированная по Лапласу информационная энергия $U(\mathbf{s}, \mathbf{v})$ тогда преобразуется в $U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma)$ и задаётся следующим уравнением:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_v) &= U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma) \\ &= \ln p(\mathbf{s} | \boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma) + \ln p(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma) \\ &= \ln p(\mathbf{s} | \boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma) + \ln p(\boldsymbol{\mu}_x | \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma) \\ &\quad + \ln p(\boldsymbol{\mu}_\nu) + \ln p(\boldsymbol{\mu}_\theta) + \ln p(\boldsymbol{\mu}_\gamma). \end{aligned} \quad (40)$$

Аналогично случаю с вариационным распределением, как правдоподобие $p(\mathbf{s} | \boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma)$, так и условное распределение $p(\boldsymbol{\mu}_x | \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma)$, а также априорные вероятности $p(\boldsymbol{\mu}_\nu), p(\boldsymbol{\mu}_\theta), p(\boldsymbol{\mu}_\gamma)$, приближаются Фристоном [7] гауссовыми распределениями, что, опять же, составляет приближение Лапласа. Единственное различие здесь состоит в том, что для правдоподобия $p(\mathbf{s} | \boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma)$ вместо $\boldsymbol{\mu}_v$ используется $g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma)$. А для условного распределения $p(\boldsymbol{\mu}_x | \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma)$ вместо математического ожидания случайной величины используется $f(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma)$. А для самой случайной величины используется математическое ожидание, умноженное на квадратную матрицу D , т.е. $D\boldsymbol{\mu}_x$. В общем случае матрица D имеет следующий вид:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Так как мы используем порядок вложения (динамический порядок) равный 2, то математическое ожидание скрытых состояний в обобщённых координатах $\boldsymbol{\mu}_x$ принимает такую форму:

$$\boldsymbol{\mu}_x = [\boldsymbol{\mu}_x, \dot{\boldsymbol{\mu}}_x, \ddot{\boldsymbol{\mu}}_x]^T \quad (42)$$

Тогда $D\boldsymbol{\mu}_x$ выглядит следующим образом:

$$D\boldsymbol{\mu}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}_x \\ \ddot{\boldsymbol{\mu}}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\mu}}_x \\ \ddot{\boldsymbol{\mu}}_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

В этом случае правдоподобие принимает такую форму:

$$p(\mathbf{s}|\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\tilde{C}_z|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{s}-g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta))^T \tilde{C}_z^{-1} (\mathbf{s}-g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta))}. \quad (44)$$

А условная вероятность тогда становится:

$$p(\boldsymbol{\mu}_x|\boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma) = p(D\boldsymbol{\mu}_x|\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma) \\ = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\tilde{C}_w|}} e^{-\frac{1}{2}(D\boldsymbol{\mu}_x - f(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta))^T \tilde{C}_w^{-1} (D\boldsymbol{\mu}_x - f(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta))}. \quad (45)$$

Где матрицы ковариации \tilde{C}_z и \tilde{C}_w в обобщённых координатах в самом общем виде содержат функции, зависящие от гиперпараметров, а также от математических ожиданий скрытых и каузальных состояний [7]. Однако подробностей, касающихся матриц такого вида Фристон в работе [7] не приводит, а наиболее часто использует, в том числе в той же работе более простой вид этих матриц, когда последние зависят только от гиперпараметров γ . Матрица ковариации \tilde{C}_z представляет собой тензорное произведение Кронекера матрицы ковариации $R(\gamma)$ и матрицы ковариации C_z , т.е. $\tilde{C}_z = R(\gamma) \otimes C_z$. Аналогично для матрицы ковариации в обобщённых координатах \tilde{C}_w , т.е. $\tilde{C}_w = R(\gamma) \otimes C_w$

$$C_z = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_z} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\lambda_z} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$$C_w = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_w} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_w} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\lambda_w} \end{pmatrix}, \quad (47)$$

$$R(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}\gamma \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma & 0 \\ -\frac{1}{2}\gamma & 0 & \frac{3}{4}\gamma \end{pmatrix}, \quad (48)$$

Априорное распределение $p(\boldsymbol{\mu}_\nu)$ это:

$$p(\boldsymbol{\mu}_\nu) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\tilde{C}_\nu|}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_\nu - \boldsymbol{\eta}_\nu)^T \tilde{C}_\nu^{-1} (\boldsymbol{\mu}_\nu - \boldsymbol{\eta}_\nu)}. \quad (49)$$

Априорное распределение параметров $p(\boldsymbol{\mu}_\theta)$ это:

$$p(\boldsymbol{\mu}_\theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\tilde{C}_\theta|}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_\theta - \boldsymbol{\eta}_\theta)^T \tilde{C}_\theta^{-1} (\boldsymbol{\mu}_\theta - \boldsymbol{\eta}_\theta)}. \quad (50)$$

Априорное распределение гиперпараметров $p(\boldsymbol{\mu}_\gamma)$ это:

$$p(\boldsymbol{\mu}_\gamma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\tilde{C}_\gamma|}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_\gamma - \boldsymbol{\eta}_\gamma)^T \tilde{C}_\gamma^{-1} (\boldsymbol{\mu}_\gamma - \boldsymbol{\eta}_\gamma)}. \quad (51)$$

Элементы матриц ковариации C_θ и C_γ исходно задаются как нулевые, в процессе реализации алгоритма динамической максимизации математического ожидания (DEM) в этих матрицах происходит замена нулевых элементов на ненулевые, что легко заметить запустив любую модель из пакета SPM [89].

Тогда закодированная по Лапласу энергия, отбрасывая константы $-\frac{d}{2} \ln(2\pi)$ записывается как:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma) &= \\ &= -\frac{1}{2}(\mathbf{s} - g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta))^T \tilde{C}_z^{-1} (\mathbf{s} - g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta)) - \frac{1}{2} \ln |\tilde{C}_z| \\ &- \frac{1}{2}(D\boldsymbol{\mu}_x - f(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta))^T \tilde{C}_w^{-1} (D\boldsymbol{\mu}_x - f(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta)) - \frac{1}{2} \ln |\tilde{C}_w| \\ &- \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_\nu - \boldsymbol{\eta}_\nu)^T \tilde{C}_\nu^{-1} (\boldsymbol{\mu}_\nu - \boldsymbol{\eta}_\nu) - \frac{1}{2} \ln |\tilde{C}_\nu| - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_\theta - \boldsymbol{\eta}_\theta)^T \tilde{C}_\theta^{-1} (\boldsymbol{\mu}_\theta - \boldsymbol{\eta}_\theta) \\ &- \frac{1}{2} \ln |\tilde{C}_\theta| - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_\gamma - \boldsymbol{\eta}_\gamma)^T \tilde{C}_\gamma^{-1} (\boldsymbol{\mu}_\gamma - \boldsymbol{\eta}_\gamma) - \frac{1}{2} \ln |\tilde{C}_\gamma|. \end{aligned} \quad (52)$$

Для того чтобы вычислить вторую вариационную производную от закодированной по Лапласу информационной энергии, в уравнении нужно продифференцировать правую часть уравнения 52 так, как это показано в уравнении 39. В результате опять-таки получится матрица. За более подробной информации об элементах этой матрицы, отсылаем читателя к работе [7].

Для $\mathbf{s} - g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma)$ и $D\boldsymbol{\mu}_x - f(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma)$ Фристон [2],[3],[5],[7],[8] вводит следующие обозначения:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\nu = \mathbf{s} - g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma), \quad (53)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = D\boldsymbol{\mu}_x - f(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma). \quad (54)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_\nu$ — обобщённая ошибка предсказания сенсорных состояний, $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ — обобщённая ошибка предсказания движения скрытых состояний. Опять же обе эти величины представлены в форме обобщённых координат. Величина $g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma)$ — это *предсказание наблюдаемых* (в данном случае сенсорных) *состояний*, а величина $f(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma)$ — это *предсказание ненаблюдаемых состояний* (в данном случае скрытых состояний среды).

В результате уравнение 52 может быть представлено в более компактной форме:

$$\begin{aligned}
U(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma) = & -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_\nu^T \tilde{C}_z^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_\nu - \frac{1}{2} \ln |\tilde{C}_z| - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_x^T \tilde{C}_w^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_x - \frac{1}{2} \ln |\tilde{C}_w| \\
& - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_\nu - \boldsymbol{\eta}_\nu)^T \tilde{C}_\nu^{-1} (\boldsymbol{\mu}_\nu - \boldsymbol{\eta}_\nu) - \frac{1}{2} \ln |\tilde{C}_\nu| \\
& - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_\theta^T \tilde{C}_\theta^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_\theta - \frac{1}{2} \ln |\tilde{C}_\theta| - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma^T \tilde{C}_\gamma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_\gamma - \frac{1}{2} \ln |\tilde{C}_\gamma|.
\end{aligned} \tag{55}$$

Здесь нужно напомнить, что следует различать обобщённые скрытые и каузальные состояния мира: x и ν соответственно, их параметры θ , и гиперпараметры γ и гипотезы о математическом ожидании скрытых и каузальных состояниях мира $\boldsymbol{\mu}_x$, $\boldsymbol{\mu}_\nu$, и параметров $\boldsymbol{\mu}_\theta$, и гиперпараметров $\boldsymbol{\mu}_\gamma$ этих гипотез.

Скрытые состояния мира, согласно Фристону [1]-[12], имеют динамику, описываемую дифференциальным уравнением следующего вида:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \nu, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{a}) + \mathbf{w}, \tag{56}$$

где скорость изменения скрытых состояний является суммой функции от скрытых и каузальных состояний, их параметров и гиперпараметров, действия (у Фристона употребляется термин «action») и шума. А сенсорные состояния представляют собой сумму функции от скрытых состояний и причин, их параметров и гиперпараметров, действия (action) и шума. Под «действием» (не путать с информационным свободным действием) здесь понимается некоторая переменная связанная с моторной активностью. Мы предлагаем понимать «действие» («action») в более широком смысле — как деятельность организма в среде, приводящую к изменениям в ней, и включающую в себя не только двигательную активность, но и секреторную, и экскреторную.

Другими словами, скрытые, каузальные состояния и их параметры, и гиперпараметры, и действие — это аргумент, а сенсорное состояние — это результат действия некоторой функции на аргумент плюс шум, то есть

$$\mathbf{s} = g(\mathbf{x}, \nu, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{a}) + \mathbf{z}. \tag{57}$$

Теперь, если сравнить уравнения 56, 57 и, например, уравнение 53, найдя в последнем уравнении члены: $\mathbf{s} \cdot g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma)$ и $D\boldsymbol{\mu}_x \cdot f(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\mu}_\gamma)$ можно легко заметить очевидное сходство. Однако это хоть и схожие, но разные величины, и их следует различать. Тем не менее, это сходство говорит о большой роли шума, которую он играет в теории Фристона. Об этом же говорит и сходство уравнений 56 и 57 с уравнением Ланжевена.

Кроме того, заметим, что аналитическое решение уравнения Ланжевена для броуновской частицы совпадает с гауссианом. Действительно работы Фристана подтверждают эту роль [3], [5]. Так как вся теория Фристана сформулирована с использованием обобщённых координат, то если распаковать уравнения 56 и 57, в *предположении локальной линейности* [1]-[12] они будут выглядеть так:

$$\begin{aligned}
s &= g(x, \nu, \theta, \gamma, a) + z \\
\dot{s} &\approx \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} g(x, \nu, \theta, \gamma, a) + \dot{\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} g(x, \nu, \theta, \gamma, a) + \dot{z} \\
\ddot{s} &\approx \ddot{x} \frac{\partial}{\partial x} g(x, \nu, \theta, \gamma, a) + \ddot{\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} g(x, \nu, \theta, \gamma, a) + \ddot{z} \\
\dot{x} &= f(x, \nu, \theta, \gamma, a) + w \\
\ddot{x} &\approx \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} f(x, \nu, \theta, \gamma, a) + \dot{\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} f(x, \nu, \theta, \gamma, a) + \dot{w} \\
\ddot{x} &\approx \ddot{x} \frac{\partial}{\partial x} f(x, \nu, \theta, \gamma, a) + \ddot{\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} f(x, \nu, \theta, \gamma, a) + \ddot{w}. \tag{58}
\end{aligned}$$

Предположение локальной линейности состоит в том, что нелинейные члены в уравнении 58 отбрасываются, что опять-таки сильно упрощает расчёты. Аналогичным образом предстаёт и уравнение 59.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\nu &= \dot{\mu}_\nu - g(\mu_x, \mu_\nu) \\
\dot{\varepsilon}_\nu &\approx \ddot{\mu}_\nu - \dot{\mu}_x \frac{\partial}{\partial \mu_x} g(\mu_x, \mu_\nu) - \dot{\mu}_\nu \frac{\partial}{\partial \mu_\nu} g(\mu_x, \mu_\nu) \\
\ddot{\varepsilon}_\nu &\approx \ddot{\mu}_\nu - \ddot{\mu}_x \frac{\partial}{\partial \mu_x} g(\mu_x, \mu_\nu) - \ddot{\mu}_\nu \frac{\partial}{\partial \mu_\nu} g(\mu_x, \mu_\nu) \\
\varepsilon_x &= \dot{\mu}_x - f(\mu_x, \mu_\nu) \\
\dot{\varepsilon}_x &\approx \ddot{\mu}_x - \dot{\mu}_x \frac{\partial}{\partial \mu_x} f(\mu_x, \mu_\nu) - \dot{\mu}_\nu \frac{\partial}{\partial \mu_\nu} f(\mu_x, \mu_\nu) \\
\ddot{\varepsilon}_x &\approx \ddot{\mu}_x - \ddot{\mu}_x \frac{\partial}{\partial \mu_x} f(\mu_x, \mu_\nu) - \ddot{\mu}_\nu \frac{\partial}{\partial \mu_\nu} f(\mu_x, \mu_\nu). \tag{59}
\end{aligned}$$

Подводя итог в отношении использования Фристаном приближения Лапласа, как дополнительной гипотезы, можно сказать, что её использование позволяет свести расчёт ИСЭ к достаточно громоздким (смотри вторую производную закодированной по Лапласу энергии) уравнениям, однако, в отличие от исходного интегрального представления ИСЭ, они поддаются расчёту.

Итак, в этом разделе нами была рассмотрена простейшая ситуация, описывающая взаимодействие среды, сенсорных рецепторов и мозга. Была введена гипотеза байесовского мозга во фристоновской формулировке

и установлена связь между ИСЭ, введенной в предыдущем разделе, и гипотезой байесовского мозга. Однако хорошо известно, что мозг состоит из разных отделов, различающихся как анатомически, так и функционально, физиологически. В следующем разделе эта простейшая ситуация взаимодействия среды, рецепторов и мозга будет нами существенно расширена и дополнена за счёт введения третьей важной концепции теории Фристана — «предиктивного кодирования» (во фристоновской формулировке), показывающей взаимоотношения между разными отделами мозга.

4. Фристоновская формулировка гипотезы предиктивного кодирования

В этом разделе мы рассматриваем систему, состоящую из среды, сенсорных рецепторов и разных отделов мозга, в первую очередь коры больших полушарий. По аналогии со схемой, изложенной в предыдущем разделе, где состояния среды в обобщённых координатах являются обобщёнными ненаблюдаемыми состояниями, а сенсорные состояния в обобщённых координатах являются обобщёнными наблюдаемыми состояниями, где в роли «наблюдателя» выступает мозг, также и отделы мозга могут быть представлены в подобных взаимоотношениях. Для начала примем, что в этом случае состояния каждого отдела мозга описываются в обобщённых координатах двумя группами состояний: одни из этих состояний будут обобщёнными наблюдаемыми, так как они могут «наблюдаться» вышележащими отделами мозга, а другие состояния — обобщёнными ненаблюдаемыми, так как они не могут непосредственно наблюдаться вышележащими отделами мозга. Разумеется, обобщённые ненаблюдаемые состояния нижележащих структур влияют на обобщённые наблюдаемые состояния, а также на другие обобщённые ненаблюдаемые состояния внутри своего отдела мозга. Соответственно, «наблюдателями» являются вышележащие отделы мозга, напрямую зависящие от наблюдаемых состояний нижележащих отделов мозга.

Согласно Фристану [1], [123], такая схема удачно накладывается на архитектуру мозга. В известной работе Felleman и Van Essen (1991) [92], авторы показали, что зрительная и моторная системы макаки организованы иерархически. Так иерархия зрительной кортикальной системы, согласно этим авторам, содержит 10 уровней. Всего в иерархии зрительной системы, исходя из содержания статьи этих авторов, можно насчитать 14 уровней, если включить в эту систему ещё сетчатку, латеральное колленчатое ядро, как самые нижние уровни иерархии, а также энторинальную кору и гиппокамп — как самые высокие уровни иерархии. Стоит заме-

титель, что авторы работы рассматривали главные, «магистральные» пути зрительной системы макаки, поэтому в их схему не попали, например, верхнее двухолмие, подушка таламуса и супрахиазмальное ядро гипоталамуса.

Применяя этот подход с ненаблюдаемыми и наблюдаемыми состояниями к иерархии зрительной системы, рассмотренной в работе Felleman и Van Essen, получаем следующую картину. На самом нижнем уровне иерархии зрительной системы находится сетчатка. Состояния сетчатки в обобщённых координатах, аналогично принципу, описанному в предыдущем разделе, мы называем обобщёнными наблюдаемыми состояниями. Эти состояния, по-прежнему, зависят от состояний среды или обобщённых ненаблюдаемых состояний. А вот в роли непосредственного наблюдателя выступает уже не мозг в целом, а только один из его отделов, с которым непосредственно контактирует сетчатка.

Поднимаясь с самого нижнего уровня иерархии зрительной системы, представленной Felleman и Van Essen, то есть от сетчатки, на одну ступень вверх по иерархии, мы попадём в латеральное колленчатое тело. С латеральным колленчатым телом, выступающим по отношению к обобщённым ненаблюдаемым состояниям среды и обобщённым наблюдаемым состояниям сетчатки в роли наблюдателя, могут сопрягаться его собственные обобщённые наблюдаемые состояния, где в роли «наблюдателя» его состояний выступает первичная зрительная кора (V1). А в роли обобщённых ненаблюдаемых состояний, по отношению к первичной зрительной коре, выступают состояния сетчатки, а также состояния ядер таламуса, не связанных прямой связью с этой областью зрительной коры.

Аналогичным образом может быть рассмотрена не только первичная зрительная кора (V1), но и другие уровни иерархии зрительной системы или другие отделы мозга [1]-[12].

К каким же выводам мы приходим, рассматривая иерархическую организацию обработки сенсорной информации в мозге? Обобщая вышесказанное, мы можем сказать, что, во-первых, с каждым из уровней иерархии зрительной системы могут связываться обобщённые наблюдаемые состояния для вышележащего уровня. Во-вторых, каждый из этих уровней может выступать в роли «наблюдателя» состояний уровня, расположенного ниже в иерархии. В-третьих, внутри каждого уровня иерархии имеются обобщённые ненаблюдаемые (скрытые от вышележащих уровней) состояния. В-четвертых, каждое обобщённое наблюдаемое состояние i -го уровня иерархии выступает по отношению $i+2$ -му уровню иерархии, то есть следующему через один, как обобщённое ненаблюдаемое состояние [3].

Обобщённые наблюдаемые состояния зрительной системы, представленные в разных её отделах, мы будем называть обобщёнными каузальными состояниями ν . В свою очередь, обобщённые каузальные состояния вместе с обобщёнными наблюдаемыми состояниями сенсорных рецепторов мы будем называть иерархическими обобщёнными наблюдаемыми состояниями.

Обобщённые ненаблюдаемые состояния, включающие в себя обобщённые ненаблюдаемые состояния как среды, так и обобщённые каузальные и обобщённые скрытые состояния разных отделов мозга, мы будем называть иерархическими обобщёнными ненаблюдаемыми состояниями. Обобщённые каузальные состояния мы сюда включили потому, что, как было отмечено выше, они могут выступать также и в роли ненаблюдаемых состояний. Такая двузначность обобщённых каузальных состояний, на первый взгляд, представляет из себя проблему, однако, как мы увидим ниже, сравнивая векторные представления, связанные с обобщёнными каузальными состояниями, никакой проблемы здесь нет, и, что важно, общий вид всех формул сохраняется в прежнем виде. А такое деление на иерархические обобщённые наблюдаемые и ненаблюдаемые состояния — это вопрос договорённости и удобства использования формул.

Иерархические обобщённые наблюдаемые и ненаблюдаемые состояния каждого отдельного уровня иерархии, взятые вместе, мы будем называть модулями состояний или модулями обобщённых состояний [3]. Соответственно, каждому уровню иерархии будет соответствовать свой модуль состояний.

Иерархические обобщённые наблюдаемые состояния мы будем обозначать так же, как и в предыдущей главе, но с использованием нижнего индекса, то есть $\mathbf{s}_{(i)}$. Такая запись означает, что мы имеем дело с вектором, состоящим из векторов. Другими словами, иерархические обобщённые наблюдаемые состояния $\mathbf{s}_{(i)}$ — это вектор, представляющий из себя набор из обобщённых наблюдаемых состояний сенсорных рецепторов и обобщённых каузальных состояний каждого уровня иерархии, которые сами по себе тоже являются векторами или

$$\mathbf{s}_{(i)} = [\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_{\nu(1)}, \boldsymbol{\mu}_{\nu(2)}, \boldsymbol{\mu}_{\nu(3)}, \dots, \boldsymbol{\mu}_{\nu(n)}]^T, \quad (60)$$

где \mathbf{s} — обобщённые наблюдаемые состояния сенсорных рецепторов, $\boldsymbol{\mu}_{\nu(1)}$ — обобщённое каузальное состояние 1-го уровня иерархии, $\boldsymbol{\mu}_{\nu(2)}$ — обобщённое каузальное состояние 2-го уровня иерархии, $\boldsymbol{\mu}_{\nu(3)}$ — обобщённое каузальное состояние 3-го уровня иерархии, $\boldsymbol{\mu}_{\nu(n)}$ — обобщённое каузальное состояние n -го уровня иерархии.

Аналогично иерархическим обобщённым наблюдаемым состояниям, иерархические обобщённые ненаблюдаемые состояния мы будем обозначать так же, как и в предыдущей главе, но будем использовать жирный

шриффт, то есть $\boldsymbol{\mu}_{\nu(i)}$. Иерархические обобщённые ненаблюдаемые состояния $\boldsymbol{\mu}_{\nu(i)}$ — это тоже вектор, представляющий из себя набор из обобщённых скрытых и каузальных состояний среды и обобщённых скрытых и каузальных состояний каждого уровня иерархии, которые сами по себе тоже являются векторами, или

$$\boldsymbol{\mu}_{x(i)} = [\boldsymbol{\mu}_{x(1)}, \boldsymbol{\mu}_{x(2)}, \boldsymbol{\mu}_{x(3)}, \dots, \boldsymbol{\mu}_{x(n)}]^T, \quad (61)$$

где $\boldsymbol{\mu}_{x(1)}$ — обобщённое скрытое состояние 1-го уровня иерархии, $\boldsymbol{\mu}_{x(2)}$ — обобщённое скрытое состояние 2-го уровня иерархии, $\boldsymbol{\mu}_{x(3)}$ — обобщённое скрытое состояние 3-го уровня иерархии, $\boldsymbol{\mu}_{x(n)}$ — обобщённое скрытое состояние n-го уровня иерархии;

$$\boldsymbol{\mu}_{\nu(i)} = [\boldsymbol{\mu}_{\nu(1)}, \boldsymbol{\mu}_{\nu(2)}, \boldsymbol{\mu}_{\nu(3)}, \dots, \boldsymbol{\mu}_{\nu(n)}]^T, \quad (62)$$

где $\boldsymbol{\mu}_{\nu(1)}$ — обобщённое скрытое состояние 1-го уровня иерархии, $\boldsymbol{\mu}_{\nu(2)}$ — обобщённое скрытое состояние 2-го уровня иерархии, $\boldsymbol{\mu}_{\nu(3)}$ — обобщённое скрытое состояние 3-го уровня иерархии, $\boldsymbol{\mu}_{\nu(n)}$ — обобщённое скрытое состояние n-го уровня иерархии;

$$\boldsymbol{\mu}_{\theta(i)} = [\boldsymbol{\mu}_{\theta(1)}, \boldsymbol{\mu}_{\theta(2)}, \boldsymbol{\mu}_{\theta(3)}, \dots, \boldsymbol{\mu}_{\theta(n)}]^T, \quad (63)$$

где $\boldsymbol{\mu}_{\theta(1)}$ — обобщённое скрытое состояние 1-го уровня иерархии, $\boldsymbol{\mu}_{\theta(2)}$ — обобщённое скрытое состояние 2-го уровня иерархии, $\boldsymbol{\mu}_{\theta(3)}$ — обобщённое скрытое состояние 3-го уровня иерархии, $\boldsymbol{\mu}_{\theta(n)}$ — обобщённое скрытое состояние n-го уровня иерархии;

$$\boldsymbol{\mu}_{\lambda(i)} = [\boldsymbol{\mu}_{\lambda(1)}, \boldsymbol{\mu}_{\lambda(2)}, \boldsymbol{\mu}_{\lambda(3)}, \dots, \boldsymbol{\mu}_{\lambda(n)}]^T, \quad (64)$$

где $\boldsymbol{\mu}_{\lambda(1)}$ — обобщённое скрытое состояние 1-го уровня иерархии, $\boldsymbol{\mu}_{\lambda(2)}$ — обобщённое скрытое состояние 2-го уровня иерархии, $\boldsymbol{\mu}_{\lambda(3)}$ — обобщённое скрытое состояние 3-го уровня иерархии, $\boldsymbol{\mu}_{\lambda(n)}$ — обобщённое скрытое состояние n-го уровня иерархии.

Тогда, во всех вышеприведенных уравнениях, где фигурирует \mathbf{s} , эта величина заменяется на $\mathbf{s}_{(i)}$, аналогичным образом заменяются и другие величины $\boldsymbol{\mu}_x$ на $\boldsymbol{\mu}_{x(1)}$, $\boldsymbol{\mu}_{\nu}$ на $\boldsymbol{\mu}_{\nu(1)}$, $\boldsymbol{\mu}_{\theta}$ на $\boldsymbol{\mu}_{\theta(1)}$, $\boldsymbol{\mu}_{\lambda}$ на $\boldsymbol{\mu}_{\lambda(1)}$. Каждая матрица ковариации из уравнений 46 и 47 становится первым диагональным элементом главных диагоналей соответствующих блочно-диагональных матриц. Остальные диагональные элементы по виду аналогичны исходным матрицам ковариации из уравнений 46 и 47. Размерность этих блочно-диагональных матриц зависит от количества уровней иерархии порождающей модели. Все остальные обозначения остаются теми же.

При сравнении векторных представлений иерархических обобщённых наблюдаемых и ненаблюдаемых состояний видно, что с каждым n-ным

уровнем иерархии зрительной системы связано n -ное обобщённое скрытое состояние, n -ное обобщённое каузальное состояние и $n-1$ -ое обобщённое каузальное состояние (или для самого нижнего уровня иерархии — сенсорное состояние), а также некоторые параметры и гиперпараметры, связанные с обобщёнными скрытыми и каузальными состояниями [3]. Другими словами, общий вид всех формул сохраняется, подтверждая то, о чём мы писали выше. Состояния иерархии мозга представляются следующим образом, то есть

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\nu(1)} &= \dot{\mu}_{\nu(1)} - g(\mu_{x(1)}, \mu_{\nu(1)}) \\
\dot{\varepsilon}_{\nu(1)} &\approx \ddot{\mu}_{\nu(1)} - \dot{\mu}_{x(1)} \frac{\partial}{\partial \mu_{x(1)}} g(\mu_{x(1)}, \mu_{\nu(1)}) - \dot{\mu}_{\nu(1)} \frac{\partial}{\partial \mu_{\nu(1)}} g(\mu_{x(1)}, \mu_{\nu(1)}) \\
\ddot{\varepsilon}_{\nu(1)} &\approx \ddot{\mu}_{\nu(1)} - \ddot{\mu}_{x(1)} \frac{\partial}{\partial \mu_{x(1)}} g(\mu_{x(1)}, \mu_{\nu(1)}) - \ddot{\mu}_{\nu(1)} \frac{\partial}{\partial \mu_{\nu(1)}} g(\mu_{x(1)}, \mu_{\nu(1)}) \\
\varepsilon_{x(1)} &= \dot{\mu}_{x(1)} - f(\mu_{x(1)}, \mu_{\nu(1)}) \\
\dot{\varepsilon}_{x(1)} &\approx \ddot{\mu}_{x(1)} - \dot{\mu}_{x(1)} \frac{\partial}{\partial \mu_{x(1)}} f(\mu_{x(1)}, \mu_{\nu(1)}) - \dot{\mu}_{\nu(1)} \frac{\partial}{\partial \mu_{\nu(1)}} f(\mu_{x(1)}, \mu_{\nu(1)}) \\
\ddot{\varepsilon}_{x(1)} &\approx \ddot{\mu}_{x(1)} - \ddot{\mu}_{x(1)} \frac{\partial}{\partial \mu_{x(1)}} f(\mu_{x(1)}, \mu_{\nu(1)}) - \ddot{\mu}_{\nu(1)} \frac{\partial}{\partial \mu_{\nu(1)}} f(\mu_{x(1)}, \mu_{\nu(1)}) \\
\varepsilon_{\nu(2)} &= \dot{\mu}_{\nu(2)} - g(\mu_{x(2)}, \mu_{\nu(2)}) \\
\dot{\varepsilon}_{\nu(2)} &\approx \ddot{\mu}_{\nu(2)} - \dot{\mu}_{x(2)} \frac{\partial}{\partial \mu_{x(2)}} g(\mu_{x(2)}, \mu_{\nu(2)}) - \dot{\mu}_{\nu(2)} \frac{\partial}{\partial \mu_{\nu(2)}} g(\mu_{x(2)}, \mu_{\nu(2)}) \\
\ddot{\varepsilon}_{\nu(2)} &\approx \ddot{\mu}_{\nu(2)} - \ddot{\mu}_{x(2)} \frac{\partial}{\partial \mu_{x(2)}} g(\mu_{x(2)}, \mu_{\nu(2)}) - \ddot{\mu}_{\nu(2)} \frac{\partial}{\partial \mu_{\nu(2)}} g(\mu_{x(2)}, \mu_{\nu(2)}) \\
\varepsilon_{x(2)} &= \dot{\mu}_{x(2)} - f(\mu_{x(2)}, \mu_{\nu(2)}) \\
\dot{\varepsilon}_{x(2)} &\approx \ddot{\mu}_{x(2)} - \dot{\mu}_{x(2)} \frac{\partial}{\partial \mu_{x(2)}} f(\mu_{x(2)}, \mu_{\nu(2)}) - \dot{\mu}_{\nu(2)} \frac{\partial}{\partial \mu_{\nu(2)}} f(\mu_{x(2)}, \mu_{\nu(2)}) \\
\ddot{\varepsilon}_{x(2)} &\approx \ddot{\mu}_{x(2)} - \ddot{\mu}_{x(2)} \frac{\partial}{\partial \mu_{x(2)}} f(\mu_{x(2)}, \mu_{\nu(2)}) - \ddot{\mu}_{\nu(2)} \frac{\partial}{\partial \mu_{\nu(2)}} f(\mu_{x(2)}, \mu_{\nu(2)}).
\end{aligned} \tag{65}$$

Уравнения i -го уровня иерархии в предположении локальной линейности

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\nu(i)} &= \dot{\mu}_{\nu(i-1)} - g(\mu_{x(i)}, \mu_{\nu(i)}) \\
\dot{\varepsilon}_{\nu(i)} &\approx \ddot{\mu}_{\nu(i-1)} - \dot{\mu}_{x(i)} \frac{\partial}{\partial \mu_{x(i)}} g(\mu_{x(i)}, \mu_{\nu(i)}) - \dot{\mu}_{\nu(i)} \frac{\partial}{\partial \mu_{\nu(i)}} g(\mu_{x(i)}, \mu_{\nu(i)}) \\
\ddot{\varepsilon}_{\nu(i)} &\approx \ddot{\mu}_{\nu(i-1)} - \ddot{\mu}_{x(i)} \frac{\partial}{\partial \mu_{x(i)}} g(\mu_{x(i)}, \mu_{\nu(i)}) - \ddot{\mu}_{\nu(i)} \frac{\partial}{\partial \mu_{\nu(i)}} g(\mu_{x(i)}, \mu_{\nu(i)}) \\
\varepsilon_{x(i)} &= \dot{\mu}_{x(i)} - f(\mu_{x(i)}, \mu_{\nu(i)}) \\
\dot{\varepsilon}_{x(i)} &\approx \ddot{\mu}_{x(i)} - \dot{\mu}_{x(i)} \frac{\partial}{\partial \mu_{x(i)}} f(\mu_{x(i)}, \mu_{\nu(i)}) - \dot{\mu}_{\nu(i)} \frac{\partial}{\partial \mu_{\nu(i)}} f(\mu_{x(i)}, \mu_{\nu(i)}) \\
\ddot{\varepsilon}_{x(i)} &\approx \ddot{\mu}_{x(i)} - \ddot{\mu}_{x(i)} \frac{\partial}{\partial \mu_{x(i)}} f(\mu_{x(i)}, \mu_{\nu(i)}) - \ddot{\mu}_{\nu(i)} \frac{\partial}{\partial \mu_{\nu(i)}} f(\mu_{x(i)}, \mu_{\nu(i)}). \quad (66)
\end{aligned}$$

Каузальные и скрытые состояния окружающего мира могут быть сложно организованы и иметь между собой зависимости, образуя своего рода иерархию и представляться аналогично порождающей модели. Однако в своих работах Фристон [1]-[12], [43], [44], [49], [64], [65], [123] не использует моделей с многоуровневыми каузальными и скрытыми состояниями среды, хотя такая возможность в его теории имеется. Тогда уравнения такого порождающего процесса аналогичны по виду уравнениям порождающей модели с той лишь разницей, что $\mu_{x(i)}$, $\mu_{\nu(i)}$, $\varepsilon_{x(i)}$, $\varepsilon_{\nu(i)}$ заменяются на \mathbf{x}_i , \mathbf{v}_i , \mathbf{w}_i , \mathbf{z}_i , соответственно.

Этот иерархический подход дополняется и расширяется идеей *предиктивного кодирования*. Ещё раз приведем её здесь. Идея *предиктивного кодирования* (в данном случае по отношению к зрительной системе) состоит в том, что *обратные связи от вышестоящих в иерархии областей зрительной коры несут прогнозы (предсказания) нейронной активности для нижестоящих областей зрительной коры, а прямые связи от нижестоящих областей зрительной коры возвращают остаточные ошибки между прогнозами (предсказаниями) и фактической активностью нижестоящих областей коры к вышестоящим областям зрительной коры* [30].

Мы можем сказать, что в теории Фристона это определение фактически приобретает такую форму: *обратные связи от вышестоящих в иерархии областей мозга несут прогнозы (предсказания) нейронной активности для нижестоящих областей мозга, а прямые связи от нижестоящих областей мозга возвращают остаточные ошибки между прогнозами (предсказаниями) и фактической активностью нижестоящих областей мозга к вышестоящим областям мозга*.

В контексте этого определения предиктивного кодирования представленная выше схема, с обобщёнными каузальными и обобщёнными скрытыми состояниями, составляющими на каждом уровне иерархии модуль

состояний, должна быть модифицирована. К этой схеме Фристон добавляет новый модуль, который мы будем называть *модулем ошибок предсказания* [1]-[3], [5]. В результате этой модификации состояния каждого отдела мозга описываются, во-первых, обобщённым каузальным состоянием, во-вторых, обобщённым скрытым состоянием (вместе составляющими модуль состояний), и в-третьих, модулем ошибок предсказания.

В соответствии с этим, согласно Фристону [3], [93], предполагается следующее:

- во-первых, наличие популяции нейронов, чья активность кодирует условное математическое ожидание или условную моду модулей состояний, составляющих ненаблюдаемые и наблюдаемые состояния разных уровней иерархии в мозгу;
- во-вторых, наличие популяции нейронов, чья активность кодирует ошибки предсказания каждого состояния;
- в-третьих, модули ошибок предсказания получают сообщения от модулей состояний того же уровня иерархии и уровня выше;
- в-четвертых, модули состояний получают сообщения от модулей ошибок того же уровня иерархии и уровня ниже.

С модулями ошибок предсказания Фристон [3] связывает ещё одну величину, которую он определяет следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \xi_{\nu(i)} &= \tilde{C}_z^{-1} \varepsilon_{\nu(i)} \\
 \xi_{x(i)} &= \tilde{C}_w^{-1} \varepsilon_{x(i)} \\
 \xi_{\theta(i)} &= \tilde{C}_\theta^{-1} \varepsilon_{\theta(i)} \\
 \xi_{\gamma(i)} &= \tilde{C}_\gamma^{-1} \varepsilon_{\gamma(i)}.
 \end{aligned} \tag{67}$$

Величина ξ — это средневзвешенная по точности обобщённая ошибка предсказания.

Здесь следует сказать ещё об одном важном понятии, фигурирующем в теории Фристона [1]-[12], [43], [44], [49], [64], [65], [123] — это «достаточная статистика». Так как в качестве одной из важнейших гипотез в теории Фристона является приближение Лапласа, состоящее в том, что все вероятностные распределения имеют форму гауссиана, то для того чтобы знать всё об этих распределениях, достаточно лишь задать математическое ожидание и матрицу ковариации. Поэтому, например, нет никакой необходимости полностью передавать всё вероятностное априорное распределение из одного слоя иерархической модели в другую (из

вышележащего в нижележащий), а можно передавать лишь достаточную статистику. Эта полученная нижележащим слоем из вышележащего достаточная статистика содержит всю информацию о форме априорного распределения. Аналогично и для передачи сообщений вверх по иерархии: вместо того, чтобы передавать весь набор ошибок по всему распределению, вверх по иерархии передается только средневзвешенная ошибка.

Теперь, когда все ключевые понятия введены, а предположения сделаны, можно, наконец, переходить к основной системе дифференциальных уравнений теории Фристана.

5. Гипотеза о градиентном спуске по информационной свободной энергии

Для того чтобы завершить построение математического формализма теории Фристана требуется найти уравнение, соответствующее такой динамике условного математического ожидания, при которой ИСЭ могла бы минимизироваться. Одним из простейших таких уравнений является дифференциальное уравнение, соответствующее методу градиентного спуска (Градиентный спуск — метод нахождения локального минимума или максимума целевой функции с помощью движения вдоль градиента.). Такое предположение о динамике математического ожидания и составляет *гипотезу о градиентном спуске по информационной свободной энергии (ИСЭ)* [1]-[12]. В этом случае динамика условного математического ожидания представляется, в сущности, как градиентный спуск по свободной энергии, то есть

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\mu}}_{\nu(i)} &= -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}_{\nu(i)}} F(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\mu}_{x(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\nu(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\theta(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\gamma(i)}) \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}_{x(i)} &= -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}_{x(i)}} F(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\mu}_{x(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\nu(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\theta(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\gamma(i)})\end{aligned}\quad (68)$$

Правая часть этих уравнений, как нетрудно заметить, является антиградиентом (то есть градиент со знаком минус) от ИСЭ. Соответственно, правая часть уравнения 51 должна быть продифференцирована по векторам, представленным в уравнениях, представленных выше.

Помимо этого Фристон [2], [7] вводит требование, чтобы *путь условной моды (математического ожидания) был равен моде пути, когда ИСЭ равна нулю*, то есть

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = D\boldsymbol{\mu}.\quad (69)$$

Обоим этим требованиям удовлетворяет следующая система дифференциальных уравнений (Более подробно по поводу того, как Фристон при-

ходит к представленному уравнению, можно познакомиться в следующей работе [2].):

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\mu}}_{\nu(i)} &= D\boldsymbol{\mu}_{\nu(i)} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}_{\nu(i)}} F(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_{x(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\nu(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\theta(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\gamma(i)}) \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}_{x(i)} &= D\boldsymbol{\mu}_{x(i)} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}_{x(i)}} F(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_{x(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\nu(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\theta(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\gamma(i)}).\end{aligned}\quad (70)$$

Уравнение 89 задает траекторию изменения условного математического ожидания, в соответствии с которой минимизируется ИСЭ.

Фристон [2], [7] дополняет эту систему уравнений ещё несколькими уравнениями, отражающими изменение сенсорных состояний \mathbf{s} , скрытых состояний среды \mathbf{x} и их причин $\boldsymbol{\nu}$, шумов скрытых состояний \mathbf{z} и их причин \boldsymbol{w} и априорных вероятностей наивысшего уровня иерархии $\boldsymbol{\eta}$ (то есть порождающий процесс в обобщённых координатах). А также он добавляет сюда дифференциальные уравнения, соответствующие динамике обучения и действия. В итоге имеем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\mathbf{s} &= g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{a}) + \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{a}) + \boldsymbol{w} \\ \dot{\boldsymbol{\nu}} &= D\boldsymbol{\nu} \\ \dot{\mathbf{z}} &= D\mathbf{z} \\ \dot{\boldsymbol{w}} &= D\boldsymbol{w} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= D\boldsymbol{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}_{\nu(i)} &= D\boldsymbol{\mu}_{\nu(i)} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}_{\nu(i)}} F(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_{x(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\nu(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\theta(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\gamma(i)}) \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}_{x(i)} &= D\boldsymbol{\mu}_{x(i)} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}_{x(i)}} F(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_{x(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\nu(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\theta(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\gamma(i)}) \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}_{\theta(i)} &= D\boldsymbol{\mu}_{\theta(i)} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}_{\theta(i)}} F(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_{x(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\nu(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\theta(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\gamma(i)}) \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}_{\gamma(i)} &= D\boldsymbol{\mu}_{\gamma(i)} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}_{\gamma(i)}} F(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_{x(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\nu(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\theta(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\gamma(i)}) \\ \ddot{\boldsymbol{\mu}}_{\theta(i)} &= -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}_{\theta(i)}} F(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_{x(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\nu(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\theta(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\gamma(i)}) - k\dot{\boldsymbol{\mu}}_{\theta(i)} \\ \ddot{\boldsymbol{\mu}}_{\gamma(i)} &= -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}_{\gamma(i)}} F(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_{x(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\nu(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\theta(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\gamma(i)}) - \boldsymbol{\mu}_{\gamma(i)} \\ \dot{\mathbf{a}} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} F(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}_{x(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\nu(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\theta(i)}, \boldsymbol{\mu}_{\gamma(i)})\end{aligned}\quad (71)$$

где k – это скорость обучения, \mathbf{a} – это действие, все остальные обозначения остаются теми же, как описано ранее.

У Фристонa нет какого-то конкретного названия для данной системы дифференциальных уравнений. К тому же вид этой системы, а также количество содержащихся в ней уравнений, несколько видоизменяется от статьи к статье. Поэтому мы назовём эту систему дифференциальных уравнений «системой уравнений Фристонa».

Шум скрытых и каузальных состояний среды задается как аналитическая функция [89]. В качестве такой функции используется гауссиан с математическим ожиданием равным нулю [89].

Таким образом, принятием *гипотезы о градиентном спуске по ИСЭ*, завершается построение математического формализма теории Фристонa в непрерывной формулировке. В итоге мы, вслед за Фристоном, приходим к системе уравнений 71, содержащей, во-первых, порождающий процесс как уравнения динамики скрытых, каузальных состояний среды и их шумов, во-вторых, уравнения динамики гипотез о математическом ожидании скрытых и каузальных состояний, представляющие из себя, в сущности, обратную модель по отношению к порождающему процессу, и позволяющие предсказывать динамику порождающего процесса, в-третьих, уравнения динамики переменных, связанных с обучением и действием.

В следующем разделе мы рассмотрим алгоритм, при котором реализуется схема минимизации ИСЭ и численно решается система уравнений Фристонa.

6. Динамическая максимизация математического ожидания

Для реализации схемы минимизации ИСЭ Фристон [2] предлагает процедуру (алгоритм), называемую динамической максимизацией математического ожидания (*Dynamical Expectation Maximization*).

Динамическая максимизация математического ожидания — это процедура (алгоритм) минимизации ИСЭ, являющаяся модификацией EM алгоритма (алгоритма максимизации математического ожидания) и содержащая в себе численное решение системы уравнений Фристонa.

Эта процедура состоит из 3 шагов: D-шаг, E-шаг и M-шаг.

На D-шаге производится численное решение уравнений 1-7 в системе уравнений 71. Для численного решения этого уравнения применяется метод Ozaki (1992) [94].

Согласно методу Ozaki (1992) система уравнений Фристана приближается соотношением в общем виде, представляющем как:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_{x(i)[n+1]} &= \boldsymbol{\mu}_{x(i)[n]} + (e^{J\Delta t} - I)J^{-1} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\mu}_{x(i)} \\ \boldsymbol{\mu}_{\nu(i)[n+1]} &= \boldsymbol{\mu}_{\nu(i)[n]} + (e^{J\Delta t} - I)J^{-1} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\mu}_{\nu(i)},\end{aligned}\quad (72)$$

где J — якобиан, I — единичная матрица, Δt - временной шаг.

Для вычисления якобиана J нужно взять вариационные производные поочередно по \mathbf{s} , $\boldsymbol{\mu}_x$ и $\boldsymbol{\mu}_\nu$. Получающаяся матрица очень велика по размеру, поэтому в тексте нашей статьи мы её не приводим. Читателям желающим более подробно ознакомиться с элементами этой матрицы, мы рекомендуем обратиться к следующим работам [2], [4].

На E-шаге уравнения Фристана приближаются следующим соотношением:

$$\boldsymbol{\mu}_{\theta(i)[n+1]} = \boldsymbol{\mu}_{\theta(i)[n]} + J^{-1} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\mu}_{\theta(i)}. \quad (73)$$

На M-шаге уравнения Фристана приближаются следующим соотношением:

$$\boldsymbol{\mu}_{\gamma(i)[n+1]} = \boldsymbol{\mu}_{\gamma(i)[n]} + J^{-1} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\mu}_{\gamma(i)}. \quad (74)$$

На E- и M-шагах, как легко заметить, Фристон делает значительное упрощение выражений, благодаря которому удастся избежать расчёта матричной экспоненты, что значительно облегчает вычисления [2].

За более подробной информацией, касающейся расчёта вышеприведенных величин, рекомендуем обратиться к программному коду, доступному на сайте, посвященном *Statistical Parametric Mapping (SPM)* [89].

Теперь, когда все основные понятия теории Фристана введены и математический аппарат полностью сформулирован, можно, наконец, перейти к непосредственным результатам, объясняющим разные аспекты работы мозга, которые можно получить, применяя эту теорию, а также обсудить эти результаты и само содержание теории.

7. Модельные эксперименты из работ Фристана

Из примерно шести десятков моделей, созданных Фристоном и его командой за почти 2 десятилетия их работы, с его теорией в непрерывной формулировке связаны примерно половина из них, а уже из этой половины с нейрональными и мозговыми процессами — чуть больше десятка.

Интересно, что несмотря на то, что Фристон позиционирует свою теорию чуть ли не как универсальную для объяснения самых разнообразных биологических систем и происходящих в них явлений, среди

собственных моделей Фристана очень много таких, которые, по нашему мнению, совершенно никак не связаны с объяснением каких бы то ни было биологических явлений, поскольку относятся к другим областям знаний. Наиболее яркими представителями таких моделей являются модели, связанные с так называемой «mountain car problem», встречающиеся как минимум в 3 работах [1], [6], [44]. Это проблема скорее из области теории оптимального управления, а не биологии.

Мы подробно разберём модели из двух работ. Как нам представляется, эти модели самые показательные, в плане демонстрации того, как применяется теория Фристана самим автором, а также как в этих моделях проявляются некоторые из основных проблем и недостатков теории Фристана.

В работе «*Active Inference and Learning in the Cerebellum*» [9] представлена модель, способная, согласно заявлениям авторов, воспроизводить основные особенности поведения, характерные для отставленного (delay conditioning) и следового (trace conditioning) мигательного условного рефлексов, спонтанного моргания и реакции испуга (правда, понять из текста, каким именно образом была промоделирована реакция испуга, представляется крайне затруднительным). Порождающая модель имеет 2 иерархических уровня. Скрытые состояния на 1 уровне связаны с гипотезами об условных и безусловных раздражителях и морганиях. На этом уровне проприоцептивные предсказания (моторные команды) представляют собой гипотезы о математических ожиданиях о спонтанных морганиях и безусловных стимулах. Скрытые состояния на втором уровне воплощают ощущение времени через динамику уравнения аналогичного уравнению Лотки-Вольтерры. Фристон связывает эту динамику с работой центрального генератора паттерна, который посещает последовательность неустойчивых фиксированных точек в определенной последовательности (то есть, гетероклинический цикл). Гетероклинический цикл (гетероклинический цикл — это топологический круг точек равновесия и соединяющих гетероклинических орбит) генерирует последовательность скрытых состояний. Эти состояния передаются на первый уровень через функцию *softmax* и генерируют спонтанные моргания или предсказывают условные раздражители. Гетероклинический цикл имеет последовательность трех состояний, которые приводят к циклу. Цикл сам по себе генерирует спонтанные моргания, первое состояние последовательности генерирует условный стимул. Последующие нестабильные фиксированные точки играют роль следа для эхо-состояний, которые позволяют обучаться или связывать последующие безусловные раздражители, которые следуют за условными раздражителями через некоторое время. Безусловный стимул моделируется как гауссова функция.

Обучение, согласно Фристону, соответствует хеббовской пластичности, которая сводит к минимуму ошибку предсказания в связях между математическими ожиданиями в отношении безусловного раздражителя и математическими ожиданиями первого уровня в отношении безусловного раздражителя для отставленного условного рефлекса и вторым уровнем эхо-состояний для следового условного рефлекса. Фристон ещё пишет о том, что «обучение при отставленном мигательном условном рефлексе заключается в том, что преобладают изменения в связи между математическими ожиданиями относительно условного раздражителя (кодируемого клетками Пуркинье в коре мозжечка) и апостериорными предсказаниями о безусловном раздражителе (в промежуточном ядре)» и «при отставленном условном рефлексе именно связь с третьей скрытой причиной опосредует этот условный рефлекс». «Это происходит потому, что задержка означает, что эта скрытая причина активна в то время, когда вызывается безусловный ответ. Важно отметить, что это означает, что задействован другой набор связей, а именно: связи между ядрами моста и промежуточным ядром». Порождающая модель состоит из следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
 f^{(2)} &= \theta_x^{(2)} + \frac{1}{8}x^{(2)} + I \approx \dot{x}^{(2)} \\
 g^{(2)} &= \sigma(x^{(2)}) = \nu^{(1)} \\
 f^{(1)} &= \begin{pmatrix} f_{CS}^{(1)} \\ f_{US}^{(1)} \\ f_{EB}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1^{(1)} - x_{CS}^{(1)} \\ \theta_\nu^{(1)} \nu_1^{(1)} + \theta_x^{(1)} x_{CS}^{(1)} - x_{US}^{(1)} \\ \nu_6^{(1)} - x_{EB}^{(1)} \end{pmatrix} \approx \dot{x}^{(1)} \\
 g^{(1)} &= \begin{pmatrix} g_{CS}^{(1)} \\ g_{US}^{(1)} \\ g_{EB}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{CS}^{(1)} \\ x_{US}^{(1)} \\ x_{US}^{(1)} + x_{EB}^{(1)} \end{pmatrix} \approx s.
 \end{aligned} \tag{75}$$

Соответственно, для того, чтобы получить систему уравнений, которая используется Фристоном для моделирования в этой статье, нужно взять уравнение 90 и подставить вместо $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$, фигурирующих в уравнении 90 как содержимое векторов \tilde{f} и \tilde{g} , правые части уравнения 94. Недостающие переменные можно найти в файле *ADEM_eyeblick.m* из пакета SPM и в тексте обсуждаемой статьи.

Экстероцептивные ошибки предсказания Фристон в своей модели для безусловного, условного рефлексов и спонтанного моргания связывает с ядрами моста, проприоцептивные ошибки предсказания — с красным ядром, соматосенсорные ошибки предсказания — с ядрами нижней оливы, математические ожидания о скрытых состояниях (и их ошибках), опосредующих спонтанные моргания — с ядрами моста, математические ожидания о скрытых состояниях (и их ошибках), опосредующих

безусловные раздражители — с промежуточным ядром, математические ожидания о скрытых состояниях (и их ошибках), опосредующих условные раздражители — с корой мозжечка, скрытые состояния на втором уровне иерархии — с бледным шаром и гиппокампом или миндалина, связанные (второй уровень) скрытые причины — с ядром моста.

Фристон пишет о том, что схема предиктивного кодирования для спонтанного моргания, безусловного мигательного рефлекса, отставленного и следового мигательного условных рефлексов анатомически релевантна. Однако нетрудно заметить, что она имеет некоторые особенности, никем не описанные, да и, насколько нам известно, просто неверные.

Во-первых, в схеме Фристана имеется прямая связь между корой мозжечка и ядрами моста. Действительно, известно, что часть аксонов клеток Пуркинье заканчивается на вестибулярных ядрах ствола мозга (мозжечково-вестибулярный путь) [95]. Из этих ядер только верхнее вестибулярное ядро расположено в мосте, а остальные, то есть медиальное, латеральное и нижнее вестибулярные ядра расположены в продолговатом мозге [96]. Однако нами не было обнаружено ни одного упоминания в литературе об участии вестибулярных ядер ни в безусловном, ни в условном отставленном и следовом мигательных рефлексах, ни в спонтанном моргании. Таких данных не приводит и Фристон в своей статье. Эту связь Фристон использует при объяснении следового мигательного условного рефлекса. Исходя из написанного, релевантность всех тех толкований и выводов, которые делает Фристон с использованием этой связи в отношении следового мигательного условного рефлекса представляется сомнительной.

Во-вторых, согласно Фристону самопроизвольное (спонтанное) моргание порождается гетероклиническим циклом скрытых состояний и связанных с ними скрытых причин и опосредуется нисходящими предсказаниями от центра моргания в бледном шаре до ядер моста и красного ядра, то есть речь идёт о пути: бледный шар и гиппокамп (Фристон здесь не поясняет, почему бледный шар и гиппокамп рассматриваются вместе, будто это единое образование) → ядра моста → красное ядро. Однако, по нашему мнению, путь ядро моста → красное ядро для спонтанного моргания сомнителен, также как и путь бледный шар-гиппокамп → ядра моста. Нам не удалось найти в литературе ни одного источника подтверждающего участие этих путей в спонтанном моргании. Путь, который нам удалось найти в литературе [97], [98]: бледный шар → ретикулярная часть чёрной субстанции → верхнее двухолмие → большое ядро шва → ядро тройничного нерва → лицевое ядро. Соответственно и всё то, что написано у Фристана о спонтанных морганиях, вызывает вопросы.

В-третьих, Фристон пишет о том, что «самопроизвольное моргание опосредуется нисходящими предсказаниями от центра моргания в блед-

ном шаре к ядрам моста и, наконец, к красному ядру». Другими словами, путь, представленный Фристоном, достаточно хорошо вписывается в его интерпретацию предиктивного кодирования. Хотя и тут есть вопросы следующего плана. Известно, что проекции из бледного шара — это тормозные проекции, проекции из ядер моста к красному ядру — или тормозные, или возбуждающие [99]. То есть даже в пути, предложенным Фристоном, имеется никак не описанная возможность того, что от бледного шара к ядрам моста предсказание движется по *тормозным* путям, а от ядер моста к красному ядру по *возбуждающим*. Каких-то разъяснений по поводу подобной ситуации в работах Фристана нам найти не удалось.

Кроме того, путь для спонтанного моргания найденный в нами в литературе [97], [98], опять же по нашему мнению, не вписывается во фристоновскую концепцию предиктивного кодирования. Дело в том, что помимо критики, связанной с возбуждающими и тормозными связями, где тормозные связи: бледный шар → ретикулярная часть чёрной субстанции, ретикулярная часть чёрной субстанции → верхнее двуххолмие, а возбуждающие: верхнее двуххолмие → большое ядро шва, ядро тройничного нерва → лицевое ядро, вызывает вопросы к теории Фристана ещё одна связь. Это связь большое ядро шва → ядро тройничного нерва, являющаяся серотонинергической, нейромодулирующей. Для нейромодулятора серотонина, так же как и для других нейромодуляторов [?], Фристон в нескольких своих работах [101], [102] предлагает играть роль в кодировании точности. Иначе говоря, цепочка передачи предсказаний, и соответственно ошибок предсказаний, характерная в целом для предиктивного кодирования и его фристоновской интерпретации в частности, разрывается связью, связанной с кодированием точности. Для такого случая в работах Фристана нами не было обнаружено аналогичных примеров и объяснений.

В-четвертых, при безусловном мигательном рефлекс, согласно Фристону, нисходящие проприоцептивные предсказания (или моторные команды) исходят из промежуточного ядра. При активном выводе безусловный рефлекс основывается на ожиданиях совместного возникновения безусловного стимула и реакции. Это ожидание вызывается безусловным стимулом и впоследствии вызывает действие посредством нисходящих предсказаний ожидаемых проприоцептивных последствий. Соматосенсорные ошибки предсказания, согласно Фристону, связаны ещё и с путём: ядро тройничного нерва → нижняя олива → промежуточное ядро. Соматосенсорные ошибки предсказания вызывают безусловный ответ. Математическое ожидание относительно безусловного ответа генерируют нисходящие предсказания, вызывающие моргание. Математическое ожидание относительно безусловного ответа связано с путями:

промежуточное ядро → красное ядро и промежуточное ядро → нижняя олива. Моргание, вызванное нисходящими предсказаниями, отменяет соматосенсорную ошибку предсказания.

И опять же, путь и, соответственно, связанный с ним механизм, сомнителен. Согласно литературным данным [103], [104], для безусловного сигнала есть, во-первых, короткий путь через связь ядра тройничного нерва с лицевым ядром, то есть путь безусловного сигнала, связанный с R1-пиком реакции самопроизвольного моргания: глаз → ядро тройничного нерва → лицевое ядро → мышца глаза; во-вторых, есть другой путь, связанный с R2-пиком: глаз → каудальная часть ядра тройничного нерва → латеральное тегментальное поле (*lateral tegmental field*) продолговатого мозга → лицевое ядро → мышца глаза. Промежуточное ядро тормозится нейронами Пуркинье и нами не было обнаружено в литературе данных, подтверждающих его участие в мигательном безусловном рефлексе. Для безусловного рефлекса, говоря языком теории Фристонa, исходя из связи: ядро тройничного нерва → лицевое ядро, получается, что ядро тройничного нерва передает ошибку предсказания на лицевое ядро, а лицевое ядро передает ошибку предсказания в качестве моторной команды, что не вписывается в предлагаемую Фристоном модель безусловного мигательного рефлекса. Кроме того, такой путь не вписывается в несколько характеристик фристоновской интерпретации предиктивного кодирования, предполагающих, что каждый блок математического ожидания связан реципрокно с блоком ошибок предсказания и что блок ошибок предсказания отправляет сигнал только в блок математического ожидания. Кроме того, учитывая вышеописанное и тот факт из теории Фристонa, что «информация, передаваемая первичными сенсорными афферентами, становится сигналом ошибки предсказания только тогда, когда встречается предсказание» [72], возникает вопрос о том, откуда же тогда ядро тройничного нерва получает предсказания?

При выработке отставленного условного рефлекса безусловные и условные раздражители сосуществуют во времени, но условный раздражитель начинается раньше безусловного. Поэтому достаточно логично ожидать сопряженных по времени экстероцептивных и проприоцептивных сигналов моргания глаз. Это требует, согласно Фристону, ожиданий условных стимулов, кодируемых клетками Пуркинье при получении восходящих ошибок предсказания от ядер моста (через моховидные и параллельные волокна) и ожиданий относительно безусловного стимула от промежуточного ядра и ядра нижней оливы (через лазящие волокна). После того, как эти ожидания были индуцированы условными и безусловными стимулами, они обеспечивают нисходящие проприоцептивные предсказания к промежуточным ядрам и *collary* разряду вдоль параллельных волокон.

Короче говоря, отставленный мигательный условный рефлекс включает реципрокные связи между промежуточным ядром и корой мозжечка.

Схемам для отставленного мигательного условного рефлекса, приводимым в литературе [105]-[107], фристоновская схема этого рефлекса в целом соответствует.

В литературе по отставленному мигательному условному рефлексу, несмотря на то, что так называемые «минимальные» нейроанатомические схемы, лежащие в его основе, хорошо описаны, накопилось огромное количество трудно сопрягаемой друг с другом информации, так что физиология отставленного мигательного условного рефлекса ещё очень далека до понимания. Например, до сих пор представляется неясным, каким образом развивается реакция паузы в импульсации клетки Пуркинье в ответ на условный стимул [108], и как сопрягаются между собой возможные объяснения этой паузы, приводимые в литературе [109]-[111], какова роль промежуточных ядер в мигательном условном рефлексе, особенно с учетом работ Delgado-Garcia и Gruart [112]-[114] и работ, связанных с действием гармалина на глубокие ядра мозжечка [99], [115], [116], причину того, почему у разных видов животных (например, крыс и кроликов) значимость вклада миндалины в выработку отставленного условного рефлекса существенно различается [117], [118], роль гиппокампа в ассоциации условного и безусловного стимулов [?] и т.д.

Нам представляется сомнительным, что в плане понимания такой физиологии поможет предлагаемая модель Фристона, по крайней мере в той форме, в которой она сформулирована к настоящему времени.

На наш взгляд, важной нерешённой проблемой теории Фристона является то, что она не содержит метода по переводу, перекодированию тезисов и результатов, сформулированных на языке теории Фристона (то есть тезисов и результатов, где используются специальные термины, такие как «предсказания», «ошибки предсказания», «скрытые состояния», «причины» и т. д.) на профессиональный язык нейрофизиологии, в котором, в применении к мигательному условному рефлексу, используются такие термины как: паттерн импульсации нейронов Пуркинье и нейронов промежуточного ядра, пластических перестроек и биохимических каскадов, сопровождающих формирование отставленного мигательного условного рефлекса и т. д. И в целом, возникает вопрос, каким образом подход, предлагаемый Фристоном, может дать хоть какую-то полезную информацию о том богатстве интегративных свойств нейрона, которое имеет место, исходя из анализа литературных данных [120]-[122].

Фристон неоднократно пишет в своих работах следующее: «... Эти наблюдения согласуются с экспериментальными данными ...», «... смоделированные и эмпирические эффекты ... согласованы ...» и «... экспе-

рименты с моделируемым повреждением ... на удивление хорошо воспроизводят эмпирические результаты ...». Однако в отношении того, какие именно имеются в виду экспериментальные данные, у него нигде не говорится. Поэтому к этим высказываниям сразу появляются вопросы: «С какими наблюдениями и экспериментами согласуются результаты моделирования? Каким образом? Как это количественно и качественно оценить?»

Активность в нейронных популяциях, кодирующих математические ожидания и ошибки предсказания, или, что то же самое, динамика скрытых состояний и причин, связывается Фристоном с функцией временем перистимула. У Фристана не говорится о том, что означает выражение «функция времени перистимула». По нашему мнению, речь здесь может идти о скорости нейрональной импульсации, привязанной к действию релевантного стимула, что подтверждается следующим тезисом из разбираемой статьи: «...нейрональная скорость разрядки кодирует ожидаемое состояние мира...» И опять же не приводится конкретных работ, в которых можно было бы сравнить результаты, полученные в разбираемой работе Фристана с конкретными экспериментальными данными, и количественно и качественно оценить добротность фристоновского моделирования.

Стоит заметить, что в разбираемой работе величина функции перистимула измеряется в каких-то неизвестных, неописанных условных единицах, что говорит о, своего рода, условности или «игрушечности» упомянутой модели.

В отношении того, как Фристон в разбираемой работе промоделировал дефицит при поражении одного из путей для спонтанного моргания, отставленного и следового мигательного условных рефлексов, учитывая написанное выше, критика аналогична вышеприведенному для спонтанного моргания, отставленного и следового мигательного условных рефлексов. Почему? Потому что он использовал, как мы показали выше, какую-то «собственную архитектуру» для описания процессов, связанных с морганием, не ссылающуюся на конкретные эксперименты.

Таким образом, в отношении моделирования, представленного в разбираемой работе, можно сделать несколько выводов.

Во-первых, нейроанатомические схемы для спонтанного моргания, следового мигательного условного рефлекса сомнительны. Соответственно, сомнительно и всё то, что Фристон пишет в применении к этим схемам. Схема для отставленного мигательного условного рефлекса слишком упрощена и не учитывает многих важных особенностей (например, связанных с ролями миндалины и гиппокампа) этого условного рефлекса.

Во-вторых, не приводится информации о том, какие экспериментальные данные, из каких работ моделируются в этой статье и каким эмпирическим эффектам из каких работ соответствуют результаты из данной публикации.

В работе «*Cortical circuits for perceptual inference*» [123] Фристон с помощью моделирования пытается подкрепить схему предиктивного кодирования, относящуюся к кортикальным процессам. Однако делает он это весьма специфическим образом. Фристон пишет, что «...примером, который мы используем, является пение птиц, а эмпирические измерения, на которые мы ориентируемся, — это локальный полевой потенциал (LFP) или вызванные (ERP) ответы, которые можно регистрировать неинвазивно». Далее Фристон пишет о том, что с локальными полевыми потенциалами и вызванными ответами связана активность поверхностных пирамидных клеток и далее, что «...это означает, что мы можем отнести эти сигналы к ошибке предсказания; потому что поверхностные пирамидные клетки являются источником восходящих сообщений в головном мозге».

Модель использованная в этой работе, в основных чертах совпадает с моделью из работы «*Predictive coding under the free-energy principle*» [123]. Порождающая модель из файлов SPM (*DEM_demo_song_priors.m*, *DEM_demo_song_mission.m*) не совпадает с уравнениями, представленными в тексте самой статьи. При моделировании в этой работе у Фристана есть только порождающая модель, но нет порождающего процесса.

Порождающая модель для пения птиц состоит из двух аттракторов Лоренца, где аттрактор более высокого уровня передает два управляющих параметра аттрактору более низкого уровня, который, в свою очередь, передает два управляющих параметра «синтетическому сиринксу», один из этих параметров управляет частотой (от двух до пяти кГц), а другой управляет амплитудой, или громкостью. Далее Фристон пишет о том, что «...параметры аттрактора Лоренца были выбраны таким образом, чтобы генерировать короткую последовательность щебетов каждую секунду или около того». Динамика 2-го аттрактора Лоренца на порядок медленнее, чем у другого аттрактора Лоренца расположенного в иерархии ниже. Затем он пишет о том, что «...состояния более медленного аттрактора вводились в качестве управляющих параметров (числа Рэля и Прандтля) для управления динамикой, демонстрируемой более быстрым. Эта динамика может варьироваться от аттрактора с фиксированной точкой, где все состояния первого равны нулю; вплоть до квазипериодического и хаотического поведения, когда значение числа Рэля превышает соответствующий порог (около двадцати четырех) и вызывает бифуркацию. Поскольку более высокие состояния развива-

ются медленнее, они включают и выключают нижний аттрактор, создавая отдельные песни, где каждая песня состоит из серии отдельных щебетаний. Эта порождающая модель генерирует спонтанные последовательности песен».

Уравнения порождающей модели, приводимые в тексте исходной статьи:

$$\begin{aligned}
 f^{(1)} &= \begin{pmatrix} 18x_2^{(2)} - 18x_1^{(2)} \\ 32x_1^{(2)} - 2x_3^{(2)}x_1^{(2)} - x_2^{(2)} \\ 2x_1^{(2)}x_2^{(2)} - \frac{8}{3}x_3^{(2)} \end{pmatrix} \\
 g^{(1)} &= \begin{pmatrix} x_2^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
 \\ \\
 f^{(2)} &= \begin{pmatrix} 18x_2^{(1)} - 18x_1^{(1)} \\ \nu_1^{(1)}x_1^{(1)} - 2x_3^{(1)}x_1^{(1)} - x_2^{(1)} \\ 2x_1^{(1)}x_2^{(1)} - \nu_2^{(1)}x_3^{(2)} \end{pmatrix} \\
 g^{(1)} &= \begin{pmatrix} x_2^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1^{(1)} \\ \nu_2^{(1)} \end{pmatrix} \tag{76}
 \end{aligned}$$

Начальные значения переменных и другие параметры приведены в файлах *DEM_demo_song_priors.m*, *DEM_demo_song_omission.m*.

Затем Фристон пишет о том, что он сгенерировал с помощью представленной выше порождающей модели одну сонограмму, а после этого её инвертировал.

Другими словами, он на основе инвертированной сонограммы демонстрирует с помощью моделирования, основанного на математическом аппарате его теории, что достоверные скрытые состояния и каузальные состояния могут быть найдены или, что то же самое, восстановлены.

Подобные результаты не вызывают удивления, потому что в математический аппарат теории Фристона заложен метод оптимизации — *DEM* алгоритм, — который и позволяет находить неизвестные значения параметров порождающей модели по известным данным. При всём этом сами данные были порождены порождающей моделью, что само по себе, по нашему мнению, существенно облегчает такой поиск.

Фристон также пишет о том, что он своим моделированием пытается показать, «как автономная динамика (связанных аттракторов Лоренца) создает порождающие модели сенсорного входа, которые ведут себя почти так же, как настоящий мозг, при электрофизиологическом измерении». Что в данном случае имеет в виду Фристон — из текста статьи

понять крайне затруднительно. В единственном рисунке, где фигурируют локальные полевые потенциалы, подписи к рисунку таковы, что из текста невозможно понять, каким образом эти потенциалы связаны с моделью Фристана в этой статье. И в целом, как и в случае предыдущей статьи данного автора, к нему возникают аналогичные вопросы в отношении того, какие экспериментальные данные он пытается промоделировать в своей модели? Как язык предсказаний, ошибок предсказаний переводится на язык локальных полевых потенциалов и вызванных ответов? Как можно количественно и качественно сопоставить предсказания, ошибки предсказания и т. д. с величинами локальных полевых потенциалов и вызванных ответов из каких-то конкретных экспериментов, в которых такие потенциалы измерялись? Какое отношение имеет моделирование пения птиц к локальным полевым потенциалам и вызванным ответам? Почему используется такая странная модель для моделирования явлений, на первый взгляд не имеющих друг к другу отношения?

Точно такие же проблемы, как в двух представленных работах, имеются и в работе «*Action and behavior: a free-energy formulation*», где представлено несколько моделей, одна из которых связана с окуломоторным контролем, другая — с сенсомоторной интеграцией, третья — с целенаправленным поведением.

Как написал Фристон, говоря про модель представленную в выше-разобранной статье [123] «...здесь используется игрушечная модель». И действительно, лучшего обозначения, по нашему мнению, в отношении не только этой модели, а практически всех изученных нами моделей из работ Фристана придумать трудно. Во всех моделях, которые нам попадались были одни и те же повторяющиеся из одной статьи в другую недостатки.

Во-первых, нигде Фристон не моделирует какие-то конкретные экспериментальные данные. Соответственно, количественно и качественно оценить, что промоделировал Фристон, сопоставив результаты его моделирования с конкретным экспериментом, не представляется возможным.

Во-вторых, анатомические основания представленных моделей вызывают вопросы. Откуда автор брал именно такую архитектуру связей? Каковы основания считать, что именно такая архитектура связей, а не какая-либо другая, участвует в рассматриваемом явлении?

Все эти недостатки, присущие модельным экспериментам Фристана, представленные нами выше, по нашему мнению, говорят как минимум об «игрушечности», оторванности представленных моделей от нейрофизиологических экспериментов, а значит вполне возможно, что и об «игрушечности», оторванности от эксперимента и всей теории Фристана в целом.

8. Обсуждение

В предыдущих главах нами была изложена теория Фристана в непрерывной формулировке. При изложении этой теории мы старались освещать её сущность и содержание достаточно подробно и в понятной форме для неспециалистов по байесовской теории вероятностей, по ходу изложения обсуждая и критикуя содержание и вводимые положения этой теории.

Теория Фристана, являясь вероятностной (байесовской) теорией, по сравнению со всеми остальными объяснениями работы мозга, принятыми в нейрофизиологии, стоит особняком. Это легко можно понять по специфической терминологии и внутренней логике теории. Так, отталкиваясь от, в сущности, «кантианских» идей Гельмгольца о восприятии и продолжая, в отношении этих идей, «статистическую», «теоретико-информационную» линию Хинтона и соавторов, Фристон объединил под началом принципа (информационной) свободной энергии две гипотезы, касающиеся работы мозга — гипотезу байесовского мозга (кодирования) и гипотезу предиктивного кодирования, в собственной формулировке и с собственной интерпретацией. В дополнение ко всему этому, Фристон предложил ещё такие важные для его теории вспомогательные предположения, как: приближение Лапласа, гипотеза о математическом ожидании ненаблюдаемых состояний, предположение о локальной линейности, гипотеза о градиентном спуске по информационной свободной энергии. Принцип информационной свободной энергии, гипотеза байесовского мозга, гипотеза предиктивного кодирования, а также вышеупомянутые вспомогательные предположения и составляют здание теории.

Пройдемся кратко по всему изложенному выше.

В первом разделе, нами, на основе работ Фристана, рассматривается и обосновывается предлагаемый им принцип (информационной) свободной энергии. Для принципа информационной свободной энергии, являющегося базисом теории, Фристон в своих работах предлагает 2 варианта обоснования.

В первом варианте он исходит из гомеостаза и термодинамики, вводя основные понятия своей теории, такие как информационная энтропия и информационная свободная энергия, и делая при этом, как мы считаем, слабо обоснованный перескок в своих рассуждениях из термодинамики в теорию информации.

Во втором варианте он исходит из представления о том, что биологические системы — это эргодические случайные динамические системы (аттракторы). При таком варианте его подход получает серьезные математические обоснования, однако, как мы отметили, само представление о биологических системах как о эргодических случайных динамических аттракторах, требует доказательств.

Тесно связано с информационной свободной энергией такое понятие как информационное свободное действие, представляющее из себя интеграл по информационной свободной энергии по времени. Для этого понятия Фристон не приводит подробных разъяснений, однако введение этого понятия влечет за собой следствие — теория Фристона формулируется в форме обобщенных координат. Форма теории в виде обобщенных координат широко использует в физике, например, аналогичным образом сформулированы лагранжева и гамильтонова механика.

Во втором разделе нами, опять же на основании работ Фристона, рассматривается гипотеза байесовского мозга. В своих работах, вводя гипотезу байесовского мозга в теорию, Фристон начинает с рассуждений «кантианского» характера, разделяя мир и мозг стеной, причем информацию о мире мозг получает через посредника — сенсорные состояния. Из этих рассуждений делается вывод, что мозг может судить о состоянии мира только в вероятностном ключе, выдвигая гипотезы о том, в каком состоянии находится мир. Основой же для этих гипотез являются сенсорные (наблюдаемые) состояния, являющиеся зависимыми от состояний мира (ненаблюдаемых). Затем вводится понятие условной байесовской вероятности, позволяющее работать с наблюдаемыми и ненаблюдаемыми переменными, делая выводы о ненаблюдаемых переменных на основе наблюдаемых. Для расчёта такой условной вероятности Фристон применяет теорему (формула) Байеса. Однако так как ненаблюдаемые состояния являются принципиально недоступными для мозга, то возникают сложности с таким расчетом. Большая часть всего последующего изложения состоит в преодолении этих сложностей путем манипуляций с формулой Байеса и введения дополнительных предположений. Проведя несколько манипуляций с формулой Байеса, Фристон вводит первое предположение о том, что мозг должен кодировать плотность распознавания (вариационное распределение), то есть в формулу Байеса вводится ещё одна функция. После нескольких манипуляций с модифицированной с помощью этой функции формулой Байеса, мы, вслед за Фристонем, приходим к уравнению, слагающемуся из информационной свободной энергии, информационной энтропии и ещё одной величины, называемой Фристонем информационной энергией Гиббса. Таким путем устанавливается связь между теоремой Байеса, используемой для расчета вероятностей ненаблюдаемых состояний, с одной стороны, и принципом (информационной) свободной энергии, введенным в предыдущем разделе, с другой стороны. Оказывается, что чем меньше при расчете становится величина информационной свободной энергии, тем точнее приближение для ненаблюдаемых состояний. Далее мы переводим выведенные формулы в обобщенные координаты. Однако в полученных формулах в обобщенных координатах имеется проблема неизвестности ненаблюдаемых

состояний, и мы, вслед за Фристоном, вводим второе предположение о том, что мозг делает гипотезы о математическом ожидании ненаблюдаемых состояний. А затем делаем третье предположение, называемое приближением Лапласа, заключающиеся в том, что всё распределения, фигурирующие в теории, приближаются гауссианом. Затем, после очередной серии математических преобразований, выяснилось, что для того чтобы рассчитать ИСЭ — достаточно задать только порождающую модель или, что то же самое, плотность совместного распределения сенсорных данных и гипотез о математическом ожидании ненаблюдаемых состояний (порождающей модели). Такая форма ИСЭ позволяет избавиться в формулах от неизвестных ненаблюдаемых состояний и оперировать только известными и доступными величинами: сенсорными данными и гипотезами о математическом ожидании ненаблюдаемых состояний. После этого мы показываем, что гипотезы о математическом ожидании ненаблюдаемых состояний состоят из гипотез о математическом ожидании скрытых состояний, причин, параметров и гиперпараметров. Затем мы расписываем функции других распределений, фигурирующих в формулах Фристана, а также демонстрируем внешний вид матриц ковариации. Затем вводится важная величина в теории Фристана называемая ошибкой предсказания. После этого мы показываем, какова динамика скрытых состояний и причин и то, из чего слагаются сенсорные состояния, в том числе в форме обобщенных координат.

Третий раздел посвящен включению в теорию Фристана ещё одного важного элемента — гипотезы предиктивного кодирования. В этом разделе рассуждения из второго раздела применяются уже к отделам (иерархическим структурам) мозга, в результате чего формализм теории Фристана обобщается на случай иерархической формы, не претерпевая при этом изменения общей формы уравнений теории. Благодаря этому происходит синтез принципа свободной энергии и гипотезы байесовского мозга, с одной стороны, и гипотезы предиктивного кодирования, с другой стороны. В результате такого синтеза передача информации в иерархии мозга теперь состоит в передаче вверх по иерархии ошибок предсказания о гипотезах о математическом ожидании ненаблюдаемых состояний и передачи вниз по иерархии предсказаний о математическом ожидании ненаблюдаемых состояний.

В четвёртом разделе завершается построение математического формализма теории Фристана. В этом разделе вводится ещё одно предположение — гипотеза о градиентном спуске по информационной свободной энергии. Эта гипотеза говорит о том, что Фристоном предлагается дифференциальное уравнение, соответствующее методу градиентного спуска, при котором динамика математического ожидания ненаблюдаемых состояний такова, что информационная свободная энергия имеет

тенденцию минимизироваться. Оканчивается этот раздел выводом системы уравнений Фристонa.

В пятом разделе кратко излагается сущность алгоритма, применяемого Фристонem для решения системы уравнений Фристонa.

Шестой раздел посвящен разбору нескольких моделей из работ Фристонa, в которых его теория применяется на практике *in silico*. В результате анализа этих работ обнаруживаются серьезные проблемы, присущие как теории Фристонa в целом, так и частные недостатки, характерные для рассмотренных работ.

Итак, изложив и проанализировав теорию Фристонa, а также в целом все те работы Фристонa и некоторых других авторов, на которые мы опирались, мы приводим ниже тезисно те достоинства и недостатки, которыми обладает, по нашему мнению, представленная теория.

Достоинства теории Фристонa

- 1) *Универсальность, приложимость к широкому кругу нейрональных явлений.* При обсуждении модельных экспериментов из работ Фристонa, видно, что с помощью своей теории Фристон моделирует такой широкий спектр явлений как разные виды мигательных условных рефлексов, мигательный безусловный рефлекс, спонтанное моргание, локальный полевой потенциал (local field potential) и вызванные потенциалы, окуломоторный контроль, сенсомоторную интеграцию, целенаправленное поведение и т. д. Другое дело, каким образом это всё моделируется. В этом смысле стоит заметить, что приложимость следует отличать от применимости. Применимость может сильно отставать от приложимости.
- 2) *Гибкость, возможность видоизменения формы порождающей модели в зависимости от того, что мы хотим описывать.* Теория Фристонa позволяет создавать в рамках принятого формализма порождающие модели с произвольным количеством уровней и произвольной формы. Причем общая форма системы уравнений Фристонa сохраняется, и не требуется её переделка под каждый конкретный случай. Гибкость теории Фристонa подчеркивает и программное обеспечение SPM, где модели из разных работ Фристонa отличаются, главным образом, только уравнениями для порождающего процесса и порождающей модели и некоторыми вспомогательными величинами. Другими словами, не требуется переписывать всю систему уравнений Фристонa под каждый конкретный случай, под каждое новое моделирование.
- 3) *Легкость расширения теории, если такое расширение связано с введением векторных величин.* Теория Фристонa исходно использовалась с урезанным количеством векторных величин по сравнению

с системой уравнений Фристана в её нынешней форме. Например, в ранних работах Фристана [2], [3], [5] не использовалось такое понятие как действие (*action*) (не путать со свободным действием), а в более поздних работах это понятие было введено [4], [6], причем существенного пересмотра системы уравнений Фристана это нововведение не потребовало.

Недостатки теории Фристана и вопросы к ней

- 1) *Кантианство, неявно лежащее в основе теории и, соответственно, связанная с ней критика кантианства.* Для начала покажем, почему теория Фристана — это кантианская теория. Помимо кантианских корней теории Фристана и других родственные теории [16], [17], обнаруженных Л. Свонсоном [18] (за подробностями отсылаем читателя к упомянутой работ), а также других работ [124]–[127], указывающих на кантианство этой теории, можно привести в поддержку кантианства теории Фристана следующую аргументацию. Как мы писали выше, вся теория, в сущности, вращается вокруг формулы Байеса. А в формуле Байеса содержатся вероятности, связанные с наблюдаемыми и ненаблюдаемыми состояниями. Соответственно можно сказать, что вся теория вращается вокруг ненаблюдаемых и наблюдаемых состояний. Ненаблюдаемые состояния называют так потому, что они не являются непосредственно доступными для мозга, в то время как наблюдаемые состояния — являются доступными. Кроме того, тезис о том, что мозгом воспринимаются не сами объекты внешней среды непосредственно, а через сенсорику, то есть опосредованно или тезис о том, что между мозгом и окружающей средой есть своеобразная стена за которую мозг не может выйти и не может её преодолеть, однозначно указывают на кантианство фристановской теории. Теперь, если сравнить это всё со следующей цитатой из Канта [128], то сомнения окончательно отпадают: *«... нам даны вещи как вне нас находящиеся предметы наших чувств, но о том, каковы они сами по себе, мы ничего не знаем, а знаем только их явления, то есть представления, которые они в нас производят, воздействуя на наши чувства. Следовательно, я, конечно, признаю, что вне нас существуют тела, то есть вещи, относительно которых нам совершенно неизвестно, каковы они сами по себе, но о которых мы знаем по представлениям, доставляемым нам их влиянием на нашу чувственность и получающим от нас название тел, — название, означающее, таким образом, только явление того неизвестного нам, но тем не менее действительного предмета...»*. В случае же попытки некантианской интерпретации теории Фристана, например,

интерпретации в духе экологической психологии и прагматизма, предлагаемой Э. Кларком [16], [129],[130] и Дж. Брюнибергом и соавторами [131], кантианство из теории всё равно никуда не уходит, так как математический аппарат, вращающийся вокруг формулы Байеса и ненаблюдаемых и наблюдаемых состояний, в сущности, является перенесением кантианства на язык математики, где ненаблюдаемые состояния можно назвать «вещью в себе», а наблюдаемые состояния «вещью как явление». Исходя из этих соображений, теорию Фристана можно обозначить как «кантианство, изложенное на языке байесовской вероятности» или своеобразный «синтез кантианства и теоремы Байеса».

Проблема здесь заключается не в кантианстве как таковом, а в тех последствиях, которые оно влечет за собой. Дело в том, что кантианство дает отрицательный ответ на вопрос о познаваемости мира [74], [128], говоря о том, что объекты материального мира как «вещи в себе», недоступны для человеческого познания, для науки. Соответственно, научная теория, содержащая, пусть и неявно, в себе кантианство, автоматически поднимает вопросы о собственной научности и собственной пригодности для адекватного описания работы мозга, и сама же на него отвечает, по нашему мнению, в отрицательном смысле. Хотя стоит заметить, что некоторые философы-материалисты, в отличие от самого Канта, в вопросе познаваемости мира трактовали кантианство в положительном смысле [132]. Однако, даже и в этом случае теория оказывается под ударом многовековой критики кантианства, потому что та амфиболия, двусмысленность, которая, как неоднократно отмечалось философами [132], характерна для кантианства, по нашему мнению, свойственна и теории Фристана. Особенно это отчетливо это проявляется в вопросе о том, о чём же собственно делает гипотезы мозг: о ненаблюдаемых состояниях как таковых во всей полноте их характеристик или о каких-то атрибутах ненаблюдаемых состояний, где целостное познание этих состояний остается для мозга недоступным. Соответственно «тяжелый груз» критики кантианства ложится, как мы считаем, на любую теорию, допускающую в себе кантианство, какой, по нашему мнению, является теория Фристана.

- 2) *Марковость*. Это означает, что поведение случайных величин в теории не зависит от истории их динамики, а зависит только от прошлого значения. Требуется убедительное обоснование возможности моделирования работы мозга с помощью марковских процессов.

- 3) *Для функционирования «фристоновского мозга» в условиях многозадачности, то есть в условиях, характерных для реального мозга, а не в тех искусственных и «игрушечных» условиях, которые характерны для моделей Фристана, скорее потребуются некий универсальный метод оптимизации, хорошо применимый к любой модели мира.* Дело в том, что известно, что для одних оптимизационных задач хорошо работают одни методы, а другие — плохо [133], и универсального метода, скорее всего, просто не существует в принципе. Соответственно, встаёт вопрос о возможности дальнейшего развития теории и, в целом, о её перспективности. Если потребуются такой универсальный метод оптимизации, то на наш взгляд, перспективы теории Фристана весьма сомнительны.
- 4) *Не указано, что же такое состояния в приложении к данной теории, и нет четкой связи состояний мозга с нейрональной активностью.* Фристон не дает определения такому широкому и неоднозначному понятию как понятию «состояния» в своей теории и пишет о том, что состояния связаны со скоростью нейрональной импульсации. К примеру, он пишет, что скорость нейрональной импульсации кодируется гипотезами о математическом ожидании ненаблюдаемых состояний [134]. Однако, в его работах нам не удалось найти ни одного упоминания о том, каким образом, например, можно прямо сопоставить модуль состояния конкретного уровня иерархии и, соответственно, гипотезы о математическом ожидании ненаблюдаемых состояний с ними связанных, с одной стороны, и активность (скорость импульсации) нейронов соответствующих этому модулю состояния, с другой стороны.
- 5) В теории Фристана *предполагается существование нейронных популяций, связанных с генерацией предсказаний и ошибок предсказаний, однако реальное наличие таких популяций не было продемонстрировано, насколько нам известно, ни в одном опыте.*
- 6) В теории Фристана *предполагается также циркуляция предсказаний и ошибок предсказаний по сетям нейронов, однако ничего подобного, насколько нам известно, не было показано на опыте.* А из пунктов 5 и 6, соответственно, следует *сомнительность гипотезы предиктивного кодирования.*
- 7) *Нет четкой привязки моделей Фристана к конкретным натурным экспериментам, поэтому результаты моделирования не ясно к чему приложимы, а предсказания не ясно как сопоставлять с натурными экспериментальными данными.* В целом, неясно, как

количественные и качественные предсказания теории могут быть сопоставлены с натурным экспериментом.

- 8) *При моделировании у Фристонa используется модель какого-то отдельного процесса. Но для работоспособной порождающей модели, сравнимой с реальным мозгом, в идеале потребуется иметь модель ВСЕГО мира.*
- 9) *Сомнительны основы принципа свободной энергии, то есть сомнительно представление о биологической системе как об эргодическом случайном динамическом аттракторе, а также в аргументации принципа свободной энергии происходит сомнительный перескок в рассуждениях из термодинамики в теорию информации. Об этом мы подробно писали в главе «Принцип свободной энергии».*
- 10) *Фристон пишет о том, что в его теории большую роль имеет шум, например, шум состояний [3], [5]. Однако нам не известно работ, где бы было показано, что роль шума в мозговых процессах настолько велика, как этого требует теория Фристонa.*
- 11) *Сомнительна гипотеза байесовского мозга. Несмотря на то, что эксперименты показывают байес-оптимальность, которую можно обнаружить при анализе данных о восприятии [38], из этого вовсе не следует, что основу работы мозга составляют оценки по Байесу.*
- 12) *О форме неизвестных распределений. Насколько правильно приближать неизвестные распределения именно гауссианом? Убедительного обоснования для этого нет.*
- 13) *О линеаризации. Насколько правильно отбрасывать нелинейные члены (степени, степени производных и т.д.) при представлении обобщенных координат?*
- 14) *О приближении среднего поля. Насколько правильно использовать приближение среднего поля? На наш взгляд для этого нужны обоснования.*
- 15) *Проблема априорной вероятности. Фристон пишет, что иерархический подход позволяет решить проблему априорной вероятности, характерной для байесовской теории вероятностей [1]. По нашему мнению, даже если система иерархическая, то всё равно требуется задать исходную априорную вероятность на самом нижнем уровне иерархии. Соответственно, возникает вопрос, откуда берется такая априорная вероятность. Если же такая вероятность врожденная, то каким образом реализуется эта врожденность?*

- 16) *Как непосредственно на натурном эксперименте количественно измерять или оценивать предсказание, ошибку предсказания, информационную свободную энергию и другие теоретико-информационные величины теории Фристонa?*

Кроме того, отдельно стоит упомянуть ещё один серьёзный недостаток, присущий, как минимум, одной работе Фристонa, но не являющийся недостатком теории как таковой. Это недостаточная обоснованность конструкций Фристонa с точки зрения нейроанатомии. Чему примером является разобранный нами выше моделирование Фристонem спонтанного моргания, мигательного безусловного рефлекса и отставленного и следового условного рефлексов.

Таким образом, легко можно увидеть, что проблем, недостатков и неясностей в теории Фристонa пока гораздо больше, чем достоинств. Эти проблемы мы можем разделить на 4 большие группы:

- 1) *философские* — кантианство,
- 2) *математические* — марковость, требование возможного универсального метода оптимизации для работоспособности теории Фристонa в «реалистичных» ситуациях, линеаризация, форма неизвестных распределений, приближение среднего поля, природа исходной априорной вероятности,
- 3) *общие* — неопределенность понятия «состояния» и его связи с нейрональной активностью, то, что не было показано в эксперименте существование популяций, кодирующих ошибки предсказания и предсказания, а также циркуляции ошибок предсказания и предсказаний по нейрональным сетями, сомнительны основания теории, а также её неотъемлемые части: гипотезы байесовского мозга и предиктивного кодирования, проблема измерения или оценки в эксперименте ошибок предсказания, предсказаний, информационной свободной энергии и т.д.
- 4) *для моделирования* — отсутствует привязка моделей к конкретным экспериментальным данным.

9. Заключение

Теория Фристонa, несмотря на свою оригинальность, универсальность и гибкость вызывает больше вопросов, чем дает ответов. Вызывают вопросы не только основания теории, допущения, в ней фигурирующие,

философские и математические проблемы, с ней связанные, но и её содержание, а также её предсказания, полезность и пригодность для моделирования реальных мозговых процессов.

Исходя из всего этого, по нашему мнению, следует признать, что теория Фристана пока ещё далека от окончательного своего вида и ещё до конца не сформулирована. По нашему мнению, она требует серьезной доработки и подробных пояснений в отношении упомянутых выше недостатков и вопросов, которые она вызывает.

Список литературы

- [1] Friston K., “The free-energy principle: a unified brain theory?”, *Nat. Rev. Neurosci.*, **11**:2 (2010), 127–38.
- [2] Friston K.J., Trujillo-Barreto N., Daunizeau J., “DEM: a variational treatment of dynamic systems”, *Neuroimage*, **41**:3 (2008), 849–885.
- [3] Friston K., “Hierarchical Models in the Brain”, *PLoS Comput. Biol.*, **4**:11 (2008), e1000211.
- [4] Friston K.J., Daunizeau J., Kilner J., Kiebel S.J., “Action and behavior: a free-energy formulation”, *Biol. Cybern.*, **102**:3 (2010), 227–260.
- [5] Friston K., Kilner J., Harrison L., “A free energy principle for the brain”, *J. Physiol. Paris.*, **100**:1–3 (2006), 70–87.
- [6] Friston K.J., Daunizeau J., Kiebel S.J., “Reinforcement learning or active inference?”, *PLoS One*, **4**:7 (2009), Article № e6421.
- [7] Friston K., Stephan K., Li B., and Daunizeau J., “Generalised Filtering”, *Mathematical Problems in Engineering*, **2010** (2010), 621670.
- [8] Friston K., Mattout J., Trujillo-Barreto N., Ashburner J., Penny W., “Variational free energy and the Laplace approximation”, *Neuroimage*, **34**:1 (2007), 220–234.
- [9] Friston K., Herrerros I., “Active Inference and Learning in the Cerebellum”, *Neural Comput.*, **28**:9 (2016), 1812–1839.
- [10] Kiebel S.J., Friston K.J., “Free energy and dendritic self-organization”, *Front. Syst. Neurosci.*, **5** (2011), 80.
- [11] Friston K., “A theory of cortical responses”, *Philos. Trans. R Soc. Lond B Biol. Sci.*, **360**:1456 (2005), 815–836.

- [12] Friston K., Schwartenbeck P., FitzGerald T., Moutoussis M., Behrens T., Dolan R.J., “The anatomy of choice: active inference and agency”, *Front. Hum. Neurosci.*, **7** (2013), 598.
- [13] von Helmholtz, H., *Handbuch der physiologischen Optik. 3.*, Leopold Voss, Leipzig, 1867, 874 c.
- [14] Boring, E. G., *A history of experimental psychology*, Appleton-Century-Crofts, New York, 1950, 699 c.
- [15] Helmholtz, H., *Concerning the perceptions in general. In Treatise on physiological optics (J. Southall, Trans., 3rd ed., Vol. III)*, Dover, New York, 1920-25, 734 c.
- [16] Clark A., *Surfing Uncertainty: Prediction, Action, and the Embodied Mind*, Oxford University Press, New York, 2015, 416 c.
- [17] Hohwy J., *The Predictive Mind*, Oxford University Press, Oxford, 2014, 282 c.
- [18] Swanson L. R., “The Predictive Processing Paradigm Has Roots in Kant”, *Front. Syst. Neurosci.*, **10** (2016), 79
- [19] Бэкон Ф., *Новый Органон*, Рипол классик, М., 2021, 364 с.
- [20] Kassler, J. C., *The beginnings of the modern philosophy of music in England.*, Ashgate, Aldershot, 2004, 258 c.
- [21] Gregory, R. L., “Perceptions as hypotheses.”, *Phil. Trans. R Soc. Lond B.*, **290** (1980), 181–197
- [22] Schneider, D. J., Hastorf, A. H., Ellsworth, P. C., *Person perception*, Addison-Wesley, Mass., 1979, 321 c.
- [23] Lewicki, P., *Nonconscious social information processing*, Academic Press, New York, 1986, 237 c.
- [24] Uleman J. S., Newman, L. S., Moskowitz, G. B., “People as flexible interpreters: Evidence and issues from spontaneous trait inference.”, *Advances in Experimental Social Psychology.*, **28** (1996), 211–279
- [25] Newman, L. S.; Uleman, J. S., *Spontaneous trait inference. In Uleman, J. S.; Bargh, J. A. (eds.). Unintended thought*, Guilford, New York, 1989, 155–188 c.
- [26] Uleman, J. S.; Bargh, J. A., *Unintended thought*, Guilford, New York, 1989, 469 c.

- [27] Hatfield G., *Perception as Unconscious Inference // Heyer D., Mausfeld R. Perception and the Physical World: Psychological and Philosophical Issues in Perception.*, John Wiley & Sons, Ltd., 2002, 344 с.
- [28] Boring, E. G., *Sensation and Perception in the History of Experimental Psychology*, Appleton-Century & Co, New York, 1942, 644 с.
- [29] Dayan, P., Hinton, G. E., Neal, R., Zemel R. S., “The Helmholtz machine”, *Neural Comput.*, **7**:5 (1995), 889–904
- [30] Rao, R., Ballard, D., “Predictive coding in the visual cortex: a functional interpretation of some extra-classical receptive-field effects”, *Nat. Neurosci.*, **2**:1 (1999), 79–87
- [31] Зюко А. Г., Кловский Д. Д., Назаров М. В., Финк Л., *Теория передачи сигналов: Учебник для вузов*, Связь, М., 1980, 288 с.
- [32] Баринов С. М. и др., *Большой англо-русский политехнический словарь. В 2 т.: ок. 200000 терминов. Т. 1 : A-L = The comprehensive English- Russian scientific and technical dictionary*, Рус. яз., М., 1991, 701 с.
- [33] Хокинс Д., Блейкли С., *Об интеллекте.*, Вильямс, М., 2007, 240 с.
- [34] Carbajal G. V., Malmierca M. S., “The Neuronal Basis of Predictive Coding Along the Auditory Pathway: From the Subcortical Roots to Cortical Deviance Detection”, *Trends Hear*, **22** (2018), № 2331216518784822
- [35] Heilbron M., Chait M., “Great Expectations: Is there Evidence for Predictive Coding in Auditory Cortex?”, *Neuroscience*, **389** (2018), 54–73
- [36] Соколов, Е. Н., *Восприятие и условный рефлекс: Новый взгляд.*, УМК «Психология»; Московский психолого-социальный институт, М., 2003, 287 с.
- [37] Barron H. C., Aukstulewicz R., Friston K., “Prediction and memory: A predictive coding account”, *Prog. Neurobiol.*, **192** (2020), № 101821
- [38] Knill D.C., Pouget A., “The Bayesian brain: the role of uncertainty in neural coding and computation”, *Trends Neurosci.*, **27**:12 (2004), 712–719
- [39] Friston K., Schwartenbeck P., FitzGerald T., Moutoussis M., Behrens T., Dolan R. J., “The anatomy of choice: dopamine and decision-making”, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. B Biol. Sci.*, **369**:1655 (2014), № 20130481

- [40] Meera A. A. and Wisse M., “Free energy principle based state and input observer design for linear systems with colored noise”, *2020 American Control Conference (ACC). IEEE*, 2020, 5052–5058.
- [41] Meera A. A. and Wisse M., “Free Energy Principle for the Noise Smoothness Estimation of Linear Systems with Colored Noise”, *ArXiv:2204.01796*, 2022
- [42] Karl Friston, https://scholar.google.co.uk/citations?user=q_4u0aoAAAAAJ&hl=en (дата обращения: 18.11.2022).
- [43] Friston K. J., Stephan K. E., “Free-energy and the brain”, *Synthese*, **159**:3 (2007), 417–458.
- [44] Friston K., Ao P., “Free energy, value, and attractors”, *Comput. Math. Methods Med.*, **2012** (2012), № 937860.
- [45] Aguilera M., Millidge B., Tschantz A., Buckley C. L., “How particular is the physics of the free energy principle?”, *Phys. Life Rev.*, **40** (2022), 24–50.
- [46] Mazzaglia P., Verbelen T., Çatal O., Dhoedt B., “The Free Energy Principle for Perception and Action: A Deep Learning Perspective”, *Entropy (Basel)*, **24**:2 (2022), 301.
- [47] Raja V., Valluri D., Baggs E., Chemero A., Anderson M. L., “The Markov blanket trick: On the scope of the free energy principle and active inference”, *Phys. Life Rev.*, **39** (2021), 49–72.
- [48] Boyadzhieva A., Kayhan E., “Keeping the Breath in Mind: Respiration, Neural Oscillations, and the Free Energy Principle”, *Front Neurosci.*, **15** (2021), № 647579.
- [49] Friston K., “A Free Energy Principle for Biological Systems”, *Entropy (Basel)*, **14**:11 (2012), 2100–2121.
- [50] Бернштейн Н. А., *Пути и задачи физиологии активности. //Бернштейн Н. А. Физиология движений и активность.*, М., 1990, 438 с.
- [51] Шрёдингер Э., *Что такое жизнь? Физический аспект живой клетки*, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика, М., 2002, 92 с.
- [52] Больцман Л., *Избранные труды. Молекулярно-кинетическая теория газов. Термодинамика. Статистическая механика. Теория излучения. Общие вопросы физики.*, Наука, М., 1984, 590 с.

- [53] Brownlee J., *Probability for Machine Learning: Discover How To Harness Uncertainty With Python*, Machine Learning Mastery., 2020, 319 с.
- [54] Верещагин Н. К., Щепин Е. В., *Информация, кодирование и предсказание.*, ФМОП, В31 МЦНМО, М., 2012, 236 с.
- [55] Murphy K. P., *Machine Learning: A Probabilistic Perspective*, MIT Press, 2012, 1104 с.
- [56] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Статистическая физика. Часть 1: Учебное пособие для вузов.*, Физматлит, М., 2010, 616 с.
- [57] Hinton G. E., van Camp D., “Keeping the neural networks simple by minimizing the description length of the weights”, *COLT*, 1993, 5–13
- [58] Hinton, G. E. and Zemel, R. S., *Autoencoders, Minimum Description Length, and Helmholtz Free Energy*. Cowan J. D., Tesauro G., Alspector J. *Advances in Neural Information Processing Systems 6.*, Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 1994, 3–10 с.
- [59] Zemel, R. S., Hinton, G. E., “Learning Population Codes by Minimizing Description Length”, *Neural Computation*, **7:3** (1995), 549–564
- [60] Hinton G. E., Dayan P., Frey B. J., Neal R. M., “The "wake-sleep" algorithm for unsupervised neural networks”, *Science*, **268**:5214 (1995), 1158–1161
- [61] Сена Л. А., *Единицы физических величин и их размерности*, Наука, М., 1988, 432 с.
- [62] Colombo, M., Palacios, P., “Non-equilibrium thermodynamics and the free energy principle in biology”, *Biol Philos*, **36** (2021), 41
- [63] Biehl M., Pollock F., Kanai R., “A Technical Critique of Some Parts of the Free Energy Principle”, *Entropy*, **23:3** (2021), 293
- [64] Friston K. J., Da Costa L., Parr T., “Some Interesting Observations on the Free Energy Principle”, *Entropy (Basel)*, **23:8** (2021), 1076
- [65] Friston K., Heins C., Ueltzhöffer K., Da Costa L., Parr T., “Stochastic Chaos and Markov Blankets”, *Entropy (Basel)*, **23:9** (2021), 1220
- [66] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Механика. 5-е изд., стереотип.*, Физматлит, М., 2012, 224 с.
- [67] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теория поля. Издание 8-е, стереотип.*, Физматлит, М., 2012, 536 с.

- [68] Friston K., “A free energy principle for a particular physics”, *ArXiv:190610184*, 2019
- [69] Li S., Zhuang C., Hao M., He X., Marquez J. C., Niu C. M., Lan N., “Coordinated alpha and gamma control of muscles and spindles in movement and posture”, *Front. Comput. Neurosci.*, **9** (2015), 122
- [70] Lopez-Poveda E. A., “Olivocochlear Efferents in Animals and Humans: From Anatomy to Clinical Relevance”, *Front Neurol.*, **9** (2018), 197
- [71] Gastinger M. J., Tian N., Horvath T., Marshak D. W., “Retinopetal Axons in Mammals: Emphasis on Histamine and Serotonin”, *Curr Eye Res.*, **31**:7–8 (2006), 1655–1667
- [72] Adams, R.A., Shipp, S., Friston, K.J., “Predictions not commands: active inference in the motor system”, *Brain Struct. Funct.*, **218**:3 (2013), 611–643
- [73] Платон, *Собрание сочинений. В 4 т. / Под общ. ред. А. Ф. Лосева, В. Ф. Асмуса, А. А. Тахо-Годи. (Серия «Философское наследие»)*. Т. 2., Мысль, М., 1993, 528 с.
- [74] Кант И., *Критика чистого разума / Пер. с нем. Н. Лосского сверен и отредактирован Ц. Г. Арзаканьяном и М. И. Итжиным; Примеч. Ц. Г. Арзаканьяна.*, Эксмо, М., 2007, 736 с.
- [75] Фейнман Р., Лейтон Р., Сендс М., *Современная наука о природе. Законы механики. Пространство. Время. Движение. Т. 1.*, АСТ, М., 2019, 478 с.
- [76] Звягин Л.С., “Перспективы применения моделей с латентными переменными и вариационный байес для задач оптимизации”, *Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям*, **1** (2019), 25–29
- [77] Савин А.В., “Байесовский подход в современном анализе: алгоритмы и синтез”, *Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям*, **2** (2018), 635–638
- [78] Баранов И.Д., “Байесовская стратегия оценки достоверности и метод байесовских сетей”, *Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям*, **2** (2018), 659–662
- [79] Marinai S., Fujisawa H., *Machine Learning in Document Analysis and Recognition*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2008, 434 с.

- [80] Srinivasan H., Srihari S. N., Beal M. J., “Machine Learning for Signature Verification”, // *Kalra P., Peleg S. Computer Vision, Graphics and Image Processing: 5th Indian Conference, ICVGIP 2006, Madurai, India, December 13-16, 2006*, 2007, 761–775
- [81] Флах, П., *Машинное обучение. Наука и искусство построения алгоритмов, которые извлекают знания из данных*, ДМК ПРЕСС, М., 2015, 399 с.
- [82] Friston K., Breakspear M., Deco G., “Perception and self-organized instability”, *Front. Comput. Neurosci.*, **6** (2012), 44
- [83] Friston K., Kiebel S., “Predictive coding under the free-energy principle”, *Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci.*, **364**:1521 (2009), 1211–1221
- [84] Parr T., Rees G., Friston K. J., “Computational Neuropsychology and Bayesian Inference”, *Front. Hum. Neurosci.*, **12** (2018), 61
- [85] Friston K., Parr T., Zeidman P., “Bayesian model reduction”, *ArXiv:1805.07092.*, 2018
- [86] Han J., Kamber M., Pei J., *Data Mining: Concepts and Techniques, 3rd ed.*, Elsevier, New York, 2012, 744 с.
- [87] McCullagh P., “What is a statistical model?”, *Ann. Statist.*, **30**:5 (2002), 1225–1310
- [88] Кадис Р. Л., “О терминах и понятиях "точность" и "правильность" (результатов) химического анализа”, *Журнал аналитической химии*, **62**:6 (2007), 566–574
- [89] Statistical parametric mapping. URL: <https://www.fil.ion.ucl.ac.uk/spm/> (дата обращения: 18.11.2022).
- [90] Федорюк М. В., *Метод перевала*, URSS, М., 2015, 368 с.
- [91] Bishop C. M., *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer New York, New York, 2006, 738 с.
- [92] Felleman D. J., Van Essen D. C., “Distributed hierarchical processing in the primate cerebral cortex”, *Cereb Cortex*, **1**:1 (1991), 1–47
- [93] Bastos A. M., Usrey W. M., Adams R. A., Mangun G. R., Fries P., Friston K. J., “Canonical microcircuits for predictive coding”, *Neuron*, **76**:4 (2012), 695–711

- [94] Ozaki T., “A bridge between nonlinear time series models and nonlinear stochastic dynamical systems: a local linearization approach”, *Statistica Sinica*, **2** (1992), 113–135
- [95] Balaban C.D., “Olivio-vestibular and cerebello-vestibular connections in albino rabbits”, *Neuroscience*, **12**:1 (1984), 129–149
- [96] Highstein S.M., Holstein G.R., “The anatomy of the vestibular nuclei”, *Prog Brain Res.*, **151** (2006), 157-203
- [97] Basso M. A., Evinger C., “An Explanation for Reflex Blink Hyperexcitability in Parkinson’s Disease. II. Nucleus Raphe Magnus”, *J. Neurosci.*, **16**:22 (1996), 7318–7330
- [98] Peterson D. A., Sejnowski T. J., “A Dynamic Circuit Hypothesis for the Pathogenesis of Blepharospasm”, *Front Comput Neurosci.*, **11** (2017), 11
- [99] Baumel Y., Jacobson G.A., Cohen D., “Implications of functional anatomy on information processing in the deep cerebellar nuclei”, *Front. Cell. Neurosci.*, **3** (2009), 14
- [100] Friston K. J., Shiner T., FitzGerald T., Galea J. M., Adams R., Brown H., Dolan R. J., Moran R., Stephan K. E., Bestmann S., “Dopamine, Affordance and Active Inference”, *PLoS Comput Biol.*, **8**:1 (2012), № e1002327
- [101] Parr T., Friston K. J., “The Anatomy of Inference: Generative Models and Brain Structure”, *Front Comput Neurosci.*, **12** (2018), 90
- [102] Carhart-Harris R. L., Friston K. J., “REBUS and the Anarchic Brain: Toward a Unified Model of the Brain Action of Psychedelics”, *Pharmacol. Rev.*, **71**:3 (2019), 316–344
- [103] Aramideh M., Ongerboer de Visser B. W., Koelman J. H., Majoie C. B., Holstege G., “The late blink reflex response abnormality due to lesion of the lateral tegmental field”, *Brain*, **120**:9 (1997), 1685–1692
- [104] Медведева Л.А., Сыровегин А.В., Авакян Г.Н., Гнездилов А.В., Загорулько О.И., “Методология исследования мигательного рефлекса и его нормативные параметры”, *Журнал неврологии и психиатрии*, **1** (2011), 62–67
- [105] Boele H.-J., Koekkoek S. K. E., De Zeeuw C. I., “Cerebellar and extracerebellar involvement in mouse eyeblink conditioning: the ACDC model”, *Front. Cell Neurosci.*, **3** (2010), 19

- [106] Freeman J. H., Steinmetz A. B., “Neural circuitry and plasticity mechanisms underlying delay eyeblink conditioning”, *Learn Mem.*, **18**:10 (2011), 666–677
- [107] Yang Y., Lei C., Feng H., Sui J.-A., “The neural circuitry and molecular mechanisms underlying delay and trace eyeblink conditioning in mice”, *Behav. Brain Res.*, **278** (2015), 307–314
- [108] Jirenhed D.-A., Bengtsson F., Hesslow G., “Acquisition, extinction, and reacquisition of a cerebellar cortical memory trace”, *J. Neurosci.*, **27**:10 (2007), 2493–2502
- [109] Ito M., Kano M., “Long-lasting depression of parallel fiber-Purkinje cell transmission induced by conjunctive stimulation of parallel fibers and climbing fibers in the cerebellar cortex”, *Neurosci. Lett.*, **33**:3 (1982), 253–258
- [110] Ito M., *The Cerebellum and Neural Control*, Raven, New York, 1984, 580 c.
- [111] Mandwal A., Orlandi J. G., Simon C., Davidsen J., “A biochemical mechanism for time-encoding memory formation within individual synapses of Purkinje cells”, *PLoS One*, **16**:5 (2021), № e0251172
- [112] Delgado-Garcia J. M., Gruart A., “The role of interpositus nucleus in eyelid conditioned responses”, *Cerebellum*, **1**:4 (2002), 289–308
- [113] Delgado-Garcia J. M., Gruart A., “Firing activities of identified posterior interpositus nucleus neurons during associative learning in behaving cats”, *Brain Res. Rev.*, **49**:2 (2005), 367–376
- [114] Delgado-Garcia J. M., Gruart A., “Building new motor responses: eyelid conditioning revisited”, *Trends Neurosci.*, **29**:6 (2006), 330–338
- [115] Aksenov D., Serdyukova N., Irwin K., Bracha V., “GABA neurotransmission in the cerebellar interposed nuclei: involvement in classically conditioned eyeblinks and neuronal activity”, *J. Neurophysiol.*, **91**:2 (2004), 719–727
- [116] Aksenov D. P., Serdyukova N. A., Bloedel J. R., Bracha V., “Glutamate neurotransmission in the cerebellar interposed nuclei: involvement in classically conditioned eyeblinks and neuronal activity”, *J. Neurophysiol.*, **93**:1 (2005), 44–52
- [117] Blankenship M. R., Huckfeldt R., Steinmetz J. J., Steinmetz J. E., “The effects of amygdala lesions on hippocampal activity and classical eyeblink conditioning in rats”, *Brain Res.*, **1035**:2 (2005), 120–130

- [118] Weisz D. J., Harden D. G., Xiang Z., “Effects of amygdala lesions on reflex facilitation and conditioned response acquisition during nictitating membrane response conditioning in rabbit”, *Behav. Neurosci.*, **106**:2 (1992), 262–273
- [119] Lee T., Kim J., “Differential effects of cerebellar, amygdalar, and hippocampal lesions on classical eyeblink conditioning in rats”, *J. Neurosci.*, **24**:13 (2004), 3242–3250
- [120] Гришаев А.В., Сазонов В.Ф., “Роль активных и пассивных свойств дендритного дерева нейрона в многоплановой интеграции постсинаптических потенциалов”, *Усп. физиол. наук*, **51**:3 (2020), 87–104
- [121] Сазонов В.Ф., Сазонов И.В., Гришаев А.В., “Понятие режимности в работе нейронов как функциональная альтернатива структурной пластичности в компьютерном моделировании межнейронных взаимодействий”, *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*, **22**:5 (2020), 43–53
- [122] Гришаев А.В., Сазонов В.Ф., “Дендритные механизмы регуляции активности и пластичности пирамидных нейронов неокортекса”, *Усп. физиол. наук.*, **49**:3 (2018), 104–118
- [123] Friston K., Kiebel S., “Cortical circuits for perceptual inference”, *Neural Netw.*, **22**:8 (2009), 1093–1104
- [124] Clark, A., “Whatever next? Predictive brains, situated agents, and the future of cognitive science”, *Behav. Brain Sci.*, **36**:3 (2013), 181–204
- [125] Gładziejewski, P., “Predictive coding and representationalism”, *Synthese*, **193** (2016), 559–582
- [126] Hohwy, J., *The Predictive Mind*, Oxford University Press, New York, 2013, 288 с.
- [127] Hohwy, J., “The self-evidencing brain”, *Noûs*, **50**:2 (2014), 259–285
- [128] Кант И., *Прологомены ко всякой будущей метафизике, могущей появиться как наука.*// Кант И. Сочинения в шести томах. Т. 4, Ч. 1., М., 1965, 544 с.
- [129] Clark, A., *Predicting peace: the end of the representation wars.* In: Metzinger T., Windt J. M. Frankfurt am Main: MIND Group, MIND Group, Frankfurt am Main, 2015, 1–7 с.
- [130] Clark, A., “Busting out: predictive brains, embodied minds, and the puzzle of the evidentiary veil”, *Noûs*, **51**:4 (2016), 727–753

- [131] Bruineberg, J., Kiverstein, J., Rietveld, E., “The anticipating brain is not a scientist: the free-energy principle from an ecological-enactive perspective”, *Synthese*, **195**:6 (2018), 2417–2444
- [132] Ленин В. И., *Полное собрание сочинений: в 55 т. / В. И. Ленин; Ин-т марксизма-ленинизма при ЦК КПСС — 5-е изд. Т. 18. Материализм и эмпириокритицизм.*, Гос. изд-во полит. лит., М., 1968, 7–384 с.
- [133] Yang X.-S., *Optimization Techniques and Applications with Examples*, John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey, 2018, 384 с.
- [134] Friston K., FitzGerald T., Rigoli F., Schwartenbeck P., Pezzulo G., “Active Inference: A Process Theory”, *Neural Comput.*, **29**:1 (2017), 1–49

**The Karl Friston’s neurobiological theory: a critical review
Grishaev A.V., Sazonov V.F.**

In this article, for the first time in the Russian-language literature, the neurobiological version of Karl Friston’s theory is presented. For the first time, this theory is presented holistically, in detail and logically built within the framework of one article and, as far as possible, adapted for understanding by neuroscientists and neurophysiologists. How Friston applies this theory in practice is discussed. A critical analysis of internal problems and contradictions in Friston’s theory is carried out.

Keywords: free energy principle, Bayesian brain hypothesis, predictive coding, prediction error, observed states, unobserved states.

References

- [1] Friston K., “The free-energy principle: a unified brain theory?”, *Nat. Rev. Neurosci.*, **11**:2 (2010), 127–38
- [2] Friston K.J., Trujillo-Barreto N., Daunizeau J., “DEM: a variational treatment of dynamic systems”, *Neuroimage*, **41**:3 (2008), 849–885
- [3] Friston K., “Hierarchical Models in the Brain”, *PLoS Comput. Biol.*, **4**:11 (2008), e1000211
- [4] Friston K.J., Daunizeau J., Kilner J., Kiebel S.J., “Action and behavior: a free-energy formulation”, *Biol. Cybern.*, **102**:3 (2010), 227–260

- [5] Friston K., Kilner J., Harrison L., “A free energy principle for the brain”, *J. Physiol. Paris.*, **100**:1–3 (2006), 70–87
- [6] Friston K.J., Daunizeau J., Kiebel S.J., “Reinforcement learning or active inference?”, *PLoS One*, **4**:7 (2009), Article № e6421
- [7] Friston K., Stephan K., Li B., and Daunizeau J., “Generalised Filtering”, *Mathematical Problems in Engineering*, **2010** (2010), 621670
- [8] Friston K., Mattout J., Trujillo-Barreto N., Ashburner J., Penny W., “Variational free energy and the Laplace approximation”, *Neuroimage*, **34**:1 (2007), 220–234
- [9] Friston K., Herreros I., “Active Inference and Learning in the Cerebellum”, *Neural Comput.*, **28**:9 (2016), 1812–1839
- [10] Kiebel S.J., Friston K.J., “Free energy and dendritic self-organization”, *Front. Syst. Neurosci.*, **5** (2011), 80
- [11] Friston K., “A theory of cortical responses”, *Philos. Trans. R Soc. Lond B Biol. Sci.*, **360**:1456 (2005), 815–836
- [12] Friston K., Schwartenbeck P., FitzGerald T., Moutoussis M., Behrens T., Dolan R.J., “The anatomy of choice: active inference and agency”, *Front. Hum. Neurosci.*, **7** (2013), 598
- [13] von Helmholtz, H., *Handbuch der physiologischen Optik. 3.*, Leopold Voss, Leipzig, 1867, 874 c.
- [14] Boring, E. G., *A history of experimental psychology*, Appleton-Century-Crofts, New York, 1950, 699 c.
- [15] Helmholtz, H., *Concerning the perceptions in general. In Treatise on physiological optics (J. Southall, Trans., 3rd ed., Vol. III)*, Dover, New York, 1920-25, 734 c.
- [16] Clark A., *Surfing Uncertainty: Prediction, Action, and the Embodied Mind*, Oxford University Press, New York, 2015, 416 c.
- [17] Hohwy J., *The Predictive Mind*, Oxford University Press, Oxford, 2014, 282 c.
- [18] Swanson L. R., “The Predictive Processing Paradigm Has Roots in Kant”, *Front. Syst. Neurosci.*, **10** (2016), 79
- [19] Bacon F., *New Organon*, Ripol classic, M., 2021 (In Russian), 364 c.

- [20] Kassler, J. C., *The beginnings of the modern philosophy of music in England.*, Ashgate, Aldershot, 2004, 258 c.
- [21] Gregory, R. L., “Perceptions as hypotheses.”, *Phil. Trans. R Soc. Lond B.*, **290** (1980), 181–197
- [22] Schneider, D. J., Hastorf, A. H., Ellsworth, P. C., *Person perception*, Addison-Wesley, Mass., 1979, 321 c.
- [23] Lewicki, P., *Nonconscious social information processing*, Academic Press, New York, 1986, 237 c.
- [24] Uleman J. S., Newman, L. S., Moskowitz, G. B., “People as flexible interpreters: Evidence and issues from spontaneous trait inference.”, *Advances in Experimental Social Psychology.*, **28** (1996), 211–279
- [25] Newman, L. S.; Uleman, J. S., *Spontaneous trait inference. In Uleman, J. S.; Bargh, J. A. (eds.). Unintended thought*, Guilford, New York, 1989, 155–188 c.
- [26] Uleman, J. S.; Bargh, J. A., *Unintended thought*, Guilford, New York, 1989, 469 c.
- [27] Hatfield G., *Perception as Unconscious Inference // Heyer D., Mausfeld R. Perception and the Physical World: Psychological and Philosophical Issues in Perception.*, John Wiley & Sons, Ltd., 2002, 344 c.
- [28] Boring, E. G., *Sensation and Perception in the History of Experimental Psychology*, Appleton-Century & Co, New York, 1942, 644 c.
- [29] Dayan, P., Hinton, G. E., Neal, R., Zemel R. S., “The Helmholtz machine”, *Neural Comput.*, **7:5** (1995), 889–904
- [30] Rao, R., Ballard, D., “Predictive coding in the visual cortex: a functional interpretation of some extra-classical receptive-field effects”, *Nat. Neurosci.*, **2:1** (1999), 79–87
- [31] Zyuko A. G., Klovskiy D. D., Nazarov M. V., Fink L., *Signaling Theory: A Textbook for Universities*, Communication, M., 1980 (In Russian), 288 c.
- [32] Barinov S. M. et. al., *The comprehensive English- Russian scientific and technical dictionary. In two vol.: approx. 200000 entries. V. 1 : A-L*, Russ. yaz. publish., M., 1991 (In Russian), 701 c.
- [33] Hawkins J., Blakeslee S., *On Intelligence.*, Times Books, New York, 2004, 272 c.

- [34] Carbajal G. V., Malmierca M. S., “The Neuronal Basis of Predictive Coding Along the Auditory Pathway: From the Subcortical Roots to Cortical Deviance Detection”, *Trends Hear*, **22** (2018), № 2331216518784822
- [35] Heilbron M., Chait M., “Great Expectations: Is there Evidence for Predictive Coding in Auditory Cortex?”, *Neuroscience*, **389** (2018), 54–73
- [36] Sokolov, E. N., *Perception and conditioned reflex: A new look.*, UMK "Psychology"; Moscow Psychological and Social Institute, M., 2003 (In Russian), 287 c.
- [37] Barron H. C., Auksztulewicz R., Friston K., “Prediction and memory: A predictive coding account”, *Prog. Neurobiol.*, **192** (2020), № 101821
- [38] Knill D.C., Pouget A., “The Bayesian brain: the role of uncertainty in neural coding and computation”, *Trends Neurosci.*, **27**:12 (2004), 712–719
- [39] Friston K., Schwartenbeck P., FitzGerald T., Moutoussis M., Behrens T., Dolan R. J., “The anatomy of choice: dopamine and decision-making”, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. B Biol. Sci.*, **369**:1655 (2014), № 20130481
- [40] Meera A. A. and Wisse M., “Free energy principle based state and input observer design for linear systems with colored noise”, *2020 American Control Conference (ACC). IEEE*, 2020, 5052–5058.
- [41] Meera A. A. and Wisse M., “Free Energy Principle for the Noise Smoothness Estimation of Linear Systems with Colored Noise”, *ArXiv:2204.01796*, 2022
- [42] Karl Friston, https://scholar.google.co.uk/citations?user=q_4u0aoAAAAJ&hl=en (date of the application: 18.11.2022).
- [43] Friston K. J., Stephan K. E., “Free-energy and the brain”, *Synthese*, **159**:3 (2007), 417–458.
- [44] Friston K., Ao P., “Free energy, value, and attractors”, *Comput. Math. Methods Med.*, **2012** (2012), № 937860.
- [45] Aguilera M., Millidge B., Tschantz A., Buckley C. L., “How particular is the physics of the free energy principle?”, *Phys. Life Rev.*, **40** (2022), 24–50.

- [46] Mazzaglia P., Verbelen T., Çatal O., Dhoedt B., “The Free Energy Principle for Perception and Action: A Deep Learning Perspective”, *Entropy (Basel)*, **24**:2 (2022), 301.
- [47] Raja V., Valluri D., Baggs E., Chemero A., Anderson M. L., “The Markov blanket trick: On the scope of the free energy principle and active inference”, *Phys. Life Rev.*, **39** (2021), 49–72.
- [48] Boyadzhieva A., Kayhan E., “Keeping the Breath in Mind: Respiration, Neural Oscillations, and the Free Energy Principle”, *Front Neurosci.*, **15** (2021), № 647579.
- [49] Friston K., “A Free Energy Principle for Biological Systems”, *Entropy (Basel)*, **14**:11 (2012), 2100–2121.
- [50] Bernstein N. A., *Ways and tasks of activity physiology. // Bernstein N. A. Physiology of movements and activity.*, M., 1990, 438 c.
- [51] Schrodinger E., *What Is Life? The Physical Aspect of the Living Cell*, Izhevsk: Research Center "Regular and Chaotic Dynamics, M., 2002 (In Russian), 92 c.
- [52] Boltzmann L., *Selected works. Molecular-kinetic theory of gases. Thermodynamics. Statistical mechanics. Theory of radiation. General questions of physics.*, Nauka, M., 1984 (In Russian), 590 c.
- [53] Brownlee J., *Probability for Machine Learning: Discover How To Harness Uncertainty With Python*, Machine Learning Mastery., 2020, 319 c.
- [54] Vereshchagin N. K., Shchepin E. V., *Information, coding and prediction.*, FMOP, V31 MCNMO, M., 2012 (In Russian), 236 c.
- [55] Murphy K. P., *Machine Learning: A Probabilistic Perspective*, MIT Press, 2012, 1104 c.
- [56] Landau L. D., Lifshits E. M., *Statistical physics. Part 1: Textbook for universities.*, Fizmatlit, M., 2010 (In Russian), 616 c.
- [57] Hinton G. E., van Camp D., “Keeping the neural networks simple by minimizing the description length of the weights”, *COLT*, 1993, 5–13
- [58] Hinton, G. E. and Zemel, R. S., *Autoencoders, Minimum Description Length, and Helmholtz Free Energy.* Cowan J. D., Tesauro G., Alspector J. *Advances in Neural Information Processing Systems 6.*, Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 1994, 3–10 c.

- [59] Zemel, R. S., Hinton, G. E., “Learning Population Codes by Minimizing Description Length”, *Neural Computation*, **7**:3 (1995), 549–564
- [60] Hinton G. E., Dayan P., Frey B. J., Neal R. M., “The "wake-sleep" algorithm for unsupervised neural networks”, *Science*, **268**:5214 (1995), 1158–1161
- [61] Sena L.A., *Units of physical quantities and their dimensions*, Nauka, M., 1988 (In Russian), 432 c.
- [62] Colombo, M., Palacios, P., “Non-equilibrium thermodynamics and the free energy principle in biology”, *Biol Philos*, **36** (2021), 41
- [63] Biehl M., Pollock F., Kanai R., “A Technical Critique of Some Parts of the Free Energy Principle”, *Entropy*, **23**:3 (2021), 293
- [64] Friston K. J., Da Costa L., Parr T., “Some Interesting Observations on the Free Energy Principle”, *Entropy (Basel)*, **23**:8 (2021), 1076
- [65] Friston K., Heins C., Ueltzhöffer K., Da Costa L., Parr T., “Stochastic Chaos and Markov Blankets”, *Entropy (Basel)*, **23**:9 (2021), 1220
- [66] Landau L. D., Lifshits E. M., *Mechanics. 5th ed.*, Fizmatlit, M., 2012 (In Russian), 224 c.
- [67] Landau L. D., Lifshits E. M., *Field theory. 8-th ed.*, Fizmatlit, M., 2012 (In Russian), 536 c.
- [68] Friston K., “A free energy principle for a particular physics”, *ArXiv:190610184*, 2019
- [69] Li S., Zhuang C., Hao M., He X., Marquez J. C., Niu C. M., Lan N., “Coordinated alpha and gamma control of muscles and spindles in movement and posture”, *Front. Comput. Neurosci.*, **9** (2015), 122
- [70] Lopez-Poveda E. A., “Olivocochlear Efferents in Animals and Humans: From Anatomy to Clinical Relevance”, *Front Neurol.*, **9** (2018), 197
- [71] Gastinger M. J., Tian N., Horvath T., Marshak D. W., “Retinopetal Axons in Mammals: Emphasis on Histamine and Serotonin”, *Curr Eye Res.*, **31**:7–8 (2006), 1655–1667
- [72] Adams, R.A., Shipp, S., Friston, K.J., “Predictions not commands: active inference in the motor system”, *Brain Struct. Funct.*, **218**:3 (2013), 611–643

- [73] Plato, *Collected works. In 4 volumes / Under the total. ed. A. F. Losev, V. F. Asmus, A. A. Takho-Godi. (Series "Philosophical heritage"). T. 2.*, Mysl, M., 1993 (In Russian), 528 c.
- [74] Kant I., *Critique of Pure Reason / Trans. with ger. by N. Lossky verified and edited by Ts. G. Arzakanyan and M. I. Itkin; Note. Ts. G. Arzakanyan.*, Eksmo, M., 2007 (In Russian), 736 c.
- [75] Feynman R., Layton R., Sands M., *Modern science of nature. The laws of mechanics. Space. Time. Movement. T. 1.*, AST, M., 2019 (In Russian), 478 c.
- [76] Zvyagin L.S., “Prospects of application of models with latent variables and variational bayes for optimization problems”, *International Conference on Soft Computing and Measurements*, **1** (2019), 25–29 (In Russian)
- [77] Savin A.V., “Bayesian approach in modern analysis: algorithms and synthesis”, *International Conference on Soft Computing and Measurements*, **2** (2018), 635–638 (In Russian)
- [78] Baranov I.D., “Bayesian Reliability Estimation Strategy and Bayesian Network Method”, *International Conference on Soft Computing and Measurements*, **2** (2018), 659–662 (In Russian)
- [79] Marinai S., Fujisawa H., *Machine Learning in Document Analysis and Recognition*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2008, 434 c.
- [80] Srinivasan H., Srihari S. N., Beal M. J., “Machine Learning for Signature Verification”, // Kalra P., Peleg S. *Computer Vision, Graphics and Image Processing: 5th Indian Conference, ICVGIP 2006, Madurai, India, December 13-16, 2006*, 2007, 761–775
- [81] Flakh, П., *Machine learning. The science and art of building algorithms that extract knowledge from data*, DMK PRESS, M., 2015 (In Russian), 399 c.
- [82] Friston K., Breakspear M., Deco G., “Perception and self-organized instability”, *Front. Comput. Neurosci.*, **6** (2012), 44
- [83] Friston K., Kiebel S., “Predictive coding under the free-energy principle”, *Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci.*, **364**:1521 (2009), 1211–1221
- [84] Parr T., Rees G., Friston K. J., “Computational Neuropsychology and Bayesian Inference”, *Front. Hum. Neurosci.*, **12** (2018), 61

- [85] Friston K., Parr T., Zeidman P., “Bayesian model reduction”, *ArXiv:1805.07092.*, 2018
- [86] Han J., Kamber M., Pei J., *Data Mining: Concepts and Techniques, 3rd ed.*, Elsevier, New York, 2012, 744 c.
- [87] McCullagh P., “What is a statistical model?”, *Ann. Statist.*, **30**:5 (2002), 1225–1310
- [88] Kadis R.L., “The terms "tochnost'"and "pravil'nost'"as applied to the results of chemical analysis”, *Journal of Analytical Chemistry.*, **62**:6 (2007), 566–574 (In Russian)
- [89] Statistical parametric mapping. URL: <https://www.fil.ion.ucl.ac.uk/spm/> (date of the application: 18.11.2022).
- [90] Fedoryuk M.V., *Pass method*, URSS, M., 2015 (In Russian), 368 c.
- [91] Bishop C. M., *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer New York, New York, 2006, 738 c.
- [92] Felleman D. J., Van Essen D. C., “Distributed hierarchical processing in the primate cerebral cortex”, *Cereb Cortex*, **1**:1 (1991), 1–47
- [93] Bastos A. M., Usrey W. M., Adams R. A., Mangun G. R., Fries P., Friston K. J., “Canonical microcircuits for predictive coding”, *Neuron*, **76**:4 (2012), 695–711
- [94] Ozaki T., “A bridge between nonlinear time series models and nonlinear stochastic dynamical systems: a local linearization approach”, *Statistica Sinica*, **2** (1992), 113–135
- [95] Balaban C.D., “Olivio-vestibular and cerebello-vestibular connections in albino rabbits”, *Neuroscience*, **12**:1 (1984), 129–149
- [96] Highstein S.M., Holstein G.R., “The anatomy of the vestibular nuclei”, *Prog Brain Res.*, **151** (2006), 157-203
- [97] Basso M. A., Evinger C., “An Explanation for Reflex Blink Hyperexcitability in Parkinson’s Disease. II. Nucleus Raphe Magnus”, *J. Neurosci.*, **16**:22 (1996), 7318–7330
- [98] Peterson D. A., Sejnowski T. J., “A Dynamic Circuit Hypothesis for the Pathogenesis of Blepharospasm”, *Front Comput Neurosci.*, **11** (2017), 11

- [99] Baumel Y., Jacobson G.A., Cohen D., “Implications of functional anatomy on information processing in the deep cerebellar nuclei”, *Front. Cell. Neurosci.*, **3** (2009), 14
- [100] Friston K. J., Shiner T., FitzGerald T., Galea J. M., Adams R., Brown H., Dolan R. J., Moran R., Stephan K. E., Bestmann S., “Dopamine, Affordance and Active Inference”, *PLoS Comput Biol.*, **8**:1 (2012), № e1002327
- [101] Parr T., Friston K. J., “The Anatomy of Inference: Generative Models and Brain Structure”, *Front Comput Neurosci.*, **12** (2018), 90
- [102] Carhart-Harris R. L., Friston K. J., “REBUS and the Anarchic Brain: Toward a Unified Model of the Brain Action of Psychedelics”, *Pharmacol. Rev.*, **71**:3 (2019), 316–344
- [103] Aramideh M., Ongerboer de Visser B. W., Koelman J. H., Majoie C. B., Holstege G., “The late blink reflex response abnormality due to lesion of the lateral tegmental field”, *Brain*, **120**:9 (1997), 1685–1692
- [104] Medvedeva L.A., Syrovegin A.V., Avakian G.N., Gnezdilov A.V., Zagorul’ko O.I., “The methodology on the study of blink reflex and its normative parameters”, *S.S. Korsakov journal of neurology and psychiatry*, **1** (2011), 62–67 (In Russian)
- [105] Boele H.-J., Koekkoek S. K. E., De Zeeuw C. I., “Cerebellar and extracerebellar involvement in mouse eyeblink conditioning: the ACDC model”, *Front. Cell Neurosci.*, **3** (2010), 19
- [106] Freeman J. H., Steinmetz A. B., “Neural circuitry and plasticity mechanisms underlying delay eyeblink conditioning”, *Learn Mem.*, **18**:10 (2011), 666–677
- [107] Yang Y., Lei C., Feng H., Sui J.-A., “The neural circuitry and molecular mechanisms underlying delay and trace eyeblink conditioning in mice”, *Behav. Brain Res.*, **278** (2015), 307–314
- [108] Jirenhed D.-A., Bengtsson F., Hesslow G., “Acquisition, extinction, and reacquisition of a cerebellar cortical memory trace”, *J. Neurosci.*, **27**:10 (2007), 2493–2502
- [109] Ito M., Kano M., “Long-lasting depression of parallel fiber-Purkinje cell transmission induced by conjunctive stimulation of parallel fibers and climbing fibers in the cerebellar cortex”, *Neurosci. Lett.*, **33**:3 (1982), 253–258

- [110] Ito M., *The Cerebellum and Neural Control*, Raven, New York, 1984, 580 c.
- [111] Mandwal A., Orlandi J. G., Simon C., Davidsen J., “A biochemical mechanism for time-encoding memory formation within individual synapses of Purkinje cells”, *PLoS One*, **16**:5 (2021), № e0251172
- [112] Delgado-Garcia J. M., Gruart A., “The role of interpositus nucleus in eyelid conditioned responses”, *Cerebellum*, **1**:4 (2002), 289–308
- [113] Delgado-Garcia J. M., Gruart A., “Firing activities of identified posterior interpositus nucleus neurons during associative learning in behaving cats”, *Brain Res. Rev.*, **49**:2 (2005), 367–376
- [114] Delgado-Garcia J. M., Gruart A., “Building new motor responses: eyelid conditioning revisited”, *Trends Neurosci.*, **29**:6 (2006), 330–338
- [115] Aksenov D., Serdyukova N., Irwin K., Bracha V., “GABA neurotransmission in the cerebellar interposed nuclei: involvement in classically conditioned eyeblinks and neuronal activity”, *J. Neurophysiol.*, **91**:2 (2004), 719–727
- [116] Aksenov D. P., Serdyukova N. A., Bloedel J. R., Bracha V., “Glutamate neurotransmission in the cerebellar interposed nuclei: involvement in classically conditioned eyeblinks and neuronal activity”, *J. Neurophysiol.*, **93**:1 (2005), 44–52
- [117] Blankenship M. R., Huckfeldt R., Steinmetz J. J., Steinmetz J. E., “The effects of amygdala lesions on hippocampal activity and classical eyeblink conditioning in rats”, *Brain Res.*, **1035**:2 (2005), 120–130
- [118] Weisz D. J., Harden D. G., Xiang Z., “Effects of amygdala lesions on reflex facilitation and conditioned response acquisition during nictitating membrane response conditioning in rabbit”, *Behav. Neurosci.*, **106**:2 (1992), 262–273
- [119] Lee T., Kim J., “Differential effects of cerebellar, amygdalar, and hippocampal lesions on classical eyeblink conditioning in rats”, *J. Neurosci.*, **24**:13 (2004), 3242–3250
- [120] Grishaev A.V., Sazonov V.F., “The role of active and passive properties of dendritic tree in multidimensional postsynaptic potentials integration”, *Usp. fiziol. nauk.*, **51**:3 (2020), 87–104 (In Russian)
- [121] Sazonov V.F., Sazonov I.V., Grishaev A.V., “The concept of regimity in neuron work as a functional alternative to the structural plasticity

- in the computer simulation of interneuronal interactions”, *Journal Neurocomputers*, **22**:5 (2020), 43–53 (In Russian)
- [122] Grishaev A.V., Sazonov V.F., “Dendritic mechanisms of regulation of activity and plasticity of neocortical pyramidal neurons”, *Usp. fiziol. nauk.*, **49**:3 (2018), 104–118 (In Russian)
- [123] Friston K., Kiebel S., “Cortical circuits for perceptual inference”, *Neural Netw.*, **22**:8 (2009), 1093–1104
- [124] Clark, A., “Whatever next? Predictive brains, situated agents, and the future of cognitive science”, *Behav. Brain Sci.*, **36**:3 (2013), 181–204
- [125] Gładziejewski, P., “Predictive coding and representationalism”, *Synthese*, **193** (2016), 559–582
- [126] Hohwy, J., *The Predictive Mind*, Oxford University Press, New York, 2013, 288 c.
- [127] Hohwy, J., “The self-evidencing brain”, *Noûs*, **50**:2 (2014), 259–285
- [128] Kant I., *Prolegomena to any future metaphysics that can appear as a science. / / Kant I. Works in six volumes. V. 4, I. 1.*, M., 1965 (In Russian), 544 c.
- [129] Clark, A., *Predicting peace: the end of the representation wars. In: Metzinger T., Windt J. M. Frankfurt am Main: MIND Group*, MIND Group, Frankfurt am Main, 2015, 1–7 c.
- [130] Clark, A., “Busting out: predictive brains, embodied minds, and the puzzle of the evidentiary veil”, *Noûs*, **51**:4 (2016), 727–753
- [131] Bruineberg, J., Kiverstein, J., Rietveld, E., “The anticipating brain is not a scientist: the free-energy principle from an ecological-enactive perspective”, *Synthese*, **195**:6 (2018), 2417–2444
- [132] Lenin V.I., *Complete works: in 55 volumes / V. I. Lenin; Institute of Marxism-Leninism under the Central Committee of the CPSU - 5th ed. V. 18. Materialism and empirio-criticism.*, State Publ. House of Polit. lit., M., 1968 (In Russian), 7–384 c.
- [133] Yang X.-S., *Optimization Techniques and Applications with Examples*, John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey, 2018, 384 c.
- [134] Friston K., FitzGerald T., Rigoli F., Schwartenbeck P., Pezzulo G., “Active Inference: A Process Theory”, *Neural Comput.*, **29**:1 (2017), 1–49

Часть 2.
Специальные вопросы теории
интеллектуальных систем

Об оптимальном пропорционально справедливом распределении ресурсов в сотовых сетях 5G

Д. Г. Колосов¹ Л. С. Городецкий² Д. С. Миненков³

Рассматривается задача оптимального распределения ресурсов в сотовых сетях 5G в предположении полной загрузки (бесконечных потребностей пользователей). В отличие от сетей предыдущего поколения, в 5G пользователи могут делить между собой один и тот же частотный ресурс с небольшой потерей качества, что приводит к более сложной постановке задачи. В работе исследованы свойства пропорционально справедливого алгоритма распределения ресурсов, отвечающего задаче максимизации суммы логарифмов средних скоростей пользователей. На основе изученных свойств предложен вычислительно простой алгоритм, улучшающий рассматриваемый критерий качества по сравнению с другими известными алгоритмами. Сравнение алгоритмов проводилось с использованием реалистичных данных, сгенерированных с помощью библиотеки Sionna.

Ключевые слова: выпуклое математическое программирование, условия Каруша–Куна–Таккера, распределение радиоресурсов, планировщик, сотовые сети 5G, модель полной загрузки, пропорциональная справедливость, Sionna.

1. Введение

Multiple-Input/Multiple-Output (MIMO) — системы беспроводных коммуникаций с несколькими антеннами на передающей станции и несколь-

¹Колосов Дмитрий Григорьевич — студент каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ; младший инженер, Хуавэй, e-mail: kolosov.dmt@gmail.com.

Kolosov Dmitrii Grigorevich — student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems; junior engineer, Huawei Russian Research Institute.

²Городецкий Леонид Сергеевич — студент ф-та математики НИУ ВШЭ; ассистент инженер, Хуавэй, e-mail: ls.gorod.9@gmail.com.

Gorodetskii Leonid Sergeevich — student, Higher School of Economics, Faculty of Mathematics; assistant engineer, Huawei Russian Research Institute.

³Миненков Дмитрий Сергеевич — к.ф.-м.н., с.н.с., Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН; МГУ им. М.В. Ломоносова, мех.-мат. ф-т; e-mail: minenkov.ds@gmail.com.

Minenkov Dmitrii Sergeevich — PhD, senior researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics.

кими приемными антеннами у пользователей. MIMO — ключевая технология в пятом поколении (5G) мобильной связи. Она позволяет обслуживать несколько пользователей одновременно на одной частоте за счет технологии формирования луча (Beamforming) [1]. У пользователей (UE, User Equipment) может быть по 4 принимающих антенны (с учетом поляризации), а у базовой станции (BS, Base Station) 64 антенны. Сигнал для одного пользователя в этом случае представляется как четыре 64-мерных комплексных вектора. Чтобы избежать интерференции, сигналы, одновременно посылаемые разным пользователям, ортогонализуются по отношению к остальным пользователям, и из-за этого немного уменьшается мощность передаваемого сигнала для каждого конкретного пользователя. При этом некоторые пары пользователей в большей степени мешают друг другу, что сильно снижает качество связи при их одновременном обслуживании. Для решения этой проблемы используется процедура планировщика (Scheduler) — среди всех пользователей нужно выбрать подходящее подмножество для обслуживания. Этот выбор может быть сделан, например, в пользу наибольшей суммарной скорости передачи данных в конкретный момент времени (TTI, Transmission Time Interval) как на одной базовой станции [2, 3, 4, 5, 6], так и на нескольких [7, 8], что позволяет уменьшить межсотовую интерференцию. Большой обзор различных 5G планировщиков представлен в [9].

С другой стороны, важно, чтобы все пользователи были в той или иной степени обслужены за некоторый промежуток времени, что приводит нас к задаче справедливого распределения ресурсов. Один из подходов, связанный с минимизацией суммарного времени ожидания обслуживания, привел к появлению алгоритма SRPTF (Shortest Remaining Processing Time First)[10, 11] для 4G. Другой подход к вопросу справедливого распределения ресурсов — пропорциональная справедливость (PF, Proportional Fairness) [12, 13]. В сетях 4G эту задачу точно решает простой алгоритм градиентного PF-планировщика [14, 15], и при этом пользователи получают данные пропорционально качеству связи. Этот алгоритм был перенесен в сети 5G [5, 16], утратив теоретическое обоснование справедливости алгоритма. В текущей работе получены теоретические свойства PF в 5G MIMO, в том числе условие минимальной справедливости, гарантируемое PF алгоритмом. На основе этих свойств предложен простой алгоритм, решающий задачу пропорционально справедливого распределения ресурсов более успешно, чем хорошо известный алгоритм Baseline PF.

В этой работе мы рассматриваем нисходящую передачу данных от одной базовой станции (BS) с 64 антеннами к N пользовательским приемникам (UE) с 4 антеннами на каждом в модели полной загрузки (Full

Buffer) — когда пользователям всегда есть что получить от базовой станции.

Работа имеет следующую структуру. В пункте 2 даны основные определения, в том числе определение пропорциональной справедливости. В пункте 3 при изменяющихся во времени скоростях пользователей получен градиентный алгоритм, асимптотически решающий задачу пропорционально справедливого распределения ресурсов. В пункте 4 изучаются свойства предельного распределения ресурсов пропорционально справедливого алгоритма в предположении о постоянных во времени скоростях пользователей. В пункте 5 на основании полученных свойств предложен простой эвристический алгоритм и продемонстрирована его эффективность в численных симуляциях. В пункте 6 кратко перечислены основные результаты.

2. Постановка задачи и описание системы

Перед тем, как описывать математическую модель задачи распределения ресурсов в 5G, определим общее свойство пропорциональной справедливости [17].

Определение 1. Пусть $P \subset \mathbb{R}_{>0}^N$ — некоторое множество векторов $X = (X_1, X_2, \dots, X_N) \in P$. Тогда вектор $\hat{X} \in P$ называется пропорционально справедливым (*proportionally fair*) если для любого другого $X \in P$ его суммарный прирост относительно \hat{X} неположителен:

$$\sum_{n=1}^N \frac{X_n - \hat{X}_n}{\hat{X}_n} \leq 0$$

Также известно эквивалентное определение [17]:

Определение 2. Вектор $\hat{X} \in P$ называется пропорционально справедливым тогда и только тогда, когда

$$\hat{X} = \operatorname{argmax}_{X \in P} \sum_{n=1}^N \ln X_n$$

В контексте беспроводных систем нас интересует пропорциональная справедливость вектора X , состоящего из средних скоростей X_n пользователей. Точное определение X_n в этой работе будет даваться в зависимости от сделанных предположений в пунктах 3, 4 и 5. Исходя из определения 2, нам нужно максимизировать функцию

$$F(X) = \sum_{n=1}^N \ln X_n. \quad (2.1)$$

Теперь введем общие для всей работы обозначения. Множество всех пользователей обозначим через $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$. Множество $\mathcal{A} \subset 2^{\mathcal{N}}$ — набор всех групп пользователей, которых можно одновременно обслуживать на одном частотном ресурсном блоке (RB – Resource Block). Будем считать, что \mathcal{A} задается некоторым критерием совместимости пользователей (например, SUS – Semi-orthogonal User Selection [5]). Через $A = |\mathcal{A}|$ обозначим количество групп в \mathcal{A} .

Для каждой группы $\alpha \in \mathcal{A}$ и для каждого пользователя $n \in \mathcal{N}$ задана скорость R_n^α пользователя n при обслуживании его в группе α . Если пользователь n не содержится в группе α , то мы полагаем $R_n^\alpha = 0$. Кроме того, для каждого пользователя n есть однопользовательская (SU, Single User) группа $\{n\} \in \mathcal{A}$, скорость пользователя в которой мы называем его SU-скоростью и обозначаем через $R_n = R_n^{\{n\}}$. Мы будем считать, что скорости пользователей не зависят от выбора RB.

3. Дискретно-динамическая модель

В этом пункте рассмотрим следующую 5G систему. В каждый из моментов времени ТТІ $t = 0, \dots, T$ базовая станция должна принять решение об обслуживании некоторого набора пользователей. При этом скорости пользователей зависят от времени: $R_n^\alpha(t)$ — скорость пользователя $n \in \mathcal{N}$ в группе $\alpha \in \mathcal{A}$ в момент времени t .

Так как скорости пользователей одинаковы на всех частотных ресурсах RB, мы будем считать, что на каждом ТТІ все доступные RB выделяются одной группе пользователей. В таком случае без потери общности можно рассматривать модель с одним виртуальным RB у станции, который на каждом ТТІ выделяется одной из групп пользователей.

В качестве управления возьмем индикаторную функцию

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} 1, & \text{если группа } \alpha \text{ обслуживается на ТТІ } t, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Отметим, что $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} u_\alpha(t) = 1$ для любого $t = 0, \dots, T$.

Определим средние скорости X_n пользователей следующим образом. В начальный момент $t = 0$ мы полагаем $X_n(0) = R_n(0)$, после чего X_n изменяются по закону экспоненциального среднего

$$X_n(t+1) = (1 - \beta)X_n(t) + \beta \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} u_\alpha(t) R_n^\alpha(t), \quad (3.2)$$

где $0 < \beta \ll 1$ — некоторый коэффициент.

Определение (2) в этой модели перефразируется следующим образом:

Определение 3. *Пропорционально справедливый алгоритм — это алгоритм распределения ресурсов, который в каждый момент времени $t = 0, \dots, T$ максимизирует значение функции*

$$F(X(t+1)) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \ln(X_n(t+1)). \quad (3.3)$$

С той же самой целевой функцией $F(X) = \sum_n \ln(X_n)$ можно связать более простой алгоритм, который является приближением пропорционально справедливого алгоритма.

Определение 4. *Градиентный PF — это алгоритм распределения ресурсов, который на каждом ТТИ $t = 0, \dots, T$ обслуживает группу $\alpha(t) \in \mathcal{A}$ с максимальным значением суммы*

$$M_\alpha = \sum_{n \in \alpha} \frac{R_n^\alpha(t)}{X_n(t)}. \quad (3.4)$$

Величина M_α называется PF-метрикой группы α .

Теорема 1. *Зафиксируем некоторый ТТИ t и значения $\{X_n(t)\}$ и $\{R_n^\alpha(t)\}$. Предположим, что PF-метрики M_α для всех групп $\alpha \in \mathcal{A}$ различны (это условие выполнено почти всегда). Тогда для достаточно малого $\beta > 0$ градиентный PF на данном ТТИ будет обслуживать ту же группу, что и пропорционально справедливый алгоритм.*

Доказательство. Возьмем группу $\alpha \in \mathcal{A}$ и найдем прирост целевой функции $F(X)$ в следующий ТТИ при обслуживании этой группы. Так как обслуживается только группа α , то при $\beta \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(X(t+1)) - F(X(t)) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \ln X_n(t+1) - \sum_{n \in \mathcal{N}} \ln X_n(t) = \\ &= \sum_{n \in \mathcal{N}} \ln \left(\frac{X_n(t+1)}{X_n(t)} \right) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \ln \left(\frac{(1-\beta)X_n(t) + \beta R_n^\alpha(t)}{X_n(t)} \right) = \\ &= \sum_{n \in \mathcal{N}} \ln \left(1 + \left(\frac{R_n^\alpha(t)}{X_n(t)} - 1 \right) \beta \right) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \left(\frac{R_n^\alpha(t)}{X_n(t)} - 1 \right) \beta + o(\beta) = \\ &= \beta \sum_{n \in \alpha} \frac{R_n^\alpha(t)}{X_n(t)} - N\beta + o(\beta). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Таким образом, при достаточно малом β обслуживание группы $\alpha \in \mathcal{A}$ с наибольшим значением PF-метрики $\sum_{n \in \alpha} \frac{R_n^\alpha(t)}{X_n(t)}$ максимизирует прирост функции $F(X)$. \square

Для каждого пользователя $n \in \mathcal{N}$ определим его PF-метрику

$$M_n = M_{\{n\}} = \frac{R_n(t)}{X_n(t)}.$$

В системе 4G эта метрика дает точное решение задачи пропорционально справедливому распределению ресурсов между пользователями, которое имеет малую вычислительную сложность $O(N)$. В системе 5G нахождение группы с максимальной PF-метрикой может быть задачей экспоненциальной сложности по N . Для того чтобы найти вычислительно простой алгоритм, приближенно решающий эту задачу, мы изучим некоторые свойства пропорционально справедливого алгоритма. Для этого нам потребуется более простая модель.

4. Непрерывно-стационарная модель

С этого момента мы считаем, что скорости пользователей R_n^α постоянны во времени. Такая постановка задачи изучалась в работе [14], и в терминах этой работы градиентный PF является градиентным алгоритмом для утилиты $\sum \ln(X_n)$. Опишем асимптотическое поведение градиентного алгоритма.

Рассмотрим стандартный симплекс

$$\Delta = \left\{ \mu = (\mu_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \mid \mu_\alpha \geq 0 \text{ для всех } \alpha \in \mathcal{A} \text{ и } \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \mu_\alpha \leq 1 \right\}, \quad (4.1)$$

который назовем множеством допустимых распределений ресурсов, и рассмотрим выпуклый многогранник

$$P = \left\{ X = (X_1, \dots, X_N) \mid X_n = \sum_{\alpha \ni n} R_n^\alpha \mu_\alpha; \mu \in \Delta \right\}, \quad (4.2)$$

который назовем множеством векторов долговременных средних скоростей пользователей.

Замечание 1. Поясним, откуда происходят названия этих множеств. Для любого допустимого распределения ресурсов $\mu \in \Delta$ можно рассмотреть соответствующий вероятностный алгоритм распределения ресурсов (Weighted Round Robin): на каждом ТТІ обслуживаемая группа выбирается случайно с распределением μ , то есть вероятность обслуживания группы $\alpha \in \mathcal{A}$ равна μ_α . При таком алгоритме распределения ресурсов при $\beta \rightarrow 0$ и $t\beta \rightarrow \infty$ математическое ожидание вектора $X(t)$ средних скоростей пользователей стремится к вектору X с координатами

$$X_n = \sum_{\alpha \ni n} R_n^\alpha \mu_\alpha. \quad (4.3)$$

Значит многогранник P действительно можно рассматривать как множество возможных долговременных векторов X .

Применяя общий результат о сходимости градиентного алгоритма [14], получаем следующее утверждение.

Предложение 1. *При любом начальном значении $X(0)$ вектор $X(t)$, получаемый при обслуживании пользователей при помощи градиентного PF, при $\beta \rightarrow 0$ и $t\beta \rightarrow \infty$ стремится к вектору \hat{X} , который является решением оптимизационной задачи*

$$\begin{aligned} & \underset{X}{\text{maximize}} && F(X) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \ln(X_n) \\ & \text{subject to} && X \in P, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где P — это выпуклый многогранник из формулы (4.2).

Так как градиентный PF, совпадающий с пропорционально справедливым алгоритмом в пределе при $\beta \rightarrow 0$, асимптотически решает задачу оптимизации (4.4), то для исследования свойств пропорционально справедливого алгоритма распределения ресурсов мы будем изучать свойства решения задачи (4.4). Эту оптимизационную задачу мы будем называть непрерывно-стационарной моделью.

Если в задаче (4.4) ограничение $X \in P$ переписать в виде

$$X_n = \sum_{\alpha \ni n} R_n^\alpha \mu_\alpha, \quad \mu \in \Delta, \quad (4.5)$$

то получится переформулировка задачи в терминах допустимых распределений ресурсов μ :

$$\begin{aligned} & \underset{\mu}{\text{maximize}} && F(X(\mu)) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \ln \left(\sum_{\alpha \ni n} \mu_\alpha R_n^\alpha \right) \\ & \text{subject to} && \mu \in \Delta. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Пронумеруем каким-либо образом группы $\alpha \in \mathcal{A}$ и будем рассматривать наборы $\mu = (\mu_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ и $X = (X_n)_{n \in \mathcal{N}}$ как вектор-столбцы. Тогда скорости R_n^α пользователей в группах образуют матрицу $R \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(N, A)$: для группы $\alpha \in \mathcal{A}$ в соответствующем столбце R^α матрицы R стоят скорости пользователей в группе α . Тогда соотношения (4.5) примут вид

$$X = R\mu, \quad \mu \in \Delta. \quad (4.7)$$

Отсюда следует, что P — это выпуклая оболочка столбцов R^α матрицы R .

С использованием введенных обозначений задачу оптимизации (4.6) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \underset{\mu}{\text{maximize}} && F(X(\mu)) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \ln(X_n) \\ & \text{subject to} && X = R\mu; \mu \in \Delta. \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.1. Свойства задачи оптимизации

Отметим, что если $X_n = 0$ для некоторого n (при $\mu \in \Delta$), то функция $F(X(\mu))$ принимает значение $-\infty$, а потому тот факт, что $F(X(\mu))$ определена не на всём Δ , не влияет на свойства максимумов функции.

В силу выпуклости функции суммы логарифмов, выпуклости симплекса Δ и многогранника P , у задачи (4.4) существует глобальный максимум, и любой локальный максимум также является глобальным. При этом у задачи (4.4) максимум единственный, а у задачи (4.8) возможно существование целого множества глобальных максимумов. Кроме того, все максимумы (4.8) соответствуют единственному максимуму (4.4).

Замечание 2. Если предположить, что R — матрица общего вида с неотрицательными компонентами, то для всех $k = 0, \dots, N - 1$ любая k -мерная грань многогранника P является k -мерным симплексом. Отсюда несложно увидеть, что оптимальному вектору $\hat{X} \in P$ соответствует единственное распределение ресурсов $\mu \in \Delta$, такое что $\hat{X} = R\mu$. Следовательно, если матрица R общего вида, то максимум в задаче (4.8) единственный.

Следующая теорема показывает, что несмотря на то, что набор групп \mathcal{A} может состоять из 2^N групп, оптимума можно достичь, используя значительно меньшее число групп.

Теорема 2. *В непрерывно-стационарной модели существует пропорционально справедливое распределение ресурсов μ , такое что не более N переменных μ_α отличны от нуля.*

Доказательство. Пусть $\hat{X} \in P$ — оптимальный (пропорционально справедливый) вектор средних скоростей пользователей. Так как функция $F(X) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \ln(X_n)$ монотонна по каждой из переменных, \hat{X} лежит на границе P . Следовательно, \hat{X} лежит на одной из граней P меньшей размерности, а потому можно выбрать гиперплоскость $\Pi \subset \mathbb{R}^N$ так, чтобы она содержала точку \hat{X} , и пересекала P по грани размерности не более $N - 1$. Грань многогранника P , лежащую в гиперплоскости Π и содержащую \hat{X} , обозначим через P' .

Так как размерность гиперплоскости Π равна $N - 1$, то по теореме Каратеодори о выпуклой оболочке, найдется не более N вершин многогранника P' , таких что точка \hat{X} лежит в их выпуклой оболочке. Пусть

эти вершины соответствуют группам $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, где $k \leq N$, то есть координаты этих вершин являются столбцами $R^{\alpha_1}, \dots, R^{\alpha_k}$ матрицы R . Так как точка \hat{X} лежит в выпуклой оболочке этих вершин, то

$$\hat{X} = \sum_{i=1}^k \mu_{\alpha_i} R^{\alpha_i}$$

для некоторых коэффициентов $\mu_{\alpha_i} \geq 0$, таких что $\sum_{i=1}^k \mu_{\alpha_i} = 1$. Если положить все остальные μ_{α} равными нулю, то такое распределение ресурсов по группам будет допустимым, и соответствующий вектор средних скоростей пользователей будет в точности равен оптимальному вектору \hat{X} . \square

Отметим, что аналогичным образом из теоремы Каратеодори можно получить более сильное утверждение: существует оптимальное распределение ресурсов μ , такое что столбцы матрицы R , соответствующие ненулевым компонентам μ , линейно независимы.

4.2. Свойства пропорционально справедливого распределения

Так как оптимизационная задача (4.8) выпукла, то её можно решить при помощи условий Каруша–Куна–Таккера [18]. Запишем функцию Лагранжа для задачи с неотрицательными переменными μ :

$$\mathcal{L}(\mu, \lambda_0) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \ln \left(\sum_{\alpha \ni n} \mu_{\alpha} R_n^{\alpha} \right) + \lambda_0 \left(1 - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \mu_{\alpha} \right), \quad (4.9)$$

и с помощью неё из условий Каруша–Куна–Таккера получим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_{\alpha}} = \sum_{n \in \alpha} R_n^{\alpha} \frac{1}{X_n} - \lambda_0 = 0, \quad \text{если } \mu_{\alpha} > 0; \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_{\alpha}} = \sum_{n \in \alpha} R_n^{\alpha} \frac{1}{X_n} - \lambda_0 \leq 0, \quad \text{если } \mu_{\alpha} = 0. \quad (4.11)$$

Эти условия являются необходимыми и достаточными условиями максимума для допустимых μ .

Лемма 1. Из условий (4.10), (4.11) следует, что $\lambda_0 = N$.

Доказательство. Если $\hat{\mu}$ — точка глобального максимума, то через \mathcal{A}^+ обозначим множество групп $\alpha \in \mathcal{A}$, для которых $\mu_{\alpha} > 0$. Тогда с исполь-

зованием (4.10) можно записать

$$\begin{aligned}
 \lambda_0 &= \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}^+} \mu_\alpha \right) \cdot \lambda_0 = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}^+} \mu_\alpha \lambda_0 = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}^+} \mu_\alpha \sum_{n \in \alpha} \frac{R_n^\alpha}{X_n} = \\
 &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}^+} \sum_{n \in \alpha} \frac{\mu_\alpha R_n^\alpha}{X_n} = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\alpha \ni n} \frac{\mu_\alpha R_n^\alpha}{X_n} = \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{\sum_{\alpha \ni n} \mu_\alpha R_n^\alpha}{X_n} = \\
 &= \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{X_n}{X_n} = \sum_{n \in \mathcal{N}} 1 = N.
 \end{aligned}$$

□

Подставляя значение $\lambda_0 = N$ из леммы в (4.10), (4.11) получаем следующее.

Предложение 2. *Допустимое распределение ресурсов μ является решением оптимизационной задачи (4.8) тогда и только тогда, когда для каждой группы $\alpha \in \mathcal{A}$ выполнено условие*

$$\begin{cases} \sum_{n \in \alpha} R_n^\alpha \frac{1}{X_n} = N, & \text{если } \mu_\alpha > 0; \\ \sum_{n \in \alpha} R_n^\alpha \frac{1}{X_n} \leq N, & \text{если } \mu_\alpha = 0, \end{cases} \quad (4.12)$$

где $X = R\mu$.

По аналогии с пунктом 3 число

$$M_\alpha = \sum_{n \in \alpha} R_n^\alpha \frac{1}{X_n} \quad (4.13)$$

будем называть PF-метрикой группы $\alpha \in \mathcal{A}$. Тогда условие оптимальности (4.12) можно сформулировать так: каждая из обслуживаемых групп имеет PF-метрику равную N , а остальные группы имеют PF-метрику не больше N .

Так как оптимальный вектор \hat{X} единственный, то PF-метрики групп при оптимальном распределении ресурсов определяются однозначно. Будем называть группу $\alpha \in \mathcal{A}$ оптимальной, если её PF-метрика при оптимальном распределении равна N . Из условия (4.12) следует, что для неоптимальной группы $\alpha \in \mathcal{A}$ при любом оптимальном распределении ресурсов μ выполнено $\mu_\alpha = 0$.

Так как неоптимальные группы не получают ресурсов при оптимальном распределении, то временно не будем их рассматривать и предположим, что каждая группа $\alpha \in \mathcal{A}$ имеет PF-метрику равную N . Получаем

систему уравнений на переменные $\mu = (\mu_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ и $X = (X_n)_{n \in \mathcal{N}}$:

$$\begin{cases} \sum_{\alpha \ni n} R_n^\alpha \mu_\alpha = X_n \text{ для каждого } n \in \mathcal{N} \\ \sum_{n \in \alpha} R_n^\alpha \frac{1}{X_n} = N \text{ для каждой } \alpha \in \mathcal{A}. \end{cases} \quad (4.14)$$

Если через $\frac{1}{X}$ обозначить вектор $(1/X_n)_{n \in \mathcal{N}}$, а через \mathbf{N} — вектор-столбец размера A , все координаты которого равны N , то систему (4.14) можно переписать в матричном виде:

$$\begin{cases} R\mu = X \\ R^T \frac{1}{X} = \mathbf{N}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Используя матричную запись, можно найти решение задачи пропорционального распределения ресурсов в частном случае.

Предложение 3. *Если число оптимальных групп A равно числу пользователей N , а матрица R обратима, тогда оптимальное распределение ресурсов μ можно выразить явно, последовательно решая две системы линейных уравнений по следующим формулам:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} &= (R^T)^{-1} \mathbf{N}, \\ \mu &= R^{-1} X. \end{aligned}$$

Перейдем к изучению других свойств оптимального распределения ресурсов. Определим относительные ресурсы пользователей

$$\nu_n = \frac{X_n}{R_n}, \quad (4.16)$$

где $R_n = R_n^{\{n\}}$ — SU-скорости пользователей. Следующая теорема даёт некоторое условие справедливости, которому удовлетворяет алгоритм PF.

Теорема 3. *При оптимальном распределении ресурсов μ для каждого пользователя $n \in \mathcal{N}$ выполнено условие минимальной справедливости*

$$\nu_n \geq \frac{1}{N}.$$

Доказательство. Для каждого пользователя $n \in \mathcal{N}$ рассмотрим SU-группу $\{n\} \in \mathcal{A}$. Согласно предложению 2, её PF-метрика при оптимальном распределении ресурсов не превосходит N , то есть

$$M_{\{n\}} = \frac{R_n}{X_n} \leq N,$$

откуда сразу следует

$$\nu_n = \frac{X_n}{R_n} \geq \frac{1}{N}.$$

□

4.3. Свойства решения в случае нескольких компонент

Дополнительное свойство пропорциональной справедливости получается, если пользователей можно разбить на несколько компонент $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_K$, то есть $\mathcal{N} = \bigsqcup_{k=1}^K \mathcal{N}_k$, причем каждая группа $\alpha \in \mathcal{A}$ целиком содержится в одной из компонент \mathcal{N}_k . Множество групп, содержащихся в компоненте \mathcal{N}_k обозначим через \mathcal{A}_k , а общее количество ресурсов k -ой компоненты обозначим через $\eta_k = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_k} \mu_\alpha$. Понятно, что

$$\sum_{k=1}^K \eta_k = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \mu_\alpha \leq 1. \quad (4.17)$$

Число пользователей в компоненте \mathcal{N}_k обозначим через N_k . В этой ситуации при подходящей нумерации групп матрица R будет иметь блочный вид.

Следующая теорема показывает, как должны распределяться ресурсы между компонентами.

Теорема 4. *Если в непрерывно-стационарной модели пользователи разбиты на компоненты $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_K$, то при оптимальном (пропорционально справедливом) распределении ресурсов выполняется*

$$\eta_k = \frac{N_k}{N} \quad (4.18)$$

для каждой компоненты $k = 1, \dots, K$. Иными словами, ресурсы распределяются между компонентами пропорционально их размеру.

Доказательство. Введем относительное количество ресурсов γ_α^k группы $\alpha \in \mathcal{A}$ в компоненте \mathcal{N}_k :

$$\gamma_\alpha^k = \begin{cases} \mu_\alpha / \eta_k, & \text{если } \alpha \in \mathcal{A}_k; \\ 0 & \text{, иначе,} \end{cases}$$

где η_k — ресурсы компоненты \mathcal{N}_k . Тогда

$$\begin{aligned}
F(X) &= \sum_{n \in \mathcal{N}} \ln(X_n) = \sum_{k=1}^K \sum_{n \in \mathcal{N}_k} \ln(X_n) = \sum_{k=1}^K \sum_{n \in \mathcal{N}_k} \ln \left(\sum_{\alpha \ni n} R_n^\alpha \eta_k \gamma_\alpha^k \right) = \\
&= \sum_{k=1}^K \sum_{n \in \mathcal{N}_k} \left(\ln \eta_k + \ln \left(\sum_{\alpha \ni n} R_n^\alpha \gamma_\alpha^k \right) \right) = \\
&= \sum_{k=1}^K N_k \ln \eta_k + \sum_{k=1}^K \sum_{n \in \mathcal{N}_k} \ln \left(\sum_{\alpha \ni n} R_n^\alpha \gamma_\alpha^k \right).
\end{aligned}$$

Так как переменные γ_α^k можно считать независимыми от η_k , то исходная задача оптимизации разбивается на независимые подзадачи — задачу распределения ресурсов по компонентам

$$\begin{aligned}
&\underset{\eta}{\text{maximize}} && F_0(\eta) = \sum_{k=1}^K N_k \ln \eta_k \\
&\text{subject to} && \sum_{k=1}^K \eta_k \leq 1; \eta_k \geq 0 \quad \forall k;
\end{aligned} \tag{4.19}$$

и K независимых задач по распределению ресурсов внутри каждой компоненты:

$$\begin{aligned}
&\underset{\gamma^k}{\text{maximize}} && F_k(\gamma^k) = \sum_{n \in \mathcal{N}_k} \ln \left(\sum_{\alpha \ni n} R_n^\alpha \gamma_\alpha^k \right) \\
&\text{subject to} && \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_k} \gamma_\alpha^k = 1; \gamma_\alpha^k \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}_k.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Выпишем функцию Лагранжа для задачи (4.19):

$$\mathcal{L}(\eta, \lambda_0) = \sum_{k=1}^K N_k \ln \eta_k + \lambda_0 \left(1 - \sum_{k=1}^K \eta_k \right), \tag{4.21}$$

и из условий Каруша–Куна–Таккера получим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} = \frac{N_k}{\eta_k} - \lambda_0 = 0 \tag{4.22}$$

для всех $k = 1, \dots, K$. Далее

$$\lambda_0 = 1 \cdot \lambda_0 = \left(\sum_{k=1}^K \eta_k \right) \lambda_0 = \sum_{k=1}^K \eta_k \lambda_0 = \sum_{k=1}^K N_k = N,$$

откуда

$$\eta_k = \frac{N_k}{\lambda_0} = \frac{N_k}{N}.$$

□

У доказанной теоремы 4 есть важный частный случай. Предположим, что есть пользователь $n \in \mathcal{N}$, который может обслуживаться только в SU-группе $\{n\} \in \mathcal{A}$ (такой пользователь называется SU-пользователем). Применяя теорему 4 к компоненте, состоящей из одного пользователя n , мы получаем, что при оптимальном распределении ресурсов у этого SU-пользователя

$$\nu_n = \frac{1}{N}. \quad (4.23)$$

5. Численное исследование

В этом пункте будут предложены эвристические алгоритмы, основанные на наших теоретических результатах. Затем мы их проверим в тестовой среде, имитирующей 5G MIMO систему.

5.1. Описание тестовой среды

Тестовый симулятор написан на языке Python для модели Full Buffer с использованием библиотек NumPy — включает в себя различные математические операции и поддержку многомерных массивов, и Sionna (NVIDIA) [19] — продвинутой библиотеки для симуляций телекоммуникационных систем. Этапы работы симулятора следующие:

- 1) Задаются параметры системы: коэффициент усреднения $\beta = 0.01$, количество ТТИ $T = 1500$, количество пользователей $N = 30$, начальное значение вектора средних скоростей пользователей $X(0) = (R_1(0), \dots, R_N(0))$.
- 2) Канал связи между отправляющей антенной и принимающей будем описывать через комплексные числа, показывающие изменение фазы и затухание амплитуды электромагнитной волны при передаче. В 5G MIMO (Multiple-Input/Multiple-Output) системе у базовой станции 64 антенны, а у пользователей по 4 антенны. Следовательно, канал пользователя $n \in \mathcal{N}$ описывается комплексной матрицей $H_n(t)$ размера 4×64 — для каждой принимающей антенны и каждой отправляющей антенны соответствующий элемент матрицы называется канальным числом. Каналы генерируются при помощи библиотеки Sionna в модели городской среды и изменяются со временем согласно случайному гауссовскому блужданию: $H_n(t+1) = H_n(t) + H_n(t) \cdot \mathcal{N}(0, 0.03)$, где $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ — нормальная случайная величина. Значения ОСШ (Отношение Сигнал-Шум) каналов лежат в диапазоне 0dB – 25dB (точное определение ОСШ пользователя будет дано далее). При этом, увеличивая общую пропускную способность системы, будем передавать только по $L = 2$

(эффективных) потоков данных каждому пользователю одновременно, всё еще задействуя все его антенны [20]. Ограничение на количество одновременно обслуживаемых пользователей $|\alpha| \leq 8$.

- 3) На каждом ТТИ $t = 0, \dots, T$ симулятор делает следующее. Используя текущий вектор средних скоростей пользователей $X(t)$ и текущие каналы пользователей, планировщик выбирает группу пользователей $\alpha(t) \subset \mathcal{N}$. Далее для выбранной группы $\alpha(t)$ происходит ММО симуляция передачи данных при помощи RZF (Regularized Zero-Forcing) предварительного кодирования и MMSE-IRC (Minimum Mean Squared Error - Interference Rejection Combiner) распознавания [20], находятся фактические значения $R_n^\alpha(t)$ скоростей пользователей при обслуживании в $\alpha(t)$ и с их помощью обновляется вектор X средних скоростей пользователей:

$$X_n(t+1) = (1 - \beta)X_n(t) + \beta R_n^{\alpha(t)}(t). \quad (5.1)$$

Также обновляется вектор общих объемов переданных данных

$$\text{ТН}_n(t+1) = \text{ТН}_n(t) + R_n^{\alpha(t)}(t), \quad (5.2)$$

который в начальный момент $t = 0$ полагается равным нулю.

- 4) По окончании работы симулятор считает следующие показатели:

- $\text{gMean}(X) = \left(\prod_{n=1}^N X_n \right)^{1/N} = \exp\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln(X_n)\right)$,
- $\text{sum}(\text{ТН}) = \sum_{n=1}^N \text{ТН}_n$ — суммарный объём переданных данных.

5.2. Алгоритмы

Все рассматриваемые нами алгоритмы используют следующую конструкцию, упрощающую задачу. Для пользователя n через v_n^1, \dots, v_n^L обозначим первые L сингулярных векторов [21] его матрицы канала H_n . Определим корреляцию пользователей n и k формулой

$$c_{n,k} = |\langle v_n^1, v_k^1 \rangle|. \quad (5.3)$$

Пользователи n и k называются скоррелированными, если их корреляция $c_{n,k}$ больше порогового значения $c_{th} = 0,3$. Для пользователя n определим его отношение сигнал-шум при обслуживании в одиночку (SU) как SINR_n^{su} (Signal to Interference and Noise Ratio):

$$\text{SINR}_n^{su} = \frac{1}{L\sigma^2} \left(\prod_{l=1}^L s_n^l \right)^{2/L}, \quad (5.4)$$

где s_n^1, \dots, s_n^L — первые L сингулярных значений матрицы H_n . Кроме того, если у пользователя n SINR_n^{su} меньше порогового значения $\text{SINR}_{th} = 5\text{dB}$, то он называется SU-пользователем. Остальные пользователи называются MU-пользователями.

Рассмотрим неориентированный граф G , вершины которого — пользователи, и две вершины соединены ребром, если они оба являются MU-пользователями и не скоррелированы. Клика (или полный подграф) в графе — это набор вершин, любые две из которых соединены ребром. Каждый из рассматриваемых алгоритмов может обслуживать нескольких пользователей в одной группе, только если они образуют клику в графе G .

Алгоритм перебора клик

Сначала опишем работу алгоритма перебора клик в графе, близкого к оптимальному при малых значениях β . На каждом ТТІ надо

- 1) Для каждой клики C в графе G вычислить её приближенную PF-метрику

$$M_C^{appr} = \sum_{n \in C} \frac{R_n^C}{X_n}, \quad (5.5)$$

где скорость R_n^C пользователя n в клике C оценивается по формуле

$$R_n^C = L \cdot \log_2 \left(1 + \frac{\text{SINR}_n^{su}}{|C|} \right), \quad (5.6)$$

которая выражает максимальную пропускную способность канала [22] при распределении всей мощности базовой станции между $|C|$ пользователями [20]

- 2) На данном ТТІ обслужить клику с максимальной приближенной PF-метрикой.

Формула (5.6) — это приближение скорости пользователя n при обслуживании в клике C , использующее, что пользователи в клике слабо коррелируют друг с другом. Действительно, если пренебречь корреляцией пользователей в клике и считать, что мощность делится между пользователями в группе поровну, то формула (5.6) — это верхняя оценка скорости пользователя в группе, полученная по теореме Шеннона. Таким образом, согласно предложению 1, этот алгоритм будет близок к оптимуму при малых β . Так как количество клик в графе может быть очень большим, данный алгоритм неприменим на практике.

Во всех следующих алгоритмах мы будем использовать приближенные значения SU-скоростей пользователей R_n , которые можно найти по формуле Шеннона [22]

$$R_n = L \cdot \log_2(1 + \text{SINR}_n^{\text{su}}). \quad (5.7)$$

Поиск клики по метрике пользователей

Далее мы будем изучать класс алгоритмов, использующих поиск клики по метрике пользователей. Для удобного описания алгоритмов введем следующее обозначение. Пусть в множестве \mathcal{N} всех пользователей задано некоторое подмножество \mathcal{N}' , а также задана некоторая функция $m: \mathcal{N}' \rightarrow \mathbb{R}$, называемая метрикой пользователей. Определим $C(\mathcal{N}', m)$ как клику в графе, лежащую в \mathcal{N}' , которая набирается по следующему алгоритму:

- 1) Отсортировать пользователей из \mathcal{N}' по убыванию метрик $m(n)$: далее мы считаем, что

$$m(n_1) \geq m(n_2) \geq \dots \geq m(n_{N'}),$$

где N' — число пользователей в \mathcal{N}' , а $n_1, \dots, n_{N'}$ — индексы пользователей из \mathcal{N}' .

- 2) Инициализировать клику C как пустое множество.
- 3) Пройти по набору пользователей $n_1, \dots, n_{N'}$, последовательно добавляя пользователей в клику C по следующему правилу: если пользователь n_i соединен ребрами с каждым из пользователей, которые к данному моменту находятся в клике C , то он добавляется в неё; в противном случае пользователь пропускается. Кроме того, если клика C в какой-то момент стала максимального допустимого размера, то набор пользователей в неё прекращается.

Baseline PF

Референсный алгоритм PF-ZFBF [5], который мы будем называть Baseline PF, устроен следующим образом. На каждом ТТГ он набирает клику $C(\mathcal{N}, \text{PF})$ из множества всех пользователей при помощи PF-метрики

$$M_n = \frac{R_n}{X_n}, \quad (5.8)$$

где R_n — это SU-скорость пользователя n , и обслуживает эту клику. Далее мы увидим, что одна из проблем Baseline PF в том, что он слишком много ресурсов выделяет SU-пользователям.

Компонентный PF

Разделим множество \mathcal{N} всех пользователей на 2 компоненты в смысле теоремы 4: на компоненту \mathcal{N}^{MU} из всех MU-пользователей и на компоненту \mathcal{N}^{SU} из всех SU-пользователей. На каждом ТТІ при помощи PF-метрики (5.8) наберем клики $C(\mathcal{N}^{MU}, PF)$ и $C(\mathcal{N}^{SU}, PF)$ в этих компонентах. В компоненте \mathcal{N}^{SU} клика — это один пользователь с наибольшей PF-метрикой. Далее выберем для обслуживания ту клику из двух найденных, у которой приближенная PF-метрика группы M_C^{appr} наибольшая.

В симуляции мы увидим, что этот алгоритм решает задачу распределения ресурсов между SU-пользователями и MU-пользователями более успешно, чем Baseline PF.

5.3. Результаты симуляции

Результаты симуляции работы трёх описанных алгоритмов на 250 сценариях представлены на рис.1. Для обоих показателей эффективности работы алгоритмов представлен график функции распределения прироста ($gain = (x/x_0 - 1) \cdot 100\%$) значения показателя относительно Baseline PF. По осям абсцисс отображены приросты в процентах показателей относительно Baseline PF, а по осям ординат — проценты от общего числа сценариев.

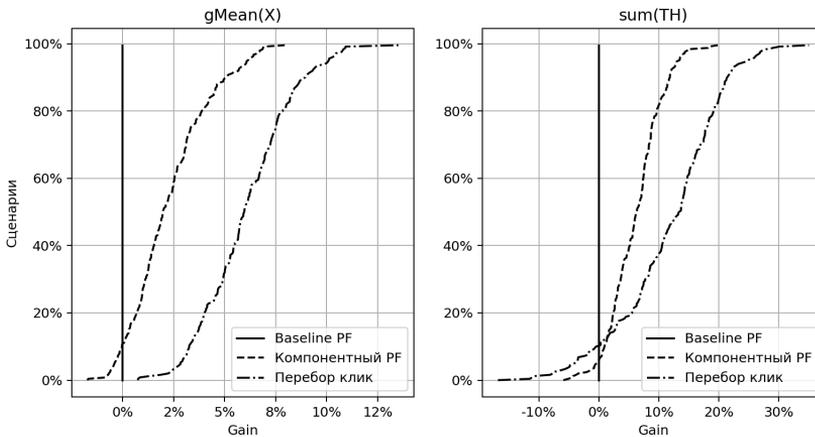


Рис. 1. Графики функций распределения прироста по сценариям относительно Baseline PF значений показателей $gMean(X)$ и $sum(TH)$.

Для углубленного анализа алгоритмов каждому пользователю сопоставим показатель

$$\nu_n = \frac{\text{ГН}_n}{\sum_{t=1}^T R_n(t)}, \quad (5.9)$$

отражающий отношение объема переданных пользователю данных к максимально возможному объему данных, который можно было бы передать пользователю за время симуляции. Отметим, что этот показатель согласуется с аналогичным показателем $\nu_n = X_n/R_n$ в непрерывно-стационарной модели. Теорема 3 показывает, что оптимальное распределение ресурсов в пределе должно удовлетворять условию минимальной справедливости

$$\nu_n \geq \frac{1}{N} \approx 0,033. \quad (5.10)$$

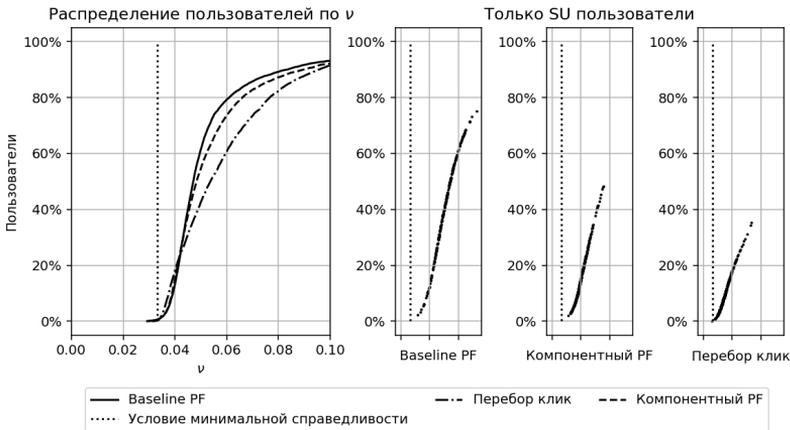


Рис. 2. На левом графике распределение ν_n по всем пользователям во всех сценариях в сравнении с условием минимальной справедливости. На трех правых графике точками выделены SU-пользователи (более 95% времени имели $\text{SINR}_n^{su} < 5\text{dB}$).

Отметим основные особенности этих графиков.

- 1) Алгоритм перебора клик в графе действительно лучше остальных алгоритмов максимизирует полезность $\text{gMean}(X)$.
- 2) Все три описанных алгоритма удовлетворяют минимальному условию справедливости (5.10).
- 3) Исходя из графиков на рис. 2 Baseline PF излишне часто обслуживает SU-пользователей.

- 4) Компонентный PF решает эту проблему, чаще обслуживая МУ-пользователей, за счет чего он имеет более высокие показатели $gMean(X)$ и $sum(TN)$ по сравнению с Baseline PF.

Таким образом, симуляции показывают, что компонентный PF по основным показателям превосходит Baseline PF, при этом обладая практически такой же вычислительной сложностью. Кроме того, продемонстрировано выполнение условия минимальной справедливости.

6. Заключение

В работе рассмотрена проблема распределения радио-ресурсов в модели полной загрузки для одной базовой станции и нескольких приемников. Из задачи максимизации суммы логарифмов средних скоростей пользователей получен градиентный алгоритм обслуживания для одного ресурсного блока, который в каждый момент времени обслуживает группу пользователей с наибольшей групповой PF-метрикой. При предельном переходе по времени и шагу усреднения получена непрерывно-стационарная модель. В этой модели получено несколько свойств оптимального распределения ресурсов, таких как: ограничение количества используемых групп, пропорциональная зависимость количества ресурсов от размера компонент пользователей, оценка снизу необходимого количества выделяемых каждому пользователю ресурсов. На основе полученных свойств предложен алгоритм распределения ресурсов (Компонентный PF), который улучшает основные показатели по сравнению с Baseline PF, не нарушая условие минимальной справедливости. Проведены 5G MIMO симуляции с каналами из библиотеки Sionna, результаты которых показывают эффективность предложенного алгоритма. Этот алгоритм по сложности практически не отличается от референсного, что позволяет легко внедрить предложенный алгоритм в MIMO системы.

Благодарности

Авторы признательны Д.А. Заеву, В.В. Кузнецову, А.М. Миронову, М.Ю. Попеленскому, Д.А. Шмелькину за ценные дискуссии и поддержку. Работа частично выполнена в рамках кооперационного проекта Техкомпании Хуавей и МГУ, частично – в рамках государственного задания ИПМех РАН (№ госрегистрации 123021700044-0).

Список литературы

- [1] Yang, Hong and Marzetta, Thomas L., “Performance of Conjugate and Zero-Forcing Beamforming in Large-Scale Antenna Systems”, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, **31**:2 (2013), 172–179.
- [2] Chataut, Robin and Akl, Robert., “Channel Gain Based User Scheduling for 5G Massive MIMO Systems”, *2019 IEEE 16th International Conference on Smart Cities: Improving Quality of Life Using ICT & IoT and AI (HONET-ICT)*, 2019, 049–053.
- [3] Naeem, Muddasar and Bashir, Sajid and Ullah, Zaib and Syed, Aqeel A., “A near optimal scheduling algorithm for efficient radio resource management in multi-user MIMO systems”, *Wireless Personal Communications*, **106**:3 (2019), 1411–1427.
- [4] Xia, Xin and Fang, Shu and Wu, Gang and Li, Shaoqian, “Joint User Pairing and Precoding in MU-MIMO Broadcast Channel with Limited Feedback”, *IEEE Communications Letters*, **14**:11 (2010), 1032–1034.
- [5] Taesang Yoo and Goldsmith, A., “On the optimality of multiantenna broadcast scheduling using zero-forcing beamforming”, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, **24**:3 (2006), 528–541.
- [6] Huang, Xiaoyan and Xue, Guoliang and Yu, Ruozhou and Leng, Supeng, “Joint Scheduling and Beamforming Coordination in Cloud Radio Access Networks With QoS Guarantees”, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, **65**:7 (2016), 5449–5460.
- [7] Tang, Xiaojun and Ramprasad, Sean A. and Papadopoulos, Haralabos, “Multi-Cell User-Scheduling and Random Beamforming Strategies for Downlink Wireless Communications”, *2009 IEEE 70th Vehicular Technology Conference Fall*, 2009, 1–5.
- [8] Li, Min and Collings, Iain B. and Hanly, Stephen V. and Liu, Chunshan and Whiting, Philip, “Multicell Coordinated Scheduling With Multiuser Zero-Forcing Beamforming”, *IEEE Transactions on Wireless Communications*, **15**:2 (2016), 827–842.
- [9] Mamane, Asmae and Fattah, Mohammed and Ghazi, Mohammed El and Bekkali, Moulhime El and Balboul, Younes and Mazer, Said, “Scheduling Algorithms for 5G Networks and Beyond: Classification and Survey”, *IEEE Access*, **10** (2022), 51643–51661.
- [10] Linus Schrage, “Letter to the Editor—A Proof of the Optimality of the Shortest Remaining Processing Time Discipline”, *Operations Research*, **16**:3 (1968), 687–690.

- [11] Samuli Aalto and Aleksi Penttinen and Pasi Lassila and Prajwal Osti, “Optimal size-based opportunistic scheduler for wireless systems”, *QUEUEING SYSTEMS*, **72**:1–2 (2012), 5–30.
- [12] Kelly, Frank P, “Charging and rate control for elastic traffic”, *European transactions on Telecommunications*, **8**:1 (1997), 33–37.
- [13] Kelly, Frank P and Maulloo, Aman K and Tan, David Kim Hong, “Rate control for communication networks: shadow prices, proportional fairness and stability”, *Journal of the Operational Research society*, **49**:3 (1998), 237–252.
- [14] Alexander L. Stolyar, “On the Asymptotic Optimality of the Gradient Scheduling Algorithm for Multiuser Throughput Allocation”, *Operations Research*, **53**:1 (2005), 12–25.
- [15] Sun, Zhishui and Yin, Changchuan and Yue, Guangxin, “Reduced-Complexity Proportional Fair Scheduling for OFDMA Systems”, *2006 International Conference on Communications, Circuits and Systems*, **2** (2006), 1221–1225.
- [16] Femenias, Guillem and Riera-Palou, Felip and Mestre, Xavier and Olmos, Juan J., “Downlink Scheduling and Resource Allocation for 5G MIMO-Multicarrier: OFDM vs FBMC/OQAM”, *IEEE Access*, **5** (2017), 13770–13786.
- [17] Le Boudec, Jean-Yves, “Rate adaptation, Congestion Control and Fairness: A Tutorial”, 2002.
- [18] Миронов Андрей Михайлович, “Машинное обучение. Часть 1”, <https://is.ifmo.ru/verification/machine-learning-mironov.pdf>.
- [19] Jakob Hoydis and Sebastian Cammerer and Fayçal Ait Aoudia and Avinash Vem and Nikolaus Binder and Guillermo Marcus and Alexander Keller, “Sionna: An Open-Source Library for Next-Generation Physical Layer Research”, 2023, arXiv: <https://arxiv.org/abs/2203.11854>.
- [20] Evgeny Bobrov and Boris Chinyaev and Viktor Kuznetsov and Dmitrii Minenkov and Daniil Yudakov, “Power Allocation Algorithms for Massive MIMO Systems with Multi-Antenna Users”, 2022, arXiv: <https://arxiv.org/abs/2201.08068>.
- [21] Роджер Хорн и Чарльз Джонсон, *Матричный анализ*, **656**, Мир, 1989.
- [22] Shannon, Claude E, “A mathematical theory of communication”, *The Bell system technical journal*, **27**:3 (1948), 379–423.

On the Optimal Proportional Fair Radio Resource Management in 5G Cellular Networks

Kolosov D.G., Gorodetskii L.S., Minenkov D.S.

We consider the problem of the optimal radio resource management in MU-MIMO 5G cellular networks in Full Buffer traffic model. Unlike in the networks of the previous generation, in 5G users can share the same frequency resource with a small loss of quality, which leads to a more complicated problem statement. We study properties of the proportionally fair scheduler that meets the problem of maximizing the sum of logarithms of users' average rates. We propose a computationally simple algorithm based on the studied properties that improves the proportional fairness in comparison with other well-known algorithms. The algorithms were compared using realistic data generated by the Sionna library.

Keywords: convex optimization, Karush–Kuhn–Tucker conditions, radio resource management, scheduler, 5G cellular networks, MU-MIMO, full buffer, proportional fairness, Sionna.

References

- [1] Yang, Hong and Marzetta, Thomas L., “Performance of Conjugate and Zero-Forcing Beamforming in Large-Scale Antenna Systems”, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, **31**:2 (2013), 172–179.
- [2] Chataut, Robin and Akl, Robert., “Channel Gain Based User Scheduling for 5G Massive MIMO Systems”, *2019 IEEE 16th International Conference on Smart Cities: Improving Quality of Life Using ICT & IoT and AI (HONET-ICT)*, 2019, 049–053.
- [3] Naeem, Muddasar and Bashir, Sajid and Ullah, Zaib and Syed, Aqeel A., “A near optimal scheduling algorithm for efficient radio resource management in multi-user MIMO systems”, *Wireless Personal Communications*, **106**:3 (2019), 1411–1427.
- [4] Xia, Xin and Fang, Shu and Wu, Gang and Li, Shaoqian, “Joint User Pairing and Precoding in MU-MIMO Broadcast Channel with Limited Feedback”, *IEEE Communications Letters*, **14**:11 (2010), 1032–1034.
- [5] Taesang Yoo and Goldsmith, A., “On the optimality of multiantenna broadcast scheduling using zero-forcing beamforming”, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, **24**:3 (2006), 528–541.
- [6] Huang, Xiaoyan and Xue, Guoliang and Yu, Ruozhou and Leng, Supeng, “Joint Scheduling and Beamforming Coordination in Cloud

- Radio Access Networks With QoS Guarantees”, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, **65**:7 (2016), 5449–5460.
- [7] Tang, Xiaojun and Ramprashad, Sean A. and Papadopoulos, Haralabos, “Multi-Cell User-Scheduling and Random Beamforming Strategies for Downlink Wireless Communications”, *2009 IEEE 70th Vehicular Technology Conference Fall*, 2009, 1–5.
- [8] Li, Min and Collings, Iain B. and Hanly, Stephen V. and Liu, Chunshan and Whiting, Philip, “Multicell Coordinated Scheduling With Multiuser Zero-Forcing Beamforming”, *IEEE Transactions on Wireless Communications*, **15**:2 (2016), 827–842.
- [9] Mamane, Asmae and Fattah, Mohammed and Ghazi, Mohammed El and Bekkali, Moulhime El and Balboul, Younes and Mazer, Said, “Scheduling Algorithms for 5G Networks and Beyond: Classification and Survey”, *IEEE Access*, **10** (2022), 51643–51661.
- [10] Linus Schrage, “Letter to the Editor—A Proof of the Optimality of the Shortest Remaining Processing Time Discipline”, *Operations Research*, **16**:3 (1968), 687–690.
- [11] Samuli Aalto and Aleksi Penttinen and Pasi Lassila and Prajwal Osti, “Optimal size-based opportunistic scheduler for wireless systems”, *QUEUEING SYSTEMS*, **72**:1–2 (2012), 5–30.
- [12] Kelly, Frank P, “Charging and rate control for elastic traffic”, *European transactions on Telecommunications*, **8**:1 (1997), 33–37.
- [13] Kelly, Frank P and Maulloo, Aman K and Tan, David Kim Hong, “Rate control for communication networks: shadow prices, proportional fairness and stability”, *Journal of the Operational Research society*, **49**:3 (1998), 237–252.
- [14] Alexander L. Stolyar, “On the Asymptotic Optimality of the Gradient Scheduling Algorithm for Multiuser Throughput Allocation”, *Operations Research*, **53**:1 (2005), 12–25.
- [15] Sun, Zhishui and Yin, Changchuan and Yue, Guangxin, “Reduced-Complexity Proportional Fair Scheduling for OFDMA Systems”, *2006 International Conference on Communications, Circuits and Systems*, **2** (2006), 1221–1225.
- [16] Femenias, Guillem and Riera-Palou, Felip and Mestre, Xavier and Olmos, Juan J., “Downlink Scheduling and Resource Allocation for 5G MIMO-Multicarrier: OFDM vs FBMC/OQAM”, *IEEE Access*, **5** (2017), 13770–13786.

- [17] Le Boudec, Jean-Yves, “Rate adaptation, Congestion Control and Fairness: A Tutorial”, 2002.
- [18] Mironov A.M., “Machine learning. Part 1” (In Russian), <https://is.ifmo.ru/verification/machine-learning-mironov.pdf>.
- [19] Jakob Hoydis and Sebastian Cammerer and Fayçal Ait Aoudia and Avinash Vem and Nikolaus Binder and Guillermo Marcus and Alexander Keller, “Sionna: An Open-Source Library for Next-Generation Physical Layer Research”, 2023, arXiv: <https://arxiv.org/abs/2203.11854>.
- [20] Evgeny Bobrov and Boris Chinyaev and Viktor Kuznetsov and Dmitrii Minenkov and Daniil Yudakov, “Power Allocation Algorithms for Massive MIMO Systems with Multi-Antenna Users”, 2022, arXiv: <https://arxiv.org/abs/2201.08068>.
- [21] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, **656**, Mir, 1989 (In Russian).
- [22] Shannon, Claude E, “A mathematical theory of communication”, *The Bell system technical journal*, **27**:3 (1948), 379–423.

Часть 3.
Математические модели

О сложности преобразования пар слов относительно операций выпадения-вставки специального вида

П. С. Дергач¹ С. Р. Амирова¹

Данная статья посвящена поиску расстояния между парами слов в общем конечном алфавите под действием операции замены одной буквы в две (соседние) и вычислению соответствующей кратчайшей цепочки замен (в случае ее существования). Изначально задача ставилась в более общей формулировке для пары регулярных языков, но позднее постановка задачи была уточнена. При этом рассмотрены две возможности - с разрешением замены ранее отсутствовавших в исходном слове букв или с запретом таких операций. Данное направление актуально и может быть использовано, например, в теории помехоустойчивого кодирования. В частности, стоит упомянуть метрику Левенштейна, вдохновляющую на аналогичные исследования относительно нового вида операций буквенной замены.

Ключевые слова: распознавание текстов, расстояние Левенштейна, метрика, оптимальный алгоритм.

1. Введение

В области распознавания текстов многие классические приложения используют меры расстояния для определения сходства между данными. В частности, используются расстояние Хэмминга, которое подсчитывает различные позиции между двумя словами одинаковой длины, и расстояние Левенштейна [1] (расстояние редактирования), которое вычисляет количество операций, необходимых для преобразования одного слова в другое. Расстояние редактирования — это обычная метрика, используемая для расчета сходства между двумя последовательностями, которая включает операции вставки, удаления и замены символов [2]. По произвольной паре слов необходимо уметь эффективно находить расстояние

¹ *Дергач Пётр Сергеевич* — к.ф.-м.н., м.н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: dergachpes@gmail.com.

Dergach Peter Sergeevich — Ph.D., junior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

¹ *Амирова Сабина Ровшан гызы* — выпускник Филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в городе Баку, e-mail: sabina.mgu@mail.ru.

Amirova Sabina Rovshan — Graduate of the M. V. Lomonosov Moscow State University Branch in Baku.

между ними. Эта проблема возникает в нескольких областях, включая обработку естественного языка и вычислительную биологию.

В этой статье будет решаться такая же проблема, но для другого вида операций: замена одной буквы на две. Ставится **основная задача**: по произвольной паре слов найти эффективный алгоритм, проверяющий возможность преобразования слов друг в друга, рассчитывающий минимальное достаточное количество операций и дающий возможность эффективно восстановить соответствующую цепочку преобразований.

2. Основные определения и результаты

Определение 1. Алфавит A - некоторое конечное непустое множество символов.

Определение 2. Слово в алфавите A - конечная последовательность символов данного алфавита.

Определение 3. Множество всех слов данного алфавита обозначаем A^* .

Определение 4. Длиной $|\alpha|$ слова α назовем количество символов в этом слове.

Определение 5. Пусть $\alpha, \beta \in A^*$. Говорим, что слово α получается из слова β применением операции $*$, если найдется представление

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 a \alpha_2, \\ \beta &= \alpha_1 b_1 b_2 \alpha_2\end{aligned}$$

для некоторых $a, b_1, b_2 \in A, \alpha_1, \alpha_2 \in A^*$.

Определение 6. Пусть $\alpha, \beta \in A^*$. Если слово α можно превратить в слово β с помощью конечного применения операций $*$, то обозначаем это через $\alpha \xrightarrow{*} \beta$.

Определение 7. Пусть $\alpha, \beta \in A^*$. Если слово α можно превратить в слово β с помощью 1 применения операции $*$, то обозначаем это через $\alpha \xrightarrow{*1} \beta$.

Определение 8. Пусть $\alpha, \beta \in A^*$. Если слово α можно превратить в слово β с помощью конечного применения операций $*$, и при этом мы имеем возможность заменять только первоначальные буквы α , то обозначаем это через $\alpha \xrightarrow{**} \beta$ (это означает, что мы не можем заменять новые буквы еще раз).

Определение 9. Для произвольной пары слов $\alpha, \beta \in A^*$ обозначаем через $f_1(\alpha, \beta)$ минимальное количество операций $*$, которых достаточно, чтобы превратить α в β . Если это не возможно, то $f_1(\alpha, \beta) = \infty$.

Определение 10. Для произвольной пары слов $\alpha, \beta \in A^*$ обозначаем через $f_2(\alpha, \beta)$ минимальное количество операций $*$ с дополнительным ограничением на невозможность замены уже добавленных букв, которого достаточно, чтобы превратить α в β . Если это не возможно, то $f_2(\alpha, \beta) = \infty$.

Замечание 1. Введенные функции f_1, f_2 не являются метриками, поскольку они не удовлетворяют ни условию симметричности, ни неравенству треугольника.

Замечание 2. Не для каждой пары слов значения $f_1(\alpha, \beta), f_2(\alpha, \beta)$ конечны. Например,

$$f_1(00, 111) = f_2(00, 111) = \infty.$$

Замечание 3. Приведем пример пары слов, иллюстрирующих различие f_1, f_2 :

$$\begin{aligned} f_1(00, 11111) &= 3. \\ f_2(00, 11111) &= \infty. \end{aligned}$$

Определение 11. Алгоритм T.

Пусть есть 2 слова $\alpha, \beta \in A^*$:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 a_2 \dots a_n, \\ \beta &= b_1 b_2 \dots b_m. \end{aligned}$$

Пусть также известно, что длина α не превосходит длину β , то есть $n = |\alpha| \leq |\beta| = m$.

Проверяем на равенство первые буквы слов.

а. Если $a_1 = b_1$, то отбрасываем по первой букве из каждого слова:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 \hat{\alpha}, \\ \beta &= b_1 \hat{\beta}, \\ a_1 &= b_1. \end{aligned}$$

Если $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ не пусты, то запускаем алгоритм для новой пары $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$.

Иначе алгоритм заканчивает работу.

Если $\hat{\alpha}$ пусто, то алгоритм заканчивает работу со значением 1.

Если $\hat{\alpha}$ не пусто, а $\hat{\beta}$ пусто, то алгоритм заканчивает работу со значением 0.

б. Если $a_1 \neq b_1$ и $m \geq 2$, то отбрасываем 1 букву из первого слова и 2 буквы из второго слова:

$$\begin{aligned}\alpha &= a_1 \widehat{\alpha}, \\ \beta &= b_1 b_2 \widehat{\beta}.\end{aligned}$$

Если $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ не пусты, то запускаем алгоритм для новой пары $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$.

Иначе алгоритм заканчивает работу.

Если $\widehat{\alpha}$ пусто, то алгоритм заканчивает работу со значением 1.

Если $\widehat{\alpha}$ не пусто, а $\widehat{\beta}$ пусто, то алгоритм заканчивает работу со значением 0.

с. Если равенство $a_1 = b_1$ не выполняется и $m = 1$, алгоритм заканчивает работу со значением 0.

Определение 12. Если даны пара слов $\alpha, \beta \in A^*$, причем $|\alpha| \leq |\beta|$, и алгоритм T закончил работу со значением 1, то говорим, что α влезает в β , и обозначим это через $\alpha \xrightarrow{T} \beta$. Иначе говорим, что α не влезает в β .

Теорема 1. Существует линейный по времени выполнения алгоритм, эффективно вычисляющий по произвольной паре слов $\alpha, \beta \in A^*$ значения $f_1(\alpha, \beta), f_2(\alpha, \beta)$, и, в случае их конечности, находящий последовательность соответствующих преобразований $\alpha \xrightarrow{*} \beta, \alpha \xrightarrow{**} \beta$.

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. Пусть $\alpha, \beta \in A^*$, тогда:

- 1) Если $\alpha \xrightarrow{T} \beta$, то $\alpha \xrightarrow{T} a\beta$,
- 2) Если $a\alpha \xrightarrow{T} \beta$, то $\alpha \xrightarrow{T} \beta$.

Доказательство. Обозначим

$$\begin{aligned}\alpha &= a_1 \widehat{\alpha}, \\ \beta &= b_1 \widehat{\beta}.\end{aligned}$$

Если при этом $\widehat{\beta}$ не пусто, то обозначим $\widehat{\beta} = b_2 \widehat{\beta}$.

Сформулируем k -ое утверждение индукции – это утверждение леммы при ограничении $|\alpha| + |\beta| = k$. При $k = 2$ верно только первое свойство леммы (второе свойство в этом случае не выполнимо), при $k \geq 3$ оба свойства леммы верны.

База индукции: Проверим свойство 1 для случаев $k=2, 3$.

$k = 2$ и $|\alpha| + |\beta| = 2$. Значит $|\alpha| = |\beta| = 1$. То есть $\alpha = a_1$ и $\beta = b_1$.

Так как $\alpha \xrightarrow{T} \beta$, то $a_1 = b_1$.

Значит $a\beta = ab_1$ и получаем $a_1 \xrightarrow{T} ab_1$.

Пусть теперь $k = 3$ и $|\alpha| + |\beta| = 3$. Тогда, так как $\alpha \xrightarrow{T} \beta$, то длины $|\alpha| = 1, |\beta| = 2$. Тогда $\alpha = a_1, \beta = b_1b_2$. В этом случае $a_1 \xrightarrow{T} b_1b_2$. Тогда верно и $a_1 \xrightarrow{T} ab_1b_2$.

Проверим свойство 2. $k = 3$ и $|\alpha| + |\beta| = 3$. Тогда, так как $a\alpha \xrightarrow{T} \beta$, то $|\alpha| = 1, |\beta| = 2$. Тогда $\alpha = a_1, \beta = b_1b_2$. Знаем, что $aa_1 \xrightarrow{T} b_1b_2$. Это возможно только в том случае, если $a = b_1, a_1 = b_2$. Тогда, очевидно, $a_1 \xrightarrow{T} b_1b_2$.

Переход индукции: Предположим, что мы доказали утверждение индукции для пар слов α и β с суммарной длиной не выше k .

Докажем утверждение индукции для пар слов α и β суммарной длиной $k + 1$.

Докажем первую часть леммы:

Случай 1:

$$a_1 = b_1, a_1 \neq a.$$

Тогда в результате применения алгоритма Т для пары слов α, β произойдет замена $a_1 \xrightarrow{T} b_1$ и $\hat{\alpha} \xrightarrow{T} \hat{\beta}$.

Тогда для пары слов $\alpha, a\beta$ произойдет замена $a_1 \xrightarrow{T} ab_1$ и дальше уже факт, который знаем: $\hat{\alpha} \xrightarrow{T} \hat{\beta}$.

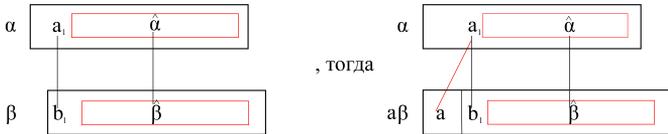


Рис. 1.

Замечание 4. Текст рассуждения здесь и далее не меняется в случае пустого $\hat{\alpha}$. Далее про это отдельно говорить не будет.

Случай 2:

$$a_1 = b_1 = a$$

Для слов α, β произойдет замена $a_1 \xrightarrow{T} b_1$, и мы знаем, что $\hat{\alpha} \xrightarrow{T} \hat{\beta}$.

Так как $|\hat{\alpha}| + |\hat{\beta}| \leq k$, то по предположению индукции $\hat{\alpha} \xrightarrow{T} b_1\hat{\beta}$. И для слов $\alpha, a\beta$ произойдет замена $a_1 \xrightarrow{T} a$:

Случай 3:

$$a_1 \neq b_1, a_1 = a.$$

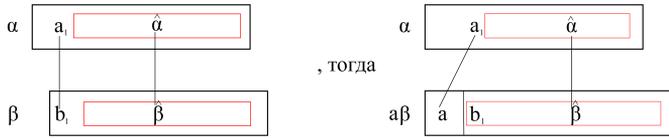


Рис. 2.

В слове β точно есть как минимум 2 символа b_1, b_2 , в силу условия $|\alpha| + |\beta| = k, k \geq 3$.

Тогда, по нашему алгоритму, для слов α, β мы знаем, что $a_1 \xrightarrow{T} b_1 b_2$ и $\hat{\alpha} \xrightarrow{T} \hat{\hat{\beta}}$.

Далее, для слов $\alpha, a\beta$ получаем $a_1 \xrightarrow{T} a$, и по предположению индукции 2 раза применяем первое свойство Леммы: $\hat{\alpha} \xrightarrow{T} b_1 b_2 \hat{\hat{\beta}}$.

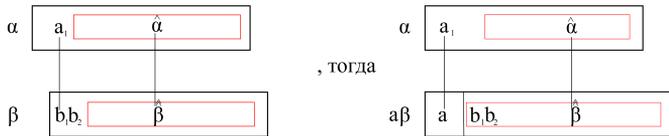


Рис. 3.

Случай 4:

$$a_1 \neq b_1, a_1 \neq a.$$

Тогда, по алгоритму для слов α, β , $a_1 \xrightarrow{T} b_1 b_2$, и $\hat{\alpha} \xrightarrow{T} \hat{\hat{\beta}}$.

Далее, для слов $\alpha, a\beta$ получаем $a_1 \xrightarrow{T} ab_1$ и, по предположению индукции для первого свойства Леммы верно, что $\hat{\alpha} \xrightarrow{T} b_2 \hat{\hat{\beta}}$.

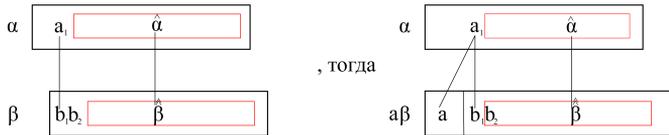


Рис. 4.

Теперь проверяем свойство 2.

Так как $a\alpha \xrightarrow{T} \beta$, то $m \geq 2$.

Случай 1:

$$a = b_1 = a_1$$

Для пары слов $a\alpha, \beta$ знаем, что $a \xrightarrow{T} b_1$, и, по алгоритму $a_1\hat{\alpha} \xrightarrow{T} \hat{\beta}$.

Тогда, по предположению индукции из второго свойства Леммы получаем $\hat{\alpha} \xrightarrow{T} \hat{\beta}$.

И, так как $a_1 \xrightarrow{T} b_1$ и $\hat{\alpha} \xrightarrow{T} \hat{\beta}$, то $\alpha \xrightarrow{T} \beta$.

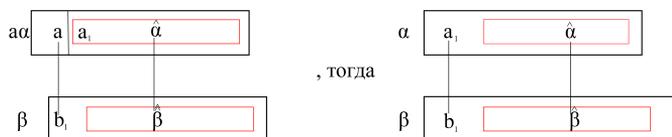


Рис. 5.

Случай 2:

$$a = b_1, a_1 \neq b_1.$$

Для пары слов $a\alpha, \beta$ знаем, что $a\alpha \xrightarrow{T} \beta$, и, по алгоритму $a \xrightarrow{T} b_1$ и $a_1\hat{\alpha} \xrightarrow{T} b_2\hat{\beta}$.

Для слов α, β заметим, что $a_1 \xrightarrow{T} b_1b_2$ и надо показать, что $\hat{\alpha} \xrightarrow{T} \hat{\beta}$.

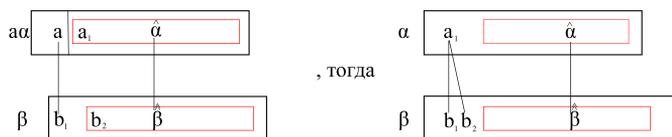


Рис. 6.

Разберем два подслучая:

Случай 2.1:

$$a_1 = b_2, \text{ тогда } \hat{\alpha} \xrightarrow{T} \hat{\beta}$$

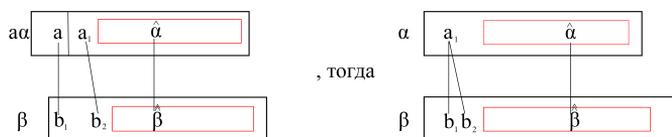


Рис. 7.

Случай 2.2

$a_1 \neq b_2$, тогда $m \geq 3$ и обозначим $\widehat{\widehat{\beta}} = b_3 \widehat{\widehat{\beta}}$.

Тогда $\widehat{\alpha} \xrightarrow{T} \widehat{\widehat{\beta}}$. По первому свойству Леммы верно, что $\widehat{\alpha} \xrightarrow{T} b_3 \widehat{\widehat{\beta}}$.

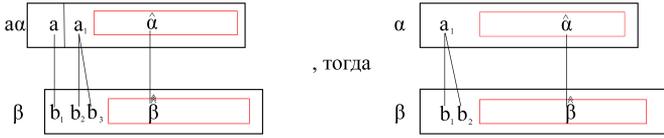


Рис. 8.

Случай 3:

$a \neq b_1, a_1 = b_1$.

Для слов $a\alpha, \beta$ знаем, что $a \xrightarrow{T} b_1 b_2$, и $a_1 \widehat{\alpha} \xrightarrow{T} \widehat{\widehat{\beta}}$, и по предположению индукции для второго свойства Леммы верно $\widehat{\alpha} \xrightarrow{T} \widehat{\widehat{\beta}}$.

Далее, для слов α, β получим $a_1 \xrightarrow{T} b_1$ и, по предположению индукции для первого свойства Леммы $\widehat{\alpha} \xrightarrow{T} b_2 \widehat{\widehat{\beta}}$. Индукция по обоим свойствам.

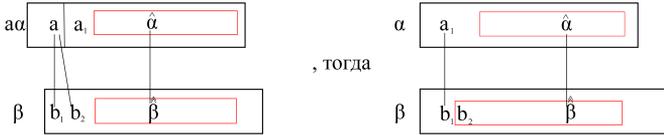


Рис. 9.

Случай 4:

$a \neq b_1, b_1 \neq a_1$.

Для слов $a\alpha, \beta$ знаем, что $a \xrightarrow{T} b_1 b_2$ и $a_1 \widehat{\alpha} \xrightarrow{T} \widehat{\widehat{\beta}}$.

Далее, для слов α, β имеем $a_1 \xrightarrow{T} b_1 b_2$, тогда по предположению индукции для второго свойства леммы, $\widehat{\alpha} \xrightarrow{T} \widehat{\widehat{\beta}}$

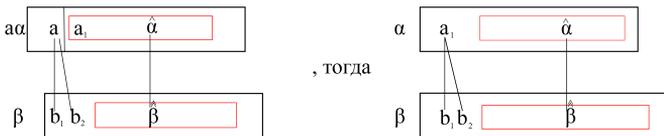


Рис. 10.

Утверждение леммы доказано. \square

Лемма 2. Пусть $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_2$ и $\alpha_2 \xrightarrow{T} \alpha_3$, тогда $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_3$.

Доказательство. Будем доказывать утверждение индукцией по длине

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| = k, k \geq 3.$$

База индукции: $k = 3$, тогда все первые буквы одинаковы $a = a = a$, тогда, очевидно, $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_3$.

Переход индукции: пусть доказано утверждение для k , докажем его для $k + 1$.

Рассмотрим 5 случаев:

1. Первые буквы попарно равны.
2. Первые буквы α_1 и α_2 равны, но не равны первой букве α_3 ;
3. Первые буквы α_2 и α_3 равны, но не равны первой букве α_1 ;
4. Первые буквы α_1 и α_3 равны, но не равны первой букве α_2 ;
5. Первые буквы попарно не равны.

Случай 1: Первые буквы попарно равны, то есть

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a\widehat{\alpha}_1, \\ \alpha_2 &= a\widehat{\alpha}_2, \\ \alpha_3 &= a\widehat{\alpha}_3.\end{aligned}$$

Тогда, так как $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_2$, то $\widehat{\alpha}_1 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_2$.

Так как $\alpha_2 \xrightarrow{T} \alpha_3$, то $\widehat{\alpha}_2 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_3$.

Заметим, что $a \xrightarrow{T} a$, тогда по предположению индукции верно, что $\widehat{\alpha}_1 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_3$. Отсюда окончательно получаем $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_3$.

Случай 2: Первые буквы α_1 и α_2 равны, но не равны первой букве α_3 :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a\widehat{\alpha}_1, \\ \alpha_2 &= a\widehat{\alpha}_2, \\ \alpha_3 &= \bar{a}\widehat{\alpha}_3.\end{aligned}$$

Так как $\alpha_2 \xrightarrow{T} \alpha_3$, а $a \neq \bar{a}$, то $|\alpha_3| \geq 2$:

$$\alpha_3 = \bar{a}b\widehat{\alpha}_3.$$

Так как $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_2$, то $\widehat{\alpha}_1 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_2$.

Так как $\alpha_2 \xrightarrow{T} \alpha_3$, то $\widehat{\alpha}_2 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_3$.

Тогда, по предположению индукции $\widehat{\alpha}_1 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_3$.

Заметим, что $a \xrightarrow{T} \bar{a}b$ и $\widehat{\alpha}_1 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_3$, значит верно, что $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_3$.

Случай 3: Первые буквы α_2 и α_3 равны, но не равны первой букве α_1 :

$$\alpha_1 = a\widehat{\alpha}_1,$$

$$\alpha_2 = \bar{a}\widehat{\alpha}_2,$$

$$\alpha_3 = \bar{a}\widehat{\alpha}_3.$$

Так как $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_2$, а $a \neq \bar{a}$, то $|\alpha_2| \geq 2$:

$$\alpha_2 = \bar{a}b\widehat{\alpha}_2,$$

Так как $\alpha_2 \xrightarrow{T} \alpha_3$, то $|\alpha_3| \geq 2$:

$$\alpha_3 = \bar{a}c\widehat{\alpha}_3.$$

Так как $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_2$, то $\widehat{\alpha}_1 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_2$.

Так как $\alpha_2 \xrightarrow{T} \alpha_3$, то $b\widehat{\alpha}_2 \xrightarrow{T} c\widehat{\alpha}_3$.

Случай 3.1: $b = c$, получим $\widehat{\alpha}_1 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_2$ и $\widehat{\alpha}_2 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_3$. Значит, по предположению индукции, $\widehat{\alpha}_1 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_3$.

Так как $a \xrightarrow{T} \bar{a}c$ и $\widehat{\alpha}_1 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_3$, то $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_3$.

Случай 3.2: $b \neq c$, тогда $|\alpha_3| \geq 3$ и обозначим $\alpha_3 = \bar{a}cd\widehat{\alpha}_3$.

$\widehat{\alpha}_1 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_2$ и $\widehat{\alpha}_2 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_3$. Получили $\widehat{\alpha}_1 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_3$, и из первого свойства Леммы 1 верно $\widehat{\alpha}_1 \xrightarrow{T} d\widehat{\alpha}_3$.

Так как $a \xrightarrow{T} \bar{a}c$ и $\widehat{\alpha}_1 \xrightarrow{T} d\widehat{\alpha}_3$, то $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_3$.

Случай 4: Первые буквы α_1 и α_3 равны, но не равны первой букве α_2 :

$$\alpha_1 = a\widehat{\alpha}_1,$$

$$\alpha_2 = \bar{a}\widehat{\alpha}_2,$$

$$\alpha_3 = a\widehat{\alpha}_3.$$

Так как $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_2$, а $a \neq \bar{a}$, то $|\alpha_2| \geq 2$:

$$\alpha_2 = \bar{a}b\widehat{\alpha}_2,$$

Так как $\alpha_2 \xrightarrow{T} \alpha_3$, то $|\alpha_3| \geq 2$:

$$\alpha_3 = ad\widehat{\alpha}_3.$$

Так как $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_2$, то $\widehat{\alpha}_1 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_2$.

Так как $\alpha_2 \xrightarrow{T} \alpha_3$, то $b\widehat{\alpha}_2 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_3$. По второму свойству Леммы 1 получим, что $\widehat{\alpha}_2 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_3$.

И, по предположению индукции, $\widehat{\alpha}_1 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_3$. Тогда, по первому свойству Леммы 1 получим, что $\widehat{\alpha}_1 \xrightarrow{T} d\widehat{\alpha}_3$.

Так как $a = a$ и $\widehat{\alpha}_1 \xrightarrow{T} d\widehat{\alpha}_3$, то $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_3$.

Случай 5: Первые буквы попарно не равны:

$$\alpha_1 = a\widehat{\alpha}_1,$$

$$\alpha_2 = \bar{a}\widehat{\alpha}_2,$$

$$\alpha_3 = c\widehat{\alpha}_3.$$

Так как $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_2$, а $a \neq \bar{a}$, то $|\alpha_2| \geq 2$:

$$\alpha_2 = \bar{a}b\widehat{\alpha}_2,$$

Так как $\alpha_2 \xrightarrow{T} \alpha_3$, а $\bar{a} \neq c$, то $|\alpha_3| \geq 2$:

$$\alpha_3 = cd\widehat{\alpha}_3.$$

Так как $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_2$, то $\widehat{\alpha}_1 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_2$.

Так как $\alpha_2 \xrightarrow{T} \alpha_3$, то $b\widehat{\alpha}_2 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_3$. По второму свойству Леммы 1 получим, что $\widehat{\alpha}_2 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_3$.

И, по предположению индукции $\widehat{\alpha}_1 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_3$.

Так как $a \xrightarrow{T} cd$ и $\widehat{\alpha}_1 \xrightarrow{T} \widehat{\alpha}_3$, то $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_3$.

Утверждение леммы доказано. \square

Лемма 3. Если верно $\alpha_1 \xrightarrow{*,1} \alpha_2$, то верно и $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_2$.

Доказательство. Пусть

$$\alpha_1 = \gamma_1 a \gamma_2,$$

$$\alpha_2 = \gamma_1 b c \gamma_2.$$

$$\gamma_1, \gamma_2 \in A^*$$

Алгоритм идет по началу.

1. Первый случай:

$$\gamma_1 = \gamma_1, \text{ тогда } \gamma_1 \xrightarrow{T} \gamma_1,$$

$$\text{Если } a \neq b, \text{ тогда } a \xrightarrow{T} bc,$$

$$\gamma_2 = \gamma_2, \text{ тогда } \gamma_2 \xrightarrow{T} \gamma_2.$$

2. Второй случай:

$$\gamma_1 = \gamma_1, \text{ тогда } \gamma_1 \xrightarrow{T} \gamma_1,$$

$$a = b, \text{ тогда } a \xrightarrow{T} b.$$

$$\gamma_2 \xrightarrow{T} c\gamma_2 - \text{второе свойство Леммы 1, так как } \gamma_2 \xrightarrow{T} \gamma_2.$$

Утверждение леммы доказано. \square

Лемма 4. Пусть $\alpha, \beta \in A^*$, $|\alpha| = n$, $|\beta| = m$ и $n \leq m \leq 2n$.

Тогда $\alpha \xrightarrow{T} \beta$ равносильно $\alpha \xrightarrow{*} \beta$.

Доказательство. Если $\alpha \xrightarrow{T} \beta$, то алгоритм заканчивает работу и α может перейти в начало β . То есть $\beta = \beta_1\beta_2$, причем $\alpha \xrightarrow{*} \beta_1$. Так как операция $*$ позволяет нам заменять уже замененные буквы α еще раз в буквы β , то последнюю букву α заменяем в две новые пока β не закончится, то есть $\beta_1 \xrightarrow{*} \beta_1\beta_2$. Таким образом $\alpha \xrightarrow{*} \beta$.

Докажем в обратную сторону. Пусть $\alpha \xrightarrow{*} \beta$, тогда существует такая последовательность замен, которая слово α превращает в слово β .

Возникает цепочка шагов $\alpha = \alpha_1 \xrightarrow{*,1} \alpha_2 \xrightarrow{*,1} \dots \xrightarrow{*,1} \alpha_n = \beta$.

По Лемме 3 мы знаем, что если верно $\alpha_1 \xrightarrow{*,1} \alpha_2$, то верно и $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_2$.

Значит $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_2$. Также для $\alpha_2 \xrightarrow{T} \alpha_3$ и остальных пар. Значит, по Лемме 2 $\alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_n$, то есть $\alpha \xrightarrow{T} \beta$.

Утверждение леммы доказано. \square

Лемма 5. Пусть $\alpha, \beta \in A^*$, $|\alpha| = n$, $|\beta| = m$, $m \geq n$.

Если $\alpha \xrightarrow{T} \beta$ или $m > 2n$, то $f_1(\alpha, \beta) = m - n$.
Иначе $f_1(\alpha, \beta) = \infty$.

Доказательство. Если $\alpha \xrightarrow{T} \beta$ и $m \leq 2n$, то по Лемме 4 есть цепочка преобразований $\alpha \xrightarrow{*} \beta$. Таким образом, $f_1(\alpha, \beta)$ конечно и равно $m - n$, так как каждая операция увеличивает длину на единицу.

Если $m > 2n$, то каждую букву α заменяем в две буквы β , а потом, так как операция $*$ позволяет нам заменять уже замененные буквы еще раз, то последнюю букву заменяем на 2 новые пока β не закончится. Таким образом, $f_1(\alpha, \beta)$ конечно и равно $m - n$.

Если не верно, что $\alpha \xrightarrow{T} \beta$, но $m \leq 2n$, то по Лемме 4 неверно $\alpha \xrightarrow{*} \beta$. Таким образом, $f_1(\alpha, \beta) = \infty$. \square

Лемма 6. Пусть $\alpha, \beta \in A^*$, $|\alpha| = n$, $|\beta| = m$, $m \geq n$.

Если $\alpha \xrightarrow{T} \beta$ и $2n \geq m$, то $f_2(\alpha, \beta) = m - n$.
Если $m > 2n$, либо не верно, что $\alpha \xrightarrow{T} \beta$, то $f_2(\alpha, \beta) = \infty$.

Доказательство. Если $\alpha \xrightarrow{T} \beta$ и $m \leq 2n$, то верно, что $\beta = \beta_1\beta_2$, где $\alpha \xrightarrow{**} \beta_1$. Разделим буквы слова α на два типа: те, которые мы не меняли при замене, и те, которые заменяли одну в две. Пусть букв, которых мы не меняли при замене k штук. Тогда $|\beta_1| = 2(n - k) + k$. Тогда в β_2 осталось $m - (2(n - k) + k) = m - 2n + k$ букв. Тогда, так как $m \leq 2n$, то $m - 2n + k \leq k$.

Далее заменяем последние $m - 2n + k$ нетронутых букв α по одной в две буквы β , начиная с крайней правой, и получаем соответствующую

цепочку замен $\alpha \xrightarrow{**} \beta$. Количество операций при этом, очевидно, равно $m - n$.

Если $m \leq 2n$ и не верно, что $\alpha \xrightarrow{T} \beta$, то, по Лемме 4, не верно $\alpha \xrightarrow{*} \beta$, тем более не верно $\alpha \xrightarrow{**} \beta$. И, значит, $f_2(\alpha, \beta) = \infty$.

Если $m > 2n$, то нам не хватит букв α , так как даже если мы будем заменять каждую букву α в две буквы β , то максимальная длина β может быть только $2n$.

Поэтому $f_2(\alpha, \beta) = \infty$.

Утверждение леммы доказано. \square

4. Доказательство основных утверждений

Теорема 1. *Существует линейный по времени выполнения алгоритм, эффективно вычисляющий по произвольной паре слов $\alpha, \beta \in A^*$ значения $f_1(\alpha, \beta), f_2(\alpha, \beta)$, и, в случае их конечности, находящий последовательность соответствующих преобразований $\alpha \xrightarrow{*} \beta, \alpha \xrightarrow{**} \beta$.*

Доказательство. Пусть $|\alpha| = n, |\beta| = m$. Без ограничения общности считаем, что $m \leq n$.

Если $m \leq 2n$, то запускаем Алгоритм Т.

Если Алгоритм Т закончился со значением 1, то по Леммам 5 и 6 верно, что значения $f_1(\alpha, \beta) = f_2(\alpha, \beta) = m - n$. Соответствующая цепочка преобразований строится из доказательств Лемм 5 и 6.

Если Алгоритм Т закончился со значением 0, то по Леммам 5 и 6 верно, что значения $f_1(\alpha, \beta) = f_2(\alpha, \beta) = \infty$. Соответствующей цепочки преобразований нет в силу доказательств Лемм 5 и 6.

Если $m > 2n$, то по Лемме 5 верно $f_1(\alpha, \beta) = m - n$, и из доказательства Леммы 5 получим соответствующую цепочку преобразований. А из доказательства Леммы 6 получаем $f_2(\alpha, \beta) = \infty$.

Утверждение теоремы доказано. \square

5. Заключение

Приведем основные результаты данной статьи:

- Была исследована тема метрической близости языков и ее применение для исправления ошибок в словах, в частности, замены одной буквы на две.
- Была выполнена основная задача: предложен оптимальный по времени работы алгоритм, позволяющий по произвольной паре

слов $\alpha, \beta \in A^*$ проверить возможность преобразования одного слова в другое нашими операциями, вычисляющий минимальное достаточное количество шагов и эффективно восстанавливающий соответствующую последовательность преобразований.

В результате исследования были выявлены возможные направления для дальнейшей работы в этой области.

В частности, можно рассмотреть расширение алгоритма для других вариантов замен, а также его применение не к паре слов, а к паре языков.

Список литературы

- [1] В.И.Левенштейн., “Двоичные коды с исправлением выпадений и вставок символа. Проблема передачи информации”, *Докл. АН СССР*, 1965, 845 - 848.
- [2] Томас Кормен, Чарльз Лейзерсон, Рональд Ривест, Клиффорд Штайн, “Алгоритмы. Построение и анализ”, *Второе издание*, 2011.
- [3] Б.Д. Кудряшов, “Основы теории кодирования”, *Учебное пособие*, 2016.
- [4] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, and Jeffrey D. Ullman, “Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation”, *3rd edition*, 2007.
- [5] Austin J. Parker, Kelly B. Yancey, and Matthew P. Yancey, “egular Language Distance and Entropy”, 2017.

On the complexity of converting pairs of words with respect to drop-in operations of a special type

Dergach P.S., Amirova S.R.

This article is devoted to finding the distance between pairs of words in a general finite alphabet under the action of the operation of replacing one letter into two (adjacent) and calculating the corresponding shortest chain of substitutions (if it exists). Initially, the problem was posed in a more general formulation for a pair of regular languages, but later the formulation of the problem was clarified. At the same time, two possibilities are considered - with the permission to replace letters that were previously absent in the original word or with the prohibition of such operations. This direction is relevant and can be used, for example, in the theory of noise-resistant coding. In particular, it is worth mentioning the Levenstein metric, which inspires similar research on a new type of letter substitution operations.

Keywords: text recognition, Levenshtein distance, metric, optimal algorithm.

References

- [1] levenshtein V.I., “Binary codes capable of correcting deletions, insertions, and reversals”, 1965, 845 – 848.
- [2] Thomas H.Cormen, Charles E.Leiserson, Ronald L.Rivest, Clifford Stein., “Introduction to Algorithms”, 2011.
- [3] Kudryavtsev V.B., “Correction Coding Theory”, 2016.
- [4] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, and Jeffrey D. Ullman, “Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation”, 2007.
- [5] Austin J. Parker, Kelly B. Yancey, and Matthew P. Yancey, “Regular Language Distance and Entropy”, 2017.

О вычислимости целочисленных функций коллективами из двух автоматов

В. В. Ушакова¹

В данной работе исследуется вычислимость одноместных частичных функций счётнозначной логики коллективами автоматов. Найден класс функций, вычисляемых коллективами из двух автоматов. Это периодические функции и простейшие линейные функции, которые, начиная с некоторого значения аргумента x ведут себя, как функция $f(x) = x + C$. Показано, что класс одноместных частичных функций счётнозначной логики, вычисляемых коллективами из трёх автоматов, является более широким.

Ключевые слова: вычислимость, автомат, коллективы автоматов, периодические функции.

1. Введение

В данной работе рассматривается понятие вычислимости одноместных частичных функций $f(x) : \mathbb{N}'_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}'_0 \subseteq \mathbb{N}_0$) коллективом автоматов на целочисленной прямой. Значение аргумента задаётся расстоянием между определёнными автоматами коллектива в его начальной расстановке, а результат равен расстоянию между определёнными автоматами коллектива в его финальной расстановке, при условии, что коллектив останавливается. Аналогично определяется вычислимость частичных многоместных функций: значение каждого аргумента задаётся расстоянием между определёнными автоматами коллектива в его начальной расстановке, а результат равен расстоянию между определёнными автоматами коллектива в его финальной расстановке, при условии, что коллектив останавливается.

Вычислительные возможности коллективов автоматов, очевидно, не больше, чем вычислительные возможности машин Тьюринга. Соответственно, классы функций, вычисляемые коллективами автоматов, являются подклассами вычисляемых функций.

Настоящая работа нацелена на расслоение всех одноместных вычисляемых функций на подклассы по минимальному числу n автоматов в коллективе, необходимом для вычисления данной функции. Класс ча-

¹ Ушакова Валентина Владимировна — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: valentina.ushakova92@gmail.com.

Ushakova Valentina Vladimirovna — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

стичных (одноместных) функций, вычислимый коллективами из n автоматов, обозначается, как $F_{n,1}$. Начиная с некоторого n , коллектив из n автоматов может моделировать любую, в том числе универсальную машину Тьюринга. Это следует из результатов, имеющих в [5]. Т.е. соответствующий класс функций $F_{n,1}$ становится равным классу всех одноместных вычислимых функций F_1 . Можем считать, что функция тем сложнее, чем больше автоматов требуется для её вычисления.

Промежуточная градация сложности между указанными функциями возможна при помощи понятия сильной вычислимости. Функция сильно вычислима коллективом автоматов, если она может быть вычислена этим коллективом при условии неподвижности первого автомата. Несложно увидеть, что класс частичных одноместных функций, сильно вычислимых коллективами из n автоматов $\hat{F}_{n,1}$ удовлетворяет следующему соотношению: $F_{n-1,1} \subseteq \hat{F}_{n,1} \subseteq F_{n,1}$, т.е. задаётся промежуточная градация сложности.

Таким образом, в данной работе исследуется один из новых видов сложности вычислимости функций, который до недавних пор никем не исследовался.

В данной работе найдены классы $\hat{F}_{2,1}$ и $F_{2,1}$.

2. Основные определения и понятия

Обозначим множества натуральных и целых чисел как \mathbb{N} и \mathbb{Z} , соответственно. Положим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Множество целых точек на прямой будем обозначать символом $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$, рассматривая это множество как геометрический объект, а именно, как лабиринт, в котором могут перемещаться автоматы. Точку на этой прямой будем идентифицировать при помощи ее координаты x . Назовем r -окрестностью точки x_0 множество целых точек $D_{x_0,r} = \{x \in \mathbb{L}_{\mathbb{Z}} \mid |x - x_0| \leq r\}$.

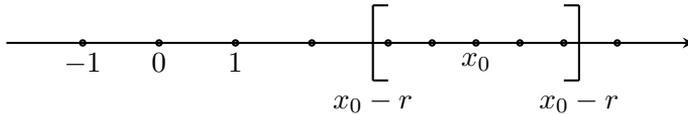


Рис. 1.

В данной работе рассматривается поведение коллектива автоматов $K = (W_1(R, V), \dots, W_m(R, V))$ в лабиринте $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$, где $m \geq 2$.

Будем использовать определение автомата, аналогичное рассматриваемому в [1], а определение коллектива автоматов, аналогичное рассматриваемому в [2].

Под автоматом будем понимать инициальный конечный автомат вида $\mathcal{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0, R, V)$, где A - входной, B - выходной, Q - внутренний алфавиты автомата \mathcal{A} , $\varphi : Q \times A \rightarrow Q$ и $\psi : Q \times A \rightarrow B$ - функции переходов и выходов \mathcal{A} , соответственно, $q_0 \in Q$ - его начальное состояние, $R \in \mathbb{N}$ - обзор автомата, V - скорость автомата, где $V \leq R$. Алфавит A определяет возможности \mathcal{A} “видеть” происходящее вокруг, а алфавит B - его возможности перемещаться. Алфавит Q и функции φ и ψ задают внутреннюю логику автомата.

Пусть автомат \mathcal{A} со скоростью V и обзором R находится в точке x_0 . Множество $D_{x_0, R}$ называется зоной обзора \mathcal{A} .

Фиксируем произвольные расположения и состояния всех автоматов коллектива K в лабиринте $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$. Состояние зоны обзора автомата W_j ($1 \leq j \leq m$) определяется расположением других автоматов коллектива в зоне обзора W_j , а также состояниями автоматов, попавших в зону обзора W_j . Входным алфавитом автомата W_j является множество всех возможных состояний его конечной зоны обзора.

Выходным алфавитом автомата W_j , перемещающегося в лабиринте $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$, является множество $B = D_{0, V}$, где параметр $V \in \mathbb{N}$ называется скоростью автомата W_j .

В каждый такт времени каждый автомат W_j получает на вход символ, кодирующий состояние его зоны обзора. В соответствии со своими функциями переходов и выходов, W_j вырабатывает свой выходной символ b и меняет свое состояние. При этом, если W_j в такт t находился в точке $x(t)$ и выдал выходной символ $b(t)$, это означает, что он переходит в точку $x(t+1) = x(t) + b(t)$, где и будет находиться в такт $(t+1)$.

Все автоматы коллектива перемещаются одновременно, в соответствии со своими функциями переходов и выходов каждый.

Будем говорить, что автомат неподвижен на отрезке времени, если его выходной символ на этом отрезке времени равен 0 и его состояние не меняется. Будем говорить, что некий автомат остановился в такт времени t , если, начиная с этого такта, его выходной символ всегда нулевой и его состояние не меняется (т.е. автомат прекратил передвижение в лабиринте). Будем говорить, что коллектив автоматов K остановился в такт t , если к этому такту остановились все его автоматы.

Будем говорить, что автомат W_i видит автомат W_j , если автомат W_j находится в зоне обзора автомата W_i , то есть расстояние между ними не превосходит R .

Расположение коллектива автоматов $K = (W_1, \dots, W_m)(R, V)$ в лабиринте $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$, при котором все автоматы, кроме W_2 , находятся в одной и той же точке x_0 , а W_2 находится в точке $x_0 + a$ (где $a \in \mathbb{Z}$), назовем a -расстановкой с центром x_0 . Пусть дана частичная одноместная функция $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, определённая на подмножестве $\mathbb{N}'_0 \subseteq \mathbb{N}_0$. Будем говорить,

что коллектив автоматов K вычисляет функцию f , если стартуя в лабиринте $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$ из a -расстановки с любым центром при $a \geq 0$, коллектив K в некоторый такт времени остановится в $f(a)$ -расстановке также с любым центром, если $a \in \mathbb{N}'_0$, и не остановится или остановится в расстановке, не являющейся a' -расстановкой ни для какого $a' \geq 0$, иначе. Аналогично можно определить вычислимость многоместных частичных функций.

Функцию назовем вычислимой некоторым классом коллективов κ , если существует коллектив $K \in \kappa$, вычисляющий эту функцию.

Очевидно, что для любого коллектива существует единственная функция, которую он вычисляет. В частности, если автоматы коллектива не останавливаются при старте из любой a -расстановки, коллектив вычисляет нигде не определенную функцию.

Класс всех частичных n -местных функций, вычислимых в $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$ коллективами из m автоматов, имеющих обзор R и скорость V , обозначим как $F_{m,n}^{R,V}$. Очевидно вложение $F_{2,n}^{R,V} \subseteq F_{3,n}^{R,V} \subseteq \dots \subseteq F_n$, где F_n -множество всех вычислимых (по Тьюрингу) частичных функций от n переменных. Также очевидно, что класс функций $F_{m,1}^{R,V}$ замкнут относительно суперпозиции при любом m . В данной статье будем рассматривать только одноместные функции, то есть подмножества класса F_1 .

Будем говорить, что коллектив автоматов K сильно вычисляет одноместную функцию f , если автомат W_1 неподвижен, при этом, коллектив K , стартуя в лабиринте $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$ из a -расстановки с любым центром при $a \geq 0$, в некоторый такт времени остановится в $f(a)$ -расстановке с любым центром, если $a \in \mathbb{N}'_0$, и не остановится или остановится в расстановке, не являющейся a' -расстановкой ни для какого $a' \geq 0$, иначе. Аналогично можно определить сильную вычислимость многоместных частичных функций. Класс всех частичных n -местных функций, сильно вычислимых в $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$ коллективами из m автоматов, имеющих обзор R и скорость V , обозначим как $\hat{F}_{m,n}^{R,V}$. Очевидно вложение $F_{2,n}^{\hat{R},V} \subseteq \hat{F}_{3,n}^{R,V} \subseteq \dots \subseteq \hat{F}_{m,n}^{R,V}$. Так же очевидно, что $\hat{F}_{m,n}^{R,V} \subseteq F_{m,n}^{R,V}$, так как все сильно вычислимые функции вычислимы, что следует из определения вычислимых и сильно вычислимых функций.

Последовательности $b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)$ назовем периодическими с общим периодом, если найдутся числа $T \in \mathbb{N}, T_0 \in \mathbb{N}_0$, такие, что для любого $i > T_0$, для любого $k \in \mathbb{N}$, для любой последовательности $b_j(t)$, где $j \in 1, 2, \dots, n$, выполняется $b_j(i) = b_j(i + kT)$, где T_0 – общий предпериод, а T – общий период. В частности, при $n = 1$ получаем определение периодической последовательности. Периодическую последовательность с предпериодической частью $b(1)b(2)\dots b(T_0)$ и периодической частью $b(T_0 + 1)\dots b(T_0 + T)$ обозначим как $b(1)b(2)\dots b(T_0)(b(T_0 + 1)\dots b(T_0 + T))$.

Множество $\mathbb{N}'_0 \subseteq \mathbb{N}_0$ называется периодическим, если найдутся числа $T \in \mathbb{N}$, $T_0 \in \mathbb{N}_0$, такие, что $\forall x > T_0$, будет верно, что если $x \in \mathbb{N}'_0$, то $x + k * T \in \mathbb{N}'_0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Назовем частичную функцию $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ (область определения $\mathbb{N}'_0 \subseteq \mathbb{N}_0$ которой - периодическое множество с периодом T и предпериодом T_0) периодической с периодом T и предпериодом T_0 , если $\forall x > T_0$, верно $f(x) = f(x + k * T), \forall k \in \mathbb{N}$ в случае, если функция определена в данных точках и функция f неопределена в обеих точках одновременно иначе.

Для задания автоматов в тексте статьи используются таблицы вида:

Q	A	φ	ψ
q_1^2	$(0, \dots, 0, \dots, 0)$	q_2^2	2
q_1^2	$(0, \dots, q_1^3, \dots, 0)$	q_0^2	1
q_2^2	$(0, \dots, q_j^k, \dots, 0, \dots, 0)$	q_3^2	-3
...
q_i^3	$(a_{-V}, a_{-V+1}, \dots, a_0, \dots, a_{V-1}, a_V)$	q_j^2	5
...
q_{C-1}^2	$(q_1^3, \dots, 0, \dots, 0)$	q_C^2	0
q_C^2	$(0, \dots, \{q_2^1, q_5^4\}, \dots, 0, \dots, q_8^3, 0)$	q_1^2	2
q_0^2	$(0, \dots, q_1^3, \dots, 0)$	q_0^2	1

где в первом столбце указано текущее состояние q автомата W_i , во втором столбце указан его входной символ a , в третьем столбце указывается $\varphi(q, a)$ - состояние, в которое автомат должен перейти, а в четвертом столбце указывается выходной символ $v = \psi(q, a), v \in [-V; V]$ - расстояние, на которое должен сдвинуться автомат вправо или влево. Для удобства в некоторых случаях будем использовать следующие обозначения для выходных символов автоматов: $0 = \Lambda, 1 = \rightarrow, -1 = \leftarrow$.

Состояние с номером j автомата W_i будем обозначать q_j^i .

Входной символ автомата во втором столбце понимаем следующим образом: это строка из $2V + 1$ символов. Символ с номером $V + 1$ отвечает за состояние вершины лабиринта, где находится автомат, $V + 1 + i$ - отвечает за состояние вершины лабиринта, находящейся на i клеток правее, $V + 1 - i$ - на i клеток левее. То есть это строка вида:

$$a_{-V}, a_{-V+1}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_{V-1}, a_V$$

$a_i = 0$ - в данной клетке отсутствуют автоматы, кроме W_i .

$a_i = q_j^k$ - если в данной клетке есть автомат W_k в состоянии $q_j^k (k \neq i)$.

$a_i = \{q_j^k, \dots, q_m^l\}$ - если в данной клетке есть отличные от W_i автоматы W_k, \dots, W_l в состояниях q_j^k, \dots, q_m^l соответственно.

Входной символ вида $(0, \dots, 0)$ будем называть нулевым.

Если для какой-либо пары (q, a) строка, в которой в первом столбце записано q , а во второй a , в таблице автомата отсутствует, считаем, что автомат, находясь в состоянии q и воспринимая входной символ a стоит на месте и остаётся в том же состоянии q .

При задании автомата таблицей его начальное состояние указывается отдельно.

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. Пусть коллектив из двух автоматов при старте из x -расстановки на прямой перемещается так, что до момента времени t_0 автоматы коллектива не видят друг друга. Тогда на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ выходные последовательности и последовательности состояний автоматов коллектива совпадают с периодическими последовательностями, общий предпериод T_0 и общий период T которых удовлетворяют неравенству $T_0 + T \leq n_1 * n_2$, где n_1 и n_2 - количества состояний первого и второго автоматов, соответственно.

Доказательство. Обозначим последовательности состояний рассматриваемых автоматов как $q_1(t)$ и $q_2(t)$, а их выходные последовательности как $b_1(t)$ и $b_2(t)$.

Пусть $t_0 > n_1 * n_2 + 1$. Так как количество состояний автоматов W_1 и W_2 ограничено и входной символ на рассматриваемом отрезке времени постоянный, найдутся моменты времени i и j , такие что $1 \leq i < j \leq n_1 * n_2 + 1$ и пара состояний $q_1(j)$ и $q_2(j)$ первого и второго автоматов соответственно, будут теми же самыми, что и в момент i . То есть будет выполняться следующая система уравнений:

$$\begin{cases} q_1(i) = q_1(j) \\ q_2(i) = q_2(j) \end{cases}$$

Из функций переходов и выходов конечного автомата мы можем определить выходной символ в момент времени t и состояние автомата в момент времени $t + 1$:

$$\begin{cases} q(t + 1) = \varphi(q(t), a(t)) \\ b(t) = \psi(q(t), a(t)) \end{cases}$$

Напишем системы для $t = i$ и $t = j$ для первого автомата:

$$\begin{cases} q_1(i + 1) = \varphi(q_1(i), a_1(i)) \\ b_1(i) = \psi(q_1(i), a_1(i)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1(j+1) = \varphi(q_1(j), a_1(j)) \\ b_1(j) = \psi(q_1(j), a_1(j)) \end{cases}$$

Так как $q_1(i) = q_1(j)$, и $a_1(i) = a_1(j)$, получаем, что:

$$\varphi(q_1(i), a_1(i)) = \varphi(q_1(j), a_1(j)) \text{ и } \psi(q_1(i), a_1(i)) = \psi(q_1(j), a_1(j)).$$

Это означает, что $q_1(i+1) = q_1(j+1)$ и $b_1(i) = b_1(j)$.

Проводя аналогичные рассуждения для второго автомата, получим, что $q_2(i+1) = q_2(j+1)$ и $b_2(i) = b_2(j)$.

То есть из того, что $q_1(i) = q_1(j)$ и $q_2(i) = q_2(j)$ следует, что $q_1(i+1) = q_1(j+1)$ и $q_2(i+1) = q_2(j+1)$, а также $b_1(i) = b_1(j)$ и $b_2(i) = b_2(j)$.

Обозначим $T = j - i$, $T_0 = i - 1$.

Проводя аналогичные рассуждения можно получить, что, до тех пор, пока входной символ не изменится (то есть автоматы коллектива не встретятся), для любого $t \in \mathbb{N}$, такого что $T_0 < t + T \leq t_0$, из того, что выполнено $q_1(t) = q_1(t + T)$ и $q_2(t) = q_2(t + T)$, верно:

$$\begin{aligned} q_1(t+1) &= q_1(t+1+T) \text{ и } q_2(t+1) = q_2(t+1+T), \\ b_1(t) &= b_1(t+T) \text{ и } b_2(t) = b_2(t+T). \end{aligned}$$

Так как $T_0 = i - 1$, $T = j - i$, $j \leq n_1 * n_2 + 1$, будет верно, что:

$$T_0 + T = i - 1 + j - i = j - 1 < n_1 * n_2 + 1.$$

Запишем последовательности состояний автоматов коллектива на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$:

$$\begin{aligned} & q_1(1) \dots q_1(T_0) q_1(i) \dots q_1(j-1) q_1(i+T) \dots q_1(j-1+T) \dots q_1(i+kT) \dots q_1(j-1+kT) \dots q_1(t_0-1) \\ & q_2(1) \dots q_2(T_0) q_2(i) \dots q_2(j-1) q_2(i+T) \dots q_2(j-1+T) \dots q_2(i+kT) \dots q_2(j-1+kT) \dots q_2(t_0-1) \end{aligned}$$

Исходя из вышеприведенных равенств, последовательности состояний можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & q_1(1) \dots q_1(T_0) q_1(i) \dots q_1(j-1) q_1(i) \dots q_1(j-1) \dots q_1(i) \dots q_1(j-1) \dots q_1(t_0-1) \\ & q_2(1) \dots q_2(T_0) q_2(i) \dots q_2(j-1) q_2(i) \dots q_2(j-1) \dots q_2(i) \dots q_2(j-1) \dots q_2(t_0-1) \end{aligned}$$

Запишем выходные символы автоматов коллектива на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$:

$$\begin{aligned} & b_1(1) \dots b_1(T_0) b_1(i) \dots b_1(j-1) b_1(i+T) \dots b_1(j-1+T) \dots b_1(i+kT) \dots b_1(j-1+kT) \dots b_1(t_0-1) \\ & b_2(1) \dots b_2(T_0) b_2(i) \dots b_2(j-1) b_2(i+T) \dots b_2(j-1+T) \dots b_2(i+kT) \dots b_2(j-1+kT) \dots b_2(t_0-1) \end{aligned}$$

Исходя из вышеприведенных равенств, выходные символы можно записать следующим образом:

$$b_1(1)...b_1(T_0)b_1(i)...b_1(j-1)b_1(i)...b_1(j-1)...b_1(i)...b_1(j-1)...b_1(t_0-1)$$

$$b_2(1)...b_2(T_0)b_2(i)...b_2(j-1)b_2(i)...b_2(j-1)...b_2(i)...b_2(j-1)...b_2(t_0-1)$$

Рассмотрим следующие периодические последовательности:

$$q'_1 = q_1(1)...q_1(T_0)(q_1(i)...q_1(j-1))$$

$$q'_2 = q_2(1)...q_2(T_0)(q_2(i)...q_2(j-1))$$

$$b'_1 = b_1(1)...b_1(T_0)(b_1(i)...b_1(j-1))$$

$$b'_2 = b_2(1)...b_2(T_0)(b_2(i)...b_2(j-1))$$

Так как $T_0 + T < n_1 * n_2 + 1$, очевидно, данные последовательности на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ совпадают с рассмотренными выше.

Пусть $t_0 \leq n_1 * n_2 + 1$.

Рассмотрим следующие периодические последовательности:

$$q'_1 = (q_1(1), q_1(2)...q_1(t_0 - 1))$$

$$q'_2 = (q_2(1), q_2(2)...q_2(t_0 - 1))$$

$$b'_1 = (b_1(1), b_1(2)...b_1(t_0 - 1))$$

$$b'_2 = (b_2(1), b_2(2)...b_2(t_0 - 1))$$

$$T_0 = 0, T = t_0 - 1. T_0 + T = t_0 - 1 < n_1 * n_2 + 1.$$

Очевидно, данные последовательности на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ совпадают с первыми t_0 элементами выходных последовательностей автоматов коллектива. \square

Лемма 2. Пусть коллектив $K = (W_1, W_2)$ стартует из неотрицательной x -расстановки и, при этом, автоматы $W_1(R, V)$ и $W_2(R, V)$ никогда не попадают в зону обзора друг друга. Тогда, для любого $x' > x$, эти автоматы, стартуя из x -расстановки также никогда не попадают в зону обзора друг друга.

Доказательство. Считаем, что при старте из x -расстановки автоматы коллектива K не видятся ни в какой момент времени. Рассмотрим поведение автоматов коллектива K при старте из x -расстановки и при старте из $(x + \delta)$ -расстановки, где $\delta > 0$.

Докажем, что при старте из $(x + \delta)$ -расстановки автоматы коллектива K не видятся ни в какой момент времени.

Для этого воспользуемся методом математической индукции (по времени).

Для того, чтобы убедиться, что в первый момент времени автоматы коллектива, стартующие из $(x + \delta)$ -расстановки не видятся, достаточно

вспомнить, что $\delta > 0$ и, так как на расстоянии x автоматы не находились в зонах обзора друг друга, на большем расстоянии они так же не находятся в зонах обзора друг друга.

Пусть стартовав из $(x + \delta)$ -расстановки до момента времени t автоматы коллектива не видели друг друга. Покажем, что в момент времени $t + 1$ они также не видят друг друга.

Так как автоматы коллектива не находились в зонах обзора друг друга до момента времени t , входные символы до момента времени t будут нулевыми. Так как при старте из x -расстановки автоматы коллектива не видят друг друга, их входные символы так же будут нулевыми, в том числе и в момент времени t . Так как начальное состояние автоматов в обоих случаях одно и то же, входные символы первые t моментов времени одинаковые, их выходные символы и состояния до момента времени $t + 1$ будут также одинаковы, а, следовательно, будут равны перемещения автоматов за первые t тактов. Из этого следует, что в момент времени $t + 1$ автоматы коллектива в обоих случаях будут находиться в одних и тех же состояниях, но стартуя из $(x + \delta)$ -расстановки, автоматы будут находиться дальше друг от друга, чем стартуя из x -расстановки, на расстояние δ , а значит, так же не видят друг друга. Шаг индукции доказан.

Обозначив $x' = x + \delta$ получим утверждение леммы. \square

Следствие 1. Пусть коллектив $K = (W_1, W_2)$ стартует из неотрицательной x -расстановки и, при этом, найдется момент времени t , в который автоматы $W_1(R, V)$ и $W_2(R, V)$ попадают в зону обзора друг друга. Тогда, для любого $x' < x$, для автоматов $W_1(R, V)$ и $W_2(R, V)$, стартовавших из неотрицательной x' -расстановки также найдется момент времени t' , в который автоматы W_1 и W_2 попадают в зону обзора друг друга.

Действительно, пусть дано x , удовлетворяющее условию следствия. Пусть дано $x' < x$. Предположим, что стартуя из x' -расстановки автоматы не видятся. Получим, что стартуя из x -расстановки автоматы $W_1(R, V)$ и $W_2(R, V)$ коллектива K видятся, и существует x' -расстановка, $x' < x$, такая что автоматы W_1 и W_2 не видятся, что противоречит лемме 2.

Следствие 2. Пусть коллектив $K = (W_1, W_2)$ стартует из неотрицательной x -расстановки и, при этом, автоматы $W_1(R, V)$ и $W_2(R, V)$ на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ не попадают в зону обзора друг друга. Тогда, для любого $x' > x$, эти автоматы, стартуя из x' -расстановки также на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ не попадают в зону обзора друг друга.

Следствие 3. Пусть автоматы коллектива при старте из неотрицательной x -расстановки на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ не видятся. Тогда

выходные последовательности и последовательности состояний автоматов коллектива совпадают с таковыми на данном отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ при старте из x' -расстановки, для любого $x' > x$.

Доказательство. Рассмотрим старт автоматов коллектива из x' -расстановки. Так как по следствию 2 автоматы не встретятся на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$, в данные моменты времени входные символы для автоматов нулевые. Также как и для случая старта из x -расстановки. Состояние первого автомата в случае старта из x' -расстановки совпадает с состоянием первого автомата в случае старта из x -расстановки. Поскольку его функция переходов зависит только от входных символов и текущих состояний и поскольку последовательности входных символов в обоих случаях нулевые, последующие состояния для обоих случаев будут идентичными. Аналогично, поскольку функция выходов первого автомата зависит только от его входных символов и текущих состояний и поскольку последовательности входных символов в обоих случаях нулевые, последующие выходные символы для обоих случаев будут идентичными. То есть, его последовательности выходных символов и состояний на данном отрезке времени совпадают из старта из обеих данных расстановок. То же верно для второго автомата. \square

Пусть автоматы коллектива при старте из неотрицательной x -расстановки на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ не видятся. Согласно лемме 1 на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ появится общий предпериод T_0 и общий период T выходных последовательностей автоматов. Обозначим вектор перемещения за период T второго автомата относительно первого как s .

Следствие 4. *Вектор s будет одинаковым каждые следующие T тактов до момента встречи автоматов коллектива (если встреча состоится). При этом, при направлении вектора s влево, через каждые T тактов времени автоматы сближаются на расстояние $|s|$, при направлении вправо - отдаляются на расстояние $|s|$ или, если вектор s нулевой, через каждые T тактов времени автоматы будут находиться на одном и том же расстоянии друг от друга.*

Действительно, так как рассматривается только отрезок времени, на котором автоматы коллектива не видятся, по лемме 1 выходные последовательности и последовательности состояний автоматов коллектива на данном отрезке совпадают с периодическими последовательностями, общий предпериод T_0 и общий период T которых удовлетворяют неравенству $T_0 + T \leq n_1 * n_2$, где n_1 и n_2 - количества состояний первого и второго автоматов, соответственно. Вектор s же можем считать разностью сумм выходных символов второго и первого автоматов за T тактов. Из периодичности выходных последовательностей на рассматриваемом

отрезке времени следует, что вектор s будет одинаковым каждые T тактов на рассматриваемом временном отрезке, начиная с момента времени $T_0 + 1$.

Лемма 3. *Для любого коллектива K из двух автоматов верно одно из следующих утверждений:*

а) *Для любой неотрицательной x -расстановки существует момент времени, в который автоматы увидятся;*

б) *Существует такое значение $x_0 > 0$, такое что при старте из любой неотрицательной x -расстановки, где $x < x_0$, автоматы видятся, а при старте из x -расстановки, где $x > x_0$ автоматы не видятся.*

Доказательство. Докажем, что если не выполняется случай а, то имеет место случай б.

Так как не выполняется случай а, найдется такое значение x' , что при старте из x' -расстановки автоматы не видятся. Тогда, по лемме 2, при всех $x > x'$ автоматы также не видятся.

Будем уменьшать значение x' на единицу до тех пор, пока при старте из новой получившейся точки x_0 автоматы не видятся. Как только при старте из точки x_0 автоматы видятся, можем сказать, что при старте из всех $x \leq x_0$ автоматы коллектива увидятся (следствие 1). Такая точка обязательно найдется, так как, если автоматы стартуют в зоне обзора друг друга, они увидятся уже в первый момент времени.

В силу сказанного выше, точка x_0 удовлетворяет условию леммы. \square

Лемма 4. *Если для коллектива K из двух автоматов выполнен случай «а» леммы 3, а именно, автоматы коллектива видятся при любой начальной неотрицательной x -расстановке, коллектив вычисляет периодическую функцию.*

Доказательство. Рассмотрим коллектив K из двух автоматов, имеющих траекторию типа «а», то есть автоматы коллектива видятся, стартуя из любой начальной x -расстановки. Пусть коллектив K вычисляет функцию $f(x)$. Количество состояний первого и второго автоматов коллектива K соответственно равно n_1 и n_2 .

Расстояние, пройденное автоматом за отрезок времени $[1, t]$ будем называть перемещением за время t для любого $t \in \mathbb{N}$. Если автомат переместился влево, то будем обозначать его перемещение отрицательным числом, если вправо - положительным. Перемещение первого автомата из начальной x -расстановки за время t обозначим $s_1(t, x)$, второго автомата $s_2(t, x)$, а перемещение второго автомата относительно первого $s(t, x)$. Тогда, $s(t, x) = s_2(t, x) - s_1(t, x)$.

Обозначим перемещение второго автомата относительно первого при старте из x -расстановки за отрезок времени $[t_1, t_2]$ как $r(t_2, t_1, x) = s(t_2, x) - s(t_1, x)$ для любых двух моментов времени $t_1 \leq t_2$.

Рассмотрим K при произвольной начальной x -расстановке, где $x > 3 * (R + 1 + 2 * V * (n_1 * n_2 + 1))$. (1)

Как минимум первые $n_1 * n_2 + 1$ тактов автоматы коллектива не видятся (так как за это время перемещение второго автомата относительно первого не превосходит $2 * V * (n_1 * n_2 + 1)$). По лемме 1, первые $n_1 * n_2 + 1$ тактов выходные последовательности автоматов коллектива совпадают с периодическими последовательностями, общий предпериод T_0 и общий период T которых удовлетворяют неравенству $T_0 + T < n_1 * n_2 + 1$. Перемещение второго автомата относительно первого за время $T_0 + T$ будет равно $s(T_0 + T, x)$ и

$$s(T_0 + T, x) \leq 2 * V * (n_1 * n_2 + 1). \quad (2)$$

Заметим, что $T_0 + 2T \leq 2(T_0 + T)$, поэтому в момент времени $T_0 + 2T$ расстояние между автоматами также будет больше, чем $R + 1 + 2 * V * n_1 * n_2$ (так как $x - 4 * V * (n_1 * n_2 + 1) > 3(R + 1) + 2 * V * (n_1 * n_2 + 1)$), тогда как минимум следующие $n_1 * n_2 + 1$ тактов их входные символы будут нулевыми. Для простоты обозначим $r(T) = r(T_0 + 2T, T_0 + T, x)$.

Согласно следствию 3, если на отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ при старте из x -расстановки автоматы коллектива не видятся, их выходные последовательности и последовательности состояний совпадают с таковыми на данном отрезке времени $[1, t_0 - 1]$ при старте из x' -расстановки, для любого $x' > x$. Из этого следует, что значения T_0 и T не зависят от начальной x -расстановки автоматов при соблюдении условия (1), так как по лемме 1 верно, что $T_0 + T \leq n_1 * n_2$. Также по следствию 4, так как по условию леммы автоматы видятся при любой начальной x -расстановке, значение $r(T)$ будем считать отрицательным, так как расстояние между автоматами за период сокращается на величину $|r(T)|$.

Перемещение второго автомата относительно первого за время $T_0 + 2T$ будет равно $s(T_0 + 2T, x) = s(T_0 + T, x) + r(T)$.

Рассмотрим поведение коллектива K при начальной $(x + r(T))$ -расстановке. Так как расстояние между автоматами $x + r(T) > 2 * (R + 1 + 2 * V * (n_1 * n_2 + 1))$, как минимум первые $n_1 * n_2 + 1$ тактов их входные символы будут нулевыми.

Для старта из x -расстановки запишем выходные символы и состояния автоматов за время $T_0 + 2T$:

$$q_1(1), \dots, q_1(T_0), q_1(T_0 + 1), \dots, q_1(T_0 + T), q_1(T_0 + 1 + T), \dots, q_1(T_0 + 2T)$$

$$\begin{aligned}
& q_2(1), \dots, q_2(T_0), q_2(T_0 + 1), \dots, q_2(T_0 + T), q_2(T_0 + 1 + T), \dots, q_2(T_0 + 2T) \\
& b_1(1), \dots, b_1(T_0), b_1(T_0 + 1), \dots, b_1(T_0 + T), b_1(T_0 + 1 + T), \dots, b_1(T_0 + 2T) \\
& b_2(1), \dots, b_2(T_0), b_2(T_0 + 1), \dots, b_2(T_0 + T), b_2(T_0 + 1 + T), \dots, b_2(T_0 + 2T)
\end{aligned}$$

В силу периодичности вышеприведенных последовательностей, верно, что:

$$\begin{aligned}
q_1(T_0 + 2T, x) &= q_1(T_0 + T, x) \\
q_2(T_0 + 2T, x) &= q_2(T_0 + T, x) \\
b_1(T_0 + 2T, x) &= b_1(T_0 + T, x) \\
b_2(T_0 + 2T, x) &= b_2(T_0 + T, x)
\end{aligned}$$

Для старта из $(x + r(T))$ -расстановки запишем выходные символы и состояния автоматов за время $T_0 + T$:

$$\begin{aligned}
& q(1), \dots, q_1(T_0), q_1(T_0 + 1), \dots, q_1(T_0 + T) \\
& q_2(1), \dots, q_2(T_0), q_2(T_0 + 1), \dots, q_2(T_0 + T) \\
& b_1(1), \dots, b_1(T_0), b_1(T_0 + 1), \dots, b_1(T_0 + T) \\
& b_1(1), \dots, b_2(T_0), b_2(T_0 + 1), \dots, b_2(T_0 + T)
\end{aligned}$$

Из вышеприведенных равенств будет верно:

$$\begin{aligned}
q_1(T_0 + 2T, x) &= q_1(T_0 + T, x + r(T)) \\
q_2(T_0 + 2T, x) &= q_2(T_0 + T, x + r(T)) \\
b_1(T_0 + 2T, x) &= b_1(T_0 + T, x + r(T)) \\
b_2(T_0 + 2T, x) &= b_2(T_0 + T, x + r(T))
\end{aligned}$$

Также, очевидно, что для одиночного автомата, перемещающегося на прямой, его выходная последовательность не зависит от точки старта. А значит, что для автоматов коллектива вектор перемещения каждого из них от старта за одинаковое время не зависит от его собственного начального расположения на прямой и от начального расположения на прямой второго автомата при отсутствии встречи в данный промежуток времени в любом из случаев. Поэтому $s(T_0 + T, x + r(T)) = s(T_0 + T, x)$.

Также, по определению $s(T_0 + 2T, x) = s(T_0 + T, x) + r(T)$.

То есть выполнено, что:

$$\begin{cases}
x + s(T_0 + 2T, x) = x + r(T) + s(T_0 + T, x + r(T)) \\
q_1(T_0 + 2T, x) = q_1(T_0 + T, x + r(T)) \\
q_2(T_0 + 2T, x) = q_2(T_0 + T, x + r(T))
\end{cases}, \quad (3)$$

То есть, при старте из любой x -расстановки, где $x > 3 * (R + 1 + 2 * V * (n_1 * n_2 + 1))$ в момент времени $T_0 + 2T$ автоматы коллектива будут находиться на том же расстоянии и в тех же состояниях соответственно, что и при старте из $(x + r(T))$ -расстановки в момент времени $T_0 + T$. Из

этого следует, что дальнейшее поведение автоматов коллектива будет идентично, то есть при старте из x -расстановки, для любого $t \in \mathbb{N}$ в момент времени $T_0 + 2T + t$ автоматы коллектива будут находиться на том же расстоянии и в тех же состояниях соответственно, что и при старте из $(x + r(T))$ -расстановки в момент времени $T_0 + T + t$.

Из этого следует, что дальнейшее поведение автоматов коллектива при старте из x -расстановки и $(x + r(T))$ -расстановки будет происходить одинаковым образом. То есть либо автоматы коллектива остановятся в одинаковых расстановках, либо не остановятся в обоих случаях. То есть, значения $f(x)$ и $f(x + r(T))$ определены или не определены одновременно, и если определены, то $f(x) = f(x + r(T))$.

Пусть $D = -r(T)$ и $x + r(T) = x'$.

Заметим, что по условию леммы автоматы встречаются при старте из любой расстановки. Это значит, что как бы ни перемещались автоматы, вектор перемещения второго автомата относительно первого за общий период T направлен навстречу первому автомату (не смотря на то, что на каких-то отрезках времени это может быть и не так), в противном случае они бы не встретились. Поэтому $D > 0$, так как $r(T)$ отрицательно.

Тогда, если автоматы коллектива остановятся при старте из x' -расстановки, $f(x') = f(x' + D)$, для любого $x' > 3*(R + 1 + 2*V*(n_1*n_2 + 1))$, и не остановятся при старте из $(x' + D)$ -расстановки иначе. Это верно для любого $x' > 3*(R + 1 + 2*V*(n_1*n_2 + 1))$, так как формула верна для любого $x > 3*(R + 1 + 2*V*(n_1*n_2 + 1))$, а в силу отрицательности $r(T)$ получим $x + r(T) > 3*(R + 1 + 2*V*(n_1*n_2 + 1)) + r(T) \Rightarrow$ будет верно и для всех $x' > 3*(R + 1 + 2*V*(n_1*n_2 + 1))$, так как верно $3*(R + 1 + 2*V*(n_1*n_2 + 1)) > 3*(R + 1 + 2*V*(n_1*n_2 + 1)) + r(T)$.

Очевидно, что формула $f(x' + D) = f(x' + D + D)$ будет верна, так как $x' + D > 3*(R + 1 + 2*V*(n_1*n_2 + 1))$. Получим, что $f(x') = f(x' + D) = f(x' + D + D)$. Проводя далее аналогичные рассуждения получим, что $f(x') = f(x' + kD), \forall k \in \mathbb{N}$.

То есть выполнено, что для любого $x' > 3*(R + 1 + 2*V*(n_1*n_2 + 1))$ такого что $f(x')$ определена, верно что $f(x' + kD)$ определена и $f(x') = f(x' + kD), \forall k \in \mathbb{N}$. Если $f(x')$ не определена, то $f(x' + kD)$ также не определена. То есть функция f - периодическая функция.

Что и требовалось доказать. \square

Замечание 1. При выводе системы (3) в доказательстве леммы 4 не использовался факт встречи автоматов коллектива. Поэтому система будет верна для любого значения $r(T)$. При этом заметим, что при $r(T) > 0$ автоматы также вычисляют периодическую функцию, а именно функцию, неопределённую на своём периоде, так как возник-

нет период и автоматы большую часть времени будут отдаляться и никогда не остановятся.

При $r(T) = 0$ система является тавтологией и вместе с функцией, неопределённой на своём периоде, описывает ситуацию, когда выполнен случай «б)», а именно, существует такое значение x_0 , такое что при старте из всех $x \leq x_0$ автоматы видятся, а при всех $x > x_0$ автоматы не видятся.

Определим класс функций $G_{x+const}$.

Пусть $T_0 \in \mathbb{N}$.

Во-первых, в класс $G_{x+const}$ будут входить все функции вида:

$$g(x) = \begin{cases} C_0, & \text{при } x = 0 \\ C_1, & \text{при } x = 1 \\ \dots & \\ C_{T_0-1}, & \text{при } x = T_0 - 1 \\ x + C, & \text{при } x \geq T_0 \end{cases},$$

где $C \in \mathbb{Z}$, $T_0 + C \geq 0$, $C_i \in \mathbb{N}_0 \cup \{\lambda\}$, $i \in [0, T_0 - 1]$.

При $C_i \in \mathbb{N}_0$, $g(i) = C_i$ и при $C_i = \lambda$ значение $g(i)$ не определено.

Также в класс $G_{x+const}$ будут входить все функции вида $f(x) = x + C$, где $C \in \mathbb{N}_0$.

Лемма 5. Если для коллектива K из двух автоматов выполнен случай «б)», а именно, существует такое неотрицательное значение x_0 , что при старте из всех неотрицательных $x \leq x_0$ автоматы видятся, а при всех $x > x_0$ автоматы не видятся, то коллектив либо вычисляет функцию $f \in G_{x+const}$, либо периодическую функцию, значения которой не определены при всех $x > x_0$.

Доказательство. Пусть дан коллектив K , вычисляющий функцию f , который имеет траектории типа «б)», то есть существует такое значение x_0 , такое что при старте из всех $x \leq x_0$ автоматы видятся, а при всех $x > x_0$ автоматы не видятся.

Положим:

$$\begin{cases} C_0 = f(0), & \text{если } f(0) \text{ определено и } \lambda \text{ иначе} \\ C_1 = f(1), & \text{если } f(1) \text{ определено и } \lambda \text{ иначе} \\ \dots & \\ C_{x_0} = f(x_0), & \text{если } f(x_0) \text{ определено и } \lambda \text{ иначе} \end{cases}$$

Легко видеть, что если автоматы коллектива стартуют из x - расстановки, где $x \in [0, x_0]$, функция f принимает такие же значения, как и функции из $G_{x+const}$.

Так как при старте на расстоянии $x > x_0$ автоматы не видятся, каждый из них до остановки перемещается так же, как он перемещался бы в отсутствие другого автомата. Очевидно, что для одиночного автомата, перемещающегося на прямой, его выходная последовательность не зависит от точки старта. А значит, что для автоматов с траекториями типа «б)», стартовавших на расстоянии $x > x_0$, вектор перемещения каждого из них не зависит от его собственного начального расположения на прямой, и от начального расположения на прямой второго автомата.

Если автоматы коллектива не останавливаются, то коллектив вычисляет функцию, неопределенную во всех точках $x > x_0$ (случай $r(T) > 0$). Эта функция является частным случаем периодической функции.

Если автоматы коллектива останавливаются ($r(T) = 0$), перемещение первого автомата с начала движения обозначим s_1 , второго автомата s_2 , а общее перемещение s . Тогда, $s = s_2 - s_1$. То есть $f(x) = x + s$, причем, очевидно, что, так как s_1 и s_2 вычислялись для каждого автомата независимо от другого, независимо от их начальных расположений, s не зависит от значения $x > x_0$, то есть s - константа. Положим $C = s$. Тогда, при $x > x_0$, $f(x) = x + C$.

Легко видеть, что если коллектив стартует в x -расстановке, где $x > x_0$, коллектив вычисляет значение, равное $x + C$, то есть значение, соответствующее функции $f \in G_{x+const}$, где в роли T_0 в определении функции из класса $G_{x+const}$ выступает $x_0 + 1$.

Следовательно, $f \in G_{x+const}$. □

Лемма 6. Любая функция вида $f(x) = C * x (C \in \mathbb{N})$ сильно вычислима коллективом из трёх автоматов.

Доказательство. Пусть дана функция вида $f(x) = C * x$. Построим коллектив из трех автоматов, сильно вычисляющий эту функцию.

В качестве автомата W_1 возьмем неподвижный автомат.

В качестве W_2 возьмем автомат со следующей таблицей:

Q	A	$\varphi(Q)$	$\Psi(Q)$
q_1^2	$(a_{-V}, a_{-V+1}, \dots, a_0, \dots, a_{V-1}, a_V)$, $a_0 \neq q_1^3$	q_2^2	\rightarrow
q_1^2	$(a_{-V}, a_{-V+1}, \dots, a_0, \dots, a_{V-1}, a_V)$, $a_0 = q_1^3$	q_0^2	Λ
q_2^2	a	q_3^2	Λ
\dots	\dots	\dots	\dots
q_i^2	a	q_{i+1}^2	Λ
\dots	\dots	\dots	\dots
q_{C-1}^2	a	q_C^2	Λ
q_C^2	a	q_1^2	Λ

где начальным состоянием автомата W_2 является состояние q_1^2 .

В качестве W_3 возьмем автомат со следующей таблицей:

Q	A	$\varphi(Q)$	$\Psi(Q)$
q_1^3	$(a_{-V}, a_{-V+1}, \dots, a_0, \dots, a_{V-1}, a_V), a_0 \neq q_1^2$	q_2^3	Λ
q_1^3	$(a_{-V}, a_{-V+1}, \dots, a_0, \dots, a_{V-1}, a_V), a_0 = q_1^2$	q_0^3	Λ
...
q_i^3	a	q_{i+1}^3	Λ
...
q_{C-2}^3	a	q_{C-1}^3	Λ
q_{C-1}^3	a	q_1^3	\rightarrow
q_0^3	$(a_{-V}, a_{-V+1}, \dots, a_0, \dots, a_{V-1}, a_V), a_0 \neq q_1^1$	q_0^3	\leftarrow

где начальным состоянием автомата W_3 является состояние q_1^3 .

То есть автомат W_1 не передвигается и находится в своем единственном состоянии q_0 . Автомат W_2 движется по одному шагу каждый C -й момент времени, до того, как W_2 и W_3 окажутся в одной клетке. Автомат W_3 движется по одному шагу каждый $(C - 1)$ -й момент времени, до того, как W_2 и W_3 окажутся в одной клетке, а именно на расстоянии $C * x$ от автомата W_1 .

Рассмотрим моменты времени, в которых автоматы W_2 и W_3 окажутся на расстоянии $C * x$ от автомата W_1 . Автомат W_2 до данной точки пройдёт $(C - 1) * x$ шагов, а автомат W_3 пройдёт $C * x$ шагов. Двигаясь каждый $(C - 1)$ -й такт времени, автомат W_3 пройдет расстояние $C * x$ за время $(C - 1) * C * x$, а автомату W_2 до точки $C * x$ нужно пройти расстояние $(C - 1) * x$, и он пройдёт его, двигаясь каждый C -й такт, начиная с первого за время $((C - 1) * x) - 1 * C + 1 = (C - 1) * x * C - (C - 1)$ и будет там находиться в следующие $C - 1$ тактов, в том числе в такт времени $(C - 1) * C * x$. В этот момент и произойдёт встреча автоматов W_2 и W_3 . Необходимо также отметить, что это первая встреча автоматов W_2 и W_3 , так как автоматы W_2 и W_3 изначально находятся на расстоянии x и каждый $C * (C - 1)$ -й такт расстояние между автоматами сокращается на 1. Исходя из этого, на величину x расстояние между автоматами уменьшится в такт времени $x * C * (C - 1)$.

В следующий такт времени, то есть в такт $(C - 1) * C * x + 1$ оба автомата, очевидно, окажутся в своих первых состояниях. Автомат W_2 останется на месте и перейдёт в своё финальное состояние.

Далее, автомат W_3 вернётся к автомату W_1 и перейдёт в своё финальное состояние. Коллектив остановился в $C * x$ - расстановке. \square

Замечание 2. Очевидно, что функция $f(x) = C * x$ не совпадает ни с одной из функций из класса $G_{x+const}$, а также то, что она не является периодической.

4. Основные результаты

Теорема 1. Класс $F_{2,1}^{R,V}$ описывается следующим образом:

1) $F_{2,1}^{R,V}$ содержит все функции из класса $G_{x+const}$, то есть все функции вида

$$f(x) = \begin{cases} C_0, & \text{при } x = 0 \\ C_1, & \text{при } x = 1 \\ \dots & \\ C_{T_0-1}, & \text{при } x = T_0 - 1 \\ x + C, & \text{при } x \geq T_0 \end{cases},$$

где $T_0 \in \mathbb{N}$, $C \in \mathbb{Z}$, $T_0 + C \geq 0$, $C_i \in \mathbb{N}_0 \cup \{\lambda\}$, $i \in [0, T_0 - 1]$,
а также все функции вида $f(x) = x + C$, где $C \in \mathbb{N}_0$.

2) $F_{2,1}^{R,V}$ содержит все периодические функции;

3) $F_{2,1}^{R,V}$ не содержит никаких функций, кроме указанных выше в п.

1) и 2).

4) $F_{2,1}^{R,V} = \hat{F}_{2,1}^{R,V}$

Доказательство. 1) Покажем, что класс $\hat{F}_{2,1}^{R,V}$ содержит все функции из класса $G_{x+const}$.

Приведем пример коллектива из двух автоматов, сильно вычисляющего произвольную всюду определенную функцию $f(x) \in G_{x+const}$ вида:

$$f(x) = \begin{cases} C_0, & \text{при } x = 0 \\ C_1, & \text{при } x = 1 \\ \dots & \\ C_{T_0-1}, & \text{при } x = T_0 - 1 \\ x + C, & \text{при } x \geq T_0 \end{cases},$$

где $T_0 \in \mathbb{N}$, $C \in \mathbb{Z}$, $T_0 + C \geq 0$, $C_i \in \mathbb{N}_0$, $i \in [0, T_0 - 1]$.

В качестве автомата W_1 возьмем неподвижный автомат с единственным состоянием q .

В качестве W_2 возьмем автомат со следующей таблицей:

Q	A	$\varphi(Q)$	$\Psi(Q)$
q'_i	$(a_{-V}, a_{-V+1}, \dots, a_0, \dots, a_{V-1}, a_V), a_0 \neq q$	q'_{i+1}	\leftarrow
q'_i	$(a_{-V}, a_{-V+1}, \dots, a_0, \dots, a_{V-1}, a_V), a_0 = q$	$q_{i,0}$	Λ
$q_{i,0} (C_i \neq 0)$	a	q_i	\rightarrow
q_{i,k_i}	a	q_{i,k_i+1}	\rightarrow
q_{i,C_i}	a	q	Λ
q'_l	a	q'_{l+1}	\rightarrow
q'_{2T_0}	a	q_1	Λ
q_j	a	q_{j+1}	$sgn(C)$
q_C	a	q	$sgn(C)$

где $i \in [0, T_0 - 1], k_i \in [1, C_i - 1], j \in [1, C - 1], l \in [T_0, 2 * T_0 - 1]$,

$$sgn(C) = \begin{cases} -1, & \text{при } C < 0 \\ 0, & \text{при } C = 0 \\ 1, & \text{при } C > 0 \end{cases}$$

где начальным состоянием автомата W_2 является состояние q'_0 , а a – произвольный входной символ. Строка с номером 3 присутствует в программе только в случае $C_i \neq 0$.

То есть автомат W_1 не передвигается и находится в своем единственном состоянии q_0 . Сначала делаем проверку, попадает ли значение x в интервал $[0; T_0 - 1]$. Для этого автомат W_2 делает T_0 шагов влево, навстречу автомату W_1 .

Если автомат W_2 увидит по пути автомат W_1 , это будет означать, что значение x лежит в интервале $[0, T_0 - 1]$, в котором значения функции могут отличаться от $f(x) = x + C$, поэтому автомат W_2 переходит в одну из строк 3-5. То есть в строки, предназначенные для вычисления констант $C_i, i \in [0, T_0 - 1]$. Автомат W_2 будет вычислять константы $C_1, C_2, \dots, C_{T_0} \in \mathbb{N}_0$, равные соответственно $f(0), f(1), \dots, f(T_0 - 1)$, двигаясь от W_1 на C_i шагов вправо, $i \in [0, T_0 - 1]$.

Если автомат W_2 не увидит автомат W_1 , это будет означать, что $x \notin [0, T_0 - 1]$, тогда автомат W_2 вернется назад на T_0 шагов. Далее автомат W_2 не передвигается и переходит в свое финальное состояние при $C = 0$, движется по одному шагу вправо при $C > 0$ и по одному шагу влево при $C < 0$ каждый момент времени, пока он не сделает ровно C шагов.

Замечание 1: для случая, когда $T_0 = 0$ (то есть функция имеет вид $f(x) = x + C$) начальным состоянием автомата W_2 будет являться состояние q_1 в вышеприведенной таблице.

Замечание 2: для случая частичных функций достаточно строчки программы 3-5 для вычисления констант $C_i, i \in [0, T_0 - 1]$, изменить на любой цикл при тех значениях, при которых функция не определена.

Легко видеть, что функция из класса $G_{x+const}$ может быть не определена только на интервале $[0, T_0 - 1]$.

Поскольку $\hat{F}_{2,1}^{R,V}$ содержит все функции из класса $G_{x+const}$, и верно, что $\hat{F}_{2,1}^{R,V} \subseteq F_{2,1}^{R,V}$, класс $F_{2,1}^{R,V}$ также содержит все функции из класса $G_{x+const}$.

2) Покажем, что класс $\hat{F}_{2,1}^{R,V}$ содержит все периодические функции.

Приведем пример коллектива из двух автоматов, сильно вычисляющего произвольную всюду определенную периодическую функцию вида:

$$f(x) = \begin{cases} C_0, \text{ при } x = 0 \\ C_1, \text{ при } x = 1 \\ \dots \\ C_{T_0-1}, \text{ при } x = T_0 - 1 \\ C_{T_0}, \text{ при } x = T_0 + k * T \\ \dots \\ C_{T_0+T-1}, \text{ при } x = T_0 + T - 1 + k * T \end{cases},$$

где $T_0 \in \mathbb{N}$, $C_i \in \mathbb{N}_0$, $i \in [0, T_0 + T - 1]$, $k \in \mathbb{N}_0$.

В случае $T_0 = 0$ функция задаётся лишь последними T строками.

Рассмотрим случай, когда $T_0 \neq 0$.

В качестве автомата W_1 возьмем неподвижный автомат с единственным состоянием q .

В качестве W_2 возьмем автомат со следующей таблицей:

Q	A	$\varphi(Q)$	$\Psi(Q)$
q'_i	$(a_{-V}, a_{-V+1}, \dots, a_0, \dots, a_{V-1}, a_V)$, $a_0 \neq q$	q'_{i+1}	\leftarrow
q''_i	$(a_{-V}, a_{-V+1}, \dots, a_0, \dots, a_{V-1}, a_V)$, $a_0 = q$	$q_{i,0}$	Λ
q'_l	a	q'_{l+1}	\rightarrow
q'_{2T_0}	a	q_1	Λ
q_j	$(a_{-V}, a_{-V+1}, \dots, a_0, \dots, a_{V-1}, a_V)$, $a_0 \neq q$	q_{j+1}	\leftarrow
q_T	$(a_{-V}, a_{-V+1}, \dots, a_0, \dots, a_{V-1}, a_V)$, $a_0 \neq q$	q_1	\leftarrow
q_j	$(a_{-V}, a_{-V+1}, \dots, a_0, \dots, a_{V-1}, a_V)$, $a_0 = q$	$q_{T_0-1+j,0}$	Λ
q_T	$(a_{-V}, a_{-V+1}, \dots, a_0, \dots, a_{V-1}, a_V)$, $a_0 = q$	$q_{T_0-1+T,0}$	Λ
$q_{m,0}$ при $C_m \neq 0$	a	$q_{m,1}$	\rightarrow
q_{m,k_m}	a	q_{m,k_m+1}	\rightarrow
q_{m,C_m}	a	q	Λ

где $i \in [0, T_0 - 1]$, $m \in [0, T_0 - 1 + T]$, $k_m \in [1, C_m - 1]$, $l \in [T_0, 2T_0 - 1]$, $j \in [1, T - 1]$,

где начальным состоянием автомата W_2 является состояние q'_0 . Строка с номером 9 присутствует в программе только в случае $C_m \neq 0$.

То есть автомат W_1 не передвигается и находится в своем единственном состоянии q_0 . Сначала делаем проверку, попадает ли значение x в интервал $[0; T_0 - 1]$. Для этого автомат W_2 делает T_0 шагов влево, навстречу автомату W_1 .

Если автомат W_2 увидел по пути автомат W_1 , значение x лежит в предпериоде нашей функции, поэтому автомат W_2 переходит в одну из подпрограмм, вычисляющую значение функции в предпериоде. Эти подпрограммы будут вычислять некоторые константы $C_1, C_2, \dots, C_{T_0} \in \mathbb{N}_0$, равные соответственно $f(0), f(1), \dots, f(T_0 - 1)$, двигаясь от W_1 на C_i шагов вправо, $i \in [0, T_0 - 1]$.

Если автомат W_2 не увидел автомат W_1 , значит $x \notin [0, T_0 - 1]$, поэтому автомат W_2 вернется назад на T_0 шагов.

Автомат W_2 идет навстречу автомату W_1 , меняя циклично состояния от 1 до T . И в момент, когда автомат W_2 увидит автомат W_1 , переходит в подпрограмму и начинает вычислять, в зависимости от своего состояния при встрече, одну из констант C_k , $k \in [T_0, T_0 + T - 1]$. То есть он двигается вправо, пока он не пройдет количество шагов, равное константе C_k .

Замечание 1: для случая, когда $T_0 = 0$ (то есть функция имеет вид $f(x) = x + C$) начальным состоянием автомата W_2 будет являться состояние q_1 в вышеприведенной таблице.

Замечание 2: для случая частичных функций достаточно изменить строчки программы для вычисления констант (последние 3) на любой цикл при тех значениях, которых функция не определена.

Поскольку $\hat{F}_{2,1}^{R,V}$ содержит все все периодические функции, и верно, что $\hat{F}_{2,1}^{R,V} \subseteq F_{2,1}^{R,V}$, класс $F_{2,1}^{R,V}$ также содержит все все периодические функции.

3) Покажем, что класс $F_{2,1}^{R,V}$ не содержит никаких функций, кроме функций из класса $G_{x+const}$ и периодических функций.

Пусть дана функция $f \in F$, вычисляемая некоторым коллективом автоматов K из двух автоматов W_1 и W_2 . По лемме 3, для коллектива K выполняется либо случай а), либо случай б). Если выполняется а) - по лемме 5 он вычисляет функцию $f(x) \in G_{x+const}$, что соответствует первому пункту теоремы. Иначе - по лемме 4 он вычисляет периодическую функцию, что соответствует второму пункту теоремы.

4) Покажем, что $F_{2,1}^{R,V} = \hat{F}_{2,1}^{R,V}$.

Очевидно, что $\hat{F}_{2,1}^{R,V} \subseteq F_{2,1}^{R,V}$. А в доказательствах пунктов 1 и 2 теоремы доказано, что соответствующие классы функций сильно вычислимы. Поэтому, из доказательств пунктов 1, 2 и пункта 3 теоремы следует, что $F_{2,1}^{R,V} = \hat{F}_{2,1}^{R,V}$.

□

Из формулировки теоремы 1 видно, что $F_{m,1}^{R,V}$ не зависит от параметров R и V , так как класс $G_{x+const}$ и класс периодических функций не зависят от этих параметров.

Следствие 5. $\forall R_1, R_2, V_1, V_2$ верно $F_{2,1}^{R_1, V_1} = F_{2,1}^{R_2, V_2}$.

Это следствие позволяет нам ниже заменить обозначение $F_{2,1}^{R,V}$ на более простое обозначение того же класса функций $F_{2,1}$.

Следствие 6. $\forall R, V F_{2,1} \neq F_{3,1}^{R,V}$.

Согласно лемме 6, для любого $C \in \mathbb{N}$ существует коллектив из трех автоматов, вычисляющий функцию $f(x) = C*x$. В то же время, согласно теореме 1, ни один коллектив из двух автоматов не решает эту задачу. Значит, для любых R, V класс $F_{3,1}^{R,V}$ шире, чем $F_{2,1}$.

5. Заключение

Исследования по автоматам в лабиринтах велись в 1963–2021 годах в Московском Государственном Университете под руководством академика В.Б.Кудрявцева. Он же в 1980е годы сформулировал задачу преследования в терминах автоматов в лабиринтах. В.Б.Кудрявцевым и его учеником Н.Ю.Волковым были получены значимые результаты в задаче преследования, которые дали исходный толчок для исследования вычислимости функций коллективами автоматов. Результаты работ [3] и [4] сделали актуальной задачу исчерпывающего описания функций, вычислимых на прямой малыми коллективами автоматов. В то же время задача нахождения для каждого m класса функций, вычислимых коллективами из m автоматов, является интересной задачей из теории алгоритмов.

Автор работы выражает признательность Н.Ю.Волкову за постановку задачи.

Список литературы

- [1] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., *Введение в теорию автоматов*, «Наука», Москва, 1985, 320 с.
- [2] Kilibarda G., Kudryavtsev, V., Ušćumlić Š., “Collectives of automata in labyrinths”, *Discrete Mathematics and Applications*, **13**:5 (2003), 429–466
- [3] Волков Н. Ю., “Об автоматной модели преследования”, *Дискретная математика*, **19**:2 (2007), 131–160

- [4] Волков Н. Ю., “Об автоматной модели преследования в базовых плоских областях.”, *Интеллектуальные системы*, **11**:1-4 (2007), 361–402
- [5] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, Prentice Hall, U.S., 1985, 560 с.

Computability of integer functions by means of collectives of two automata

Ushakova V.V.

In this work the computability of one-place partial functions of countable-valued logic by collectives of automata is explored. The class of functions computable by two-automata collectives is found. These are periodic functions and the simplest linear functions, which, starting from some value of the argument x behave like $f(x) = x + C$ function. It is shown that the class of one-place partial functions of countable-valued logic computable by three-automata collectives is wider.

Keywords: computability, automaton, collectives of automata, periodic functions.

References

- [1] Kudryavtsev V.B., Alyoshin S.V., Podkolzin A.S., *Introduction to automata theory*, «Science», Moscow, 1985, 320 с.
- [2] Kilibarda G., Kudryavtsev, V., Ušćumlić Š., “Collectives of automata in labyrinths”, *Discrete Mathematics and Applications*, **13**:5 (2003), 429–466
- [3] Volkov N. Yu., “On an automaton model of pursuit”, *Diskretnaya Matematika*, **19**:2 (2007), 131–160 (In Russian)
- [4] Volkov N. Yu., “On an automaton model of pursuit in basic flat mazes”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **11**:1-4 (2007), 361–402 (In Russian)
- [5] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, Prentice Hall, U.S., 1985, 560 с.

**К сведению авторов публикаций в журнале
«Интеллектуальные системы. Теория и приложения»**

В соответствии с требованиями ВАК РФ к изданиям, входящим в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук, статьи в журнал «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» предоставляются авторами в следующей форме:

1. Статьи, набранные в пакете \LaTeX , предоставляются к загрузке через WEB-форму http://intsysjournal.org/generator_form.
2. К статье прилагаются файлы, содержащие название статьи на русском и английском языках, аннотацию на русском и английском языках (не более 50 слов), список ключевых слов на русском и английском языках (не более 20 слов), информация об авторах: Ф.И.О. полностью, место работы, должность, ученая степень и/или звание (если имеется), контактные телефоны (с кодом города и страны), e-mail, почтовый адрес с индексом города (домашний или служебный).
3. Список литературы оформляется в едином формате, установленном системой Российского индекса научного цитирования.
4. За публикацию статей в журнале «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» с авторов (в том числе аспирантов высших учебных заведений) статей, рекомендованных к публикации, плата не взимается. Оттиски статей авторам не предоставляются. Журнал распространяется по подписке, экземпляры журнала рассылаются подписчикам наложенным платежом. Условия подписки публикуются в каталоге НТИ «Роспечать», индекс журнала 64559.
5. Доступ к электронной версии последнего вышедшего номера осуществляется через НЭБ «Российский индекс научного цитирования». Номера, вышедшие ранее, размещаются на сайте <http://intsysjournal.org>, и доступ к ним бесплатный. Там же будут размещены аннотации всех публикуемых статей.

Подписано в печать: 20.09.2023

Дата выхода: 30.09.3023

Тираж: 200 экз.

Цена свободная

Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-58444 от 25 июня 2014 г.,
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных
технологий и массовых коммуникаций(Роскомнадзор).