Выразимость CPL-функций нейронными схемами над ReLU-базисами

В. Г. Шишляков[1]

В работе рассматривается вопрос выразимости любой кусочно-линейной непрерывной функции многих переменных в виде нейронной схемы над базисом с нелинейностями типа max. Затем результат переносится на нейронные схемы, построенные над базисом с единственной нелинейной функцией RELU.

Перед доказательством результата формулируются и доказываются несколько вспомогательных, технических лемм, расширяющих имеющиеся знания о свойствах кусочно-линейных функций и классов эквивалентности, порожденных некоторым набором гиперплоскостей.

Также в работе даются оценки нелинейной сложности и глубины для построенных нейронных схем в двух данных базисах.

Наконец, в работе доказывается равенство класса кусочно-линейных непрерывных функций, класса функций, представимых нейронными схемами над базисом первого типа и класса функций, представимых нейронными схемами над базисом второго типа.

Ключевые слова: Нейронные схемы, архитектура, восстановление функций, выразимость функций, выпуклые функции, кусочно-линейные непрерывные функции, RELU-функции, функция максимума

1. Введение

В данной работе продолжается изучение вопросов выразимости функций, которые впервые подробно были исследованы в работе [1]. В работе [1] был заложен фундамент в виде определений, связывающих понятия нейронных сетей с классическими понятиями дискретной математики, такими, как схемы функциональных элементов и автоматные функции [2], а также рассмотрены некоторые проблемы, с которыми часто приходится сталкиваться при построении нейросетевой архитектуры.

А именно, в исследовании [1] было предложено рассмотрение нейронных сетей с точки зрения схем функциональных элементов над определенным заранее фиксированным набором функциональных элементов

[1] *Шишляков Владимир Геннадьевич* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: bolotmaks@yandex.ru.

Shishlyakov Vladimir Gennad'evich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

(базисом) и сравнение (с теоретико-множественной точки зрения) множества функций, соответствующих всем таким схемам, с классом функций, обладающих определенными свойствами.

Упомянутые выше схемы, согласно [1], будем называть нейронными схемами. Данные схемы, по сути, являются синонимами термина нейронная сеть, так как нейронную сеть можно получить из нейронной схемы, группируя определенные комбинации функциональных элементов в нейроны, что подробно описано в работах [3] и [4].

Также в работе [1] было решено множество задач, давших сильную базу в виде самих результатов, а также методов и идей их доказательств, для решения дальнейших подобных задач. В частности, в работе [1] было показано, что класс функций, реализуемых классическими нейронными сетями Мак-Каллока и Питтса (с функциями активации Хевисайда) [5] в точности совпадает с классом кусочно-параллельных функций. Однако, данный класс функций является достаточно узким классом, при помощи которого невозможно полноценно решать, например, задачи регрессии.

Подобные вопросы выразимости исследовались также в работах [6], [7], [8], [9], [10], [11]. В работах [6], [7], [8] и [9] был доказан ряд интересных результатов, связанных с выразимостью различных классов функций, обладающих определенными свойствами, над базисами, состоящими из функций, обладающих определенными характеристиками, во многом схожими с базисами из работы [1]. В работах [10] и [11] доказаны результаты, являющиеся частными случаями результата, доказанного в данном исследовании. О полученных в работах [10] и [11] результатах будет подробнее рассказано ниже.

Стоит отметить, что помимо классических нейронных сетей с функцией активации Хевисайда есть нейронные сети с другими функциями активации. В частности, большое распространение в современных архитектурах получила ставшая классической функция активации RELU. Возникает теоретический интерес - выяснить, какой класс функций выражается при помощи нейронных сетей с указанной функцией активации.

В силу того, что базис для построения нейронных сетей с RELU функциями активации содержит лишь кусочно-линейные непрерывные функции, а классы кусочно-линейных и непрерывных функций замкнуты по операции суперпозиции [1],[6], то возникает гипотеза, что, класс функций, представимых нейронными сетями над базисами с функциями активации RELU, совпадает с классом кусочно-линейных непрерывных функций.

Данная гипотеза частично была исследована в работах [7], [10] и [11]. В работе [10] было доказано, что нейронные схемы, построенные над базисом, состоящим из линейных функций и функции модуля, могут восстанавливать произвольную кусочно-линейную непрерывную функцию одной и двух переменных.

В работе [7] было доказано, что нейронные схемы над базисом, состоящим из линейных функций и функции RELU, могут восстанавливать произвольную кусочно-линейную непрерывную функцию от одной и двух переменных.

Отметим, что вопрос исследования функций с бóльшим числом переменных в работах [7] и [10] затронут не был.

В работе [11] было доказано, что любую выпуклую кусочно-линейную непрерывную функцию можно выразить в виде нейронной схемы над любым из двух базисов, один из которых содержит все линейные функции и нелинейности $\max(x_1, ..., x_n)$ от любого числа аргументов, а второй содержит все линейные функции и функцию RELU.

Текущее исследование является продолжением серии публикаций, начатой в работе [11]. В текущей статье доказывается основная теорема о том, что произвольную кусочно-линейную непрерывную функцию можно представить нейронной схемой над базисом из линейных функций и функций $\max(x_1, ..., x_n)$ от любого числа аргументов, а затем доказывается аналогичное утверждение для базисов с единственной нелинейностью — функцией RELU, которая может использоваться, как функция активации получаемых из данных схем нейронных сетей.

Доказательство упомянутой теоремы идейно базируется на результатах работы [11], однако текущая работа является полноценным и скорее основным исследованием, в силу того, что при развертывании идеи доказательства на математический язык потребовалось доказать гораздо больший объем вспомогательных утверждений, чем было доказано в работе [11].

Таким образом, в данной работе устанавливается связь в виде равенства между классом кусочно-линейных непрерывных функций и функциями, получаемыми из схем в упомянутых выше базисах и, помимо сказанного, доказывается множество замечательных свойств классов эквивалентности и кусочно-линейных непрерывных функций, которые в дальнейшем используются при доказательстве основного результата.

Также в данной работе даются оценки сверху нелинейной сложности и нелинейной глубины полученных нейронных схем.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Определим основные понятия, которые используются в данной статье. Для начала ведем понятие базиса нейронной схемы и связанные с ним понятия, следуя работам [1], [2] и [3].

Базисом будем называть некоторый набор функциональных элементов, где каждый функциональный элемент представляет из себя пару $(S, f(x_1, ..., x_n))$, в которой $f(x_1, ..., x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, а S – сопоставленный ей графический объект с n входными стрелками и одной выходной стрелкой (кратко – входы и выход объекта S). Входам объекта S приписаны слева направо переменные $x_1, ..., x_n$, являющиеся аргументами функции f, выходу приписан выход функции f.

В данной работе будем рассматривать два базиса (1) и (2), приведенных ниже.

$$B_1 = \{c, \gamma \cdot x, \sum_n (x_1, ..., x_n), \max(x_1, ..., x_n)\} \tag{1}$$

$$B_2 = \{c, \gamma \cdot x, \sum_n (x_1, ..., x_n), RELU(x)\} \tag{2}$$

Подробное описание функций из базисов (1) и (2) и их графические обозначения можно найти в работе [11].

Функциональные элементы max и $RELU$ из базисов (1) и (2) будем называть нелинейными. Все остальные элементы данных базисов будем называть линейными.

Подробнее о том, как строятся схемы функциональных элементов из элементов любого из рассматриваемых в данной работе базисов, описано в [1]. Получаемые схемы называются нейронными схемами. Множество нейронных схем, получаемых из элементов некоторого базиса B, будем обозначать $[B]$.

Будем говорить, что функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ представима (выражается, восстанавливается) нейронной схемой над некоторым базисом B, если $\exists g \in [B] : \forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n \ f(\overline{x}) = g(\overline{x})$.

Путем в нейронной схеме назовем последовательность функциональных элементов $(S_1, f_1), ..., (S_k, f_k)$ схемы, таких, что:

- Один из входов элемента (S_1, f_1) является входом схемы
- Выход элемента (S_k, f_k) является выходом схемы
- Один из входов элемента (S_i, f_i) является выходом элемента (S_{i-1}, f_{i-1}) при $i \in \{2, ..., k\}$

Длиной пути называется число нелинейных элементов, содержащихся в нем.

Нелинейной глубиной схемы называется длина самого длинного пути в данной схеме. Нелинейной сложностью схемы называется число всех нелинейных элементов в схеме.

Далее введем важнейшие понятия для данной работы — это понятия гиперплоскости, класса эквивалентности, кусочно-линейной функции, функции класса CPL, а также связанные с ними понятия.

Пусть дано пространство $\mathbb{R}^n$. Гиперплоскостью (плоскостью размерности $n-1$) будем называть геометрическое место точек $l = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | a_1x_1 + ... + a_nx_n + c = 0\}$ (где $a_1, ..., a_n, c$ – константы, причем $a_1, ..., a_n$ не равны нулю одновременно).

Пусть $\overline{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда под значением $l(\overline{x})$ будем понимать значение $a_1x_1 + ... + a_nx_n + c$.

Будем говорить, что точка $\overline{x}$ лежит на гиперплоскости l, если $l(\overline{x}) = 0$. Таким образом, гиперплоскость – это множество решений уравнения $l(\overline{x}) = 0$.

Так как по уравнению вида $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$ можно в точности восстановить гиперплоскость, то в дальнейшем будем иногда определять гиперплоскость через ее уравнение, а само уравнение будем называть уравнением, определяющим гиперплоскость.

Вместе с гиперплоскостью $l = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | a_1x_1 + ... + a_nx_n + c = 0\}$ естественным образом определяются два полупространства $l^+ = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | a_1x_1 + ... + a_nx_n + c > 0\}$ и $l^- = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | a_1x_1 + ... + a_nx_n + c < 0\}$. Очевидно, что $l^+ \cup l^- \cup l = \mathbb{R}^n$ для любой гиперплоскости l.

В дальнейшем под некоторым набором гиперплоскостей всегда будем подразумевать именно множество гиперплоскостей, то есть множество геометрических мест точек, отличных друг от друга, если не оговорено иное. Следует отметить, что все дальнейшие определения и большинство доказанных утверждений остаются верными и для случая, если в наборах гиперплоскостей разрешить повторения. Однако в данном случае оказывается неверной лемма 13, рассмотренная далее, а также все утверждения, в доказательствах которых явно или неявно используется данная лемма. Именно поэтому в данной работе используется указанное ограничение.

Гиперплоскостью размерности $n - k$ будем называть геометрическое место точек, полученное, как пересечение k гиперплоскостей размерности $n - 1$.

Пусть $\overline{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, а $l_1, ..., l_k$ – некоторые гиперплоскости, определяемые выражениями $l_i = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n + c_i = 0\},\ i = 1, ..., k$.

Рассмотрим вектор-функцию $\sigma(\overline{x}) = (sgn(a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + c_1), ..., sgn(a_{k1}x_1 + ... + a_{kn}x_n + c_k))$, которая называется сигнатурой вектора $\overline{x}$ [1]. Каждая ее компонента показывает расположение точки $\overline{x}$ относительно каждой из гиперплоскостей $l_1, ..., l_k$.

Будем считать точки $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ эквивалентными относительно гиперплоскостей $l_1, ..., l_k$ и обозначать это $\overline{x} \sim \overline{y}$, если $\sigma(\overline{x}) = \sigma(\overline{y})$.

Очевидно, что отношение $\overline{x} \sim \overline{y}$ является отношением эквивалентности [1]. Следовательно, гиперплоскости разбивают $\mathbb{R}^n$ на множество непустых, непересекающихся классов $R^1, ..., R^s$, дающих в объединении все множество $\mathbb{R}^n$.

Сигнатурой всякого класса $R^i \in \{R^1, ..., R^s\}$ назовем значение $\sigma(R^i) = \sigma(\overline{x})$, где $\overline{x}$ – произвольный элемент класса R^i. Отметим, что определение корректно, так как по построению $\forall \overline{x}, \overline{y} \in R^i$ $\sigma(\overline{x}) = \sigma(\overline{y})$ [1].

Так как в доказательствах иногда удобно обращаться к компонентам вектора сигнатуры, то обозначим $\sigma_u(R^i)$ и $\sigma_u(\overline{x})$ - значения компоненты с номером u сигнатур класса R^i и вектора $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, соответственно.

В дальнейшем мы хотим оперировать не самими классами эквивалентности, а их сигнатурами. Однако бывают случаи, когда всевозможных сигнатур больше, чем классов эквивалентности в разбиении пространства рассматриваемым набором гиперплоскостей.

Если рассмотреть системы равенств и неравенств, соответствующие сигнатурам, для которых не нашлось классов эквивалентности, можно легко убедиться, что данные системы будут иметь пустые множества решений. Поставим в соответствие таким сигнатурам пустые множества и назовем их пустыми (мнимыми) классами эквивалентности.

Таким образом, сигнатурами пустых классов являются все оставшиеся комбинации векторов из $\{-1, 0, 1\}^k$, которые не соответствуют ни одному классу эквивалентности из классического разбиения пространства, порожденного отношением эквивалентности $\sigma(\overline{x}) = \sigma(\overline{y})$. Так как пустые классы в некотором смысле неотличимы, то не имеет значения - какая сигнатура из данных оставшихся комбинаций присваивается выбираемому пустому классу (главное, чтобы у всех пустых классов были различные сигнатуры).

Здесь и далее под множеством классов эквивалентности, полученных в результате разбиения пространства $\mathbb{R}^n$ некоторым набором гиперплоскостей, всегда будем понимать это расширенное множество классов, среди которых есть пустые множества, если не оговорено иное.

Данное допущение никоем образом не портит картину, так как добавленные пустые классы не пересекаются по определению, и новое расширенное множество классов будет давать в объединении все множество $\mathbb{R}^n$. Непустота же классов будет в дальнейшем каждый раз оговариваться.

Однако, при этом, любой сигнатуре теперь будет соответствовать некоторый класс из полученного разбиения.

Множество классов эквивалентности $\{R^1, ..., R^s\}$, полученное объединением разбиения пространства $\mathbb{R}^n$ некоторым набором гиперплоскостей $\{l_1, ..., l_k\}$ при помощи введенного выше отношения эквивалентности $\overline{x} \sim \overline{y}$ и пустых классов, соответствующих сигнатурам, которым изначально никакие классы не соответствовали, будем называть разбиением пространства $\mathbb{R}^n$ или просто разбиением.

Класс эквивалентности R^i назовем плоским, если $\exists l_j \in \{l_1, ..., l_k\}$: $R^i \subset l_j$.

Класс эквивалентности R^i назовем объемным, если он не является плоским.

Очевидно, что если R^i – непустой и объемный, то он имеет сигнатуру $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_k) : \sigma_j \neq 0 \ \forall j \in \{1, ..., k\}$. Если же класс R^i – непустой и плоский, то он имеет сигнатуру $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_k)$, в которой $\exists j \in \{1, ..., k\}$: $\sigma_j = 0$.

Пусть дан объемный класс эквивалентности $R^i \subset \mathbb{R}^n$, имеющий сигнатуру $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_k)$. Тогда контуром размерности $n - l, l \in \{1, ..., n\}$ данного класса назовем объединение всех классов эквивалентности, имеющих сигнатуры σ', содержащиеся во множестве векторов, полученных из сигнатуры $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_k)$ занулением всех возможных комбинаций из l компонент вектора σ.

Контуром будем называть объединение контуров размерностей $n - 1, n - 2, ..., 0$. Контур класса R^i обозначим $\partial_{lin}\ R^i$. Контур класса R^i размерности k будем обозначать $\partial^k_{lin}\ R^i, k \in \{0, ..., n-1\}$.

Если требуется посмотреть на контур не как на объединение классов эквивалентности, а как на множество классов эквивалентности, будем обозначать это $\partial_{set\ lin}\ R^i$ и $\partial^k_{set\ lin}\ R^i,\ k \in \{0, ..., n-1\}$. Другими словами, $\partial_{lin}\ R^i = \bigcup\limits_{R \in \partial_{set\ lin}\ R^i} R$ и $\partial^k_{lin}\ R^i = \bigcup\limits_{R \in \partial^k_{set\ lin}\ R^i} R$.

Размерностью непустого класса R^i назовем число $n - l,\ l \in \{0, ..., n\}$, где l – число нулевых компонент вектора сигнатуры класса R^i.

Отметим, что, число нулевых компонент вектора сигнатуры всякого класса R^i лежит во множестве $\{0, ..., k\}$, где, вообще говоря, $k \neq n$. В случае, когда $k < n$, могут получаться лишь классы размерности, не меньшей $n - k$. Если же $k > n$, то при занулении более, чем n компонент вектора сигнатуры будут получаться всегда пустые классы эквивалентности. Случай же $k = n$ является самым сбалансированным – в данном случае могут существовать непустые классы любой размерности, при этом классы даже с полностью нулевыми сигнатурами могут оказаться непустыми.

Для пустых классов эквивалентности не будем вводить никакого понятия размерности, так как такие классы в дальнейшем нас не интересуют.

Пусть $L_N = \{l_1, ..., l_N\}$ – множество гиперплоскостей. Тогда обозначим $R(L_N)$ – множество всех непустых классов, получаемых при разбиении пространства $\mathbb{R}^n$ данными гиперплоскостями (то есть классическое разбиение пространства $\mathbb{R}^n$ отношением эквивалентности, заданным равенством сигнатур). Также обозначим $V(L_N)$ – множество всех непустых объемных классов, полученных при разбиении пространства $\mathbb{R}^n$ гиперплоскостями L_N. Очевидно, что $V(L_N) \subset R(L_N)$.

Под выражениями $R(\varnothing)$ и $V(\varnothing)$ будем понимать множество из одного класса эквивалентности, совпадающего с $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что множества $R(L_N)$ и $V(L_N)$ могут тоже иногда называться разбиениями пространства $\mathbb{R}^n$ гиперплоскостями L_N или просто разбиениями. Однако, когда речь будет идти только о непустых или непустых объемных классах эквивалентности, в предложении будет всегда указываться обозначение $R(L_N)$ или $V(L_N)$, соответственно.

Два непустых объемных класса R^+, R^- из некоторого разбиения, таких, что $R^+ \neq R^-$, будем называть смежными, если существует непустой $(n-1)$-мерный класс R^0 из данного разбиения, такой, что $R^0 \subset \overline{R^+} \cap \overline{R^-}$. Обозначать это соотношение будем, как $R^+|R^-$ или $R^-|R^+$, так как очевидно, что отношение смежности является симметричным.

Класс R^0 будем называть пограничным классом.

Классы $R^1, R^2 \in V(L): \ R^1 \neq R^2$ будем называть связанными по смежности, если для них выполняется, что $R^1|R^2$ или $\exists R^{(1)}, ..., R^{(r)} \in R(L): R^1|R^{(1)}|...|R^{(r)}|R^2$.

Пусть $L = \{l_1, ..., l_k\}$ и дано множество $R(L) = \{R^1, ..., R^s\}$ непустых классов, порождаемых разбиением пространства $\mathbb{R}^n$ гиперплоскостями $L = \{l_1, ..., l_k\}$. Тогда укрупнением разбиения $R(L)$ называется всякое разбиение $R(L')$, где $L' \subset L$.

Другими словами, укрупнением разбиения называется разбиение, полученное из исходного разбиения удалением одной или нескольких гиперплоскостей.

По определению будем считать, что всякое укрупнение $R(\varnothing)$ – это снова $R(\varnothing)$.

Очевидно, что если $R(L)$ – некоторое разбиение, а $R(L')$ – его укрупнение, то $\forall R \in R(L)\ \exists R' \in R(L'): \ R \subset R'$.

Будем говорить, что функция $f(\overline{x})$ является кусочно-линейной [1] и обозначать это $f(\overline{x}) \in PL$, если существует разбиение некоторым множеством гиперплоскостей L, такое что $\forall R^i \in R(L) \subset \{R^1, ..., R^s\}$ выполняется $\forall \overline{x} \in R^i\ f(\overline{x}) = \overline{b_i} \cdot \overline{x} + d_i$, где $\overline{b_i}, d_i$ – константы.

Другими словами, кусочно-линейной будем называть всякую функцию, для которой существует разбиение, над каждым непустым классом которого ее поведение можно описать некоторой линейной функцией.

Всякую функцию $f_{R^i}(\overline{x}) = \overline{b_i} \cdot \overline{x} + d_i$ будем называть линейной частью функции $f(\overline{x})$ на классе R^i.

Иногда, чтобы сразу ввести кусочно-линейную функцию и зафиксировать валидирующее (проверяющее) ее разбиение, будем говорить, что функция $f(\overline{x})$ – кусочно-линейная функция, заданная над (разбиением, классами) $\{R^1, ..., R^s\}$, где в качестве разбиения будет использоваться либо классическое разбиение с непустыми классами эквивалентности, либо расширенное разбиение, в котором к непустым классам добавлены мнимые классы эквивалентности.

Также иногда будем говорить, что функция $f(\overline{x})$ – кусочно-линейная функция, заданная над набором гиперплоскостей $\{l_1, ..., l_k\}$. В этом случае будем подразумевать, что $f(\overline{x})$ задана над разбиением $\{R^1, ..., R^s\}$, которое порождается гиперплоскостями $\{l_1, ..., l_k\}$.

CPL-функцией назовем всякую кусочно-линейную непрерывную функцию. Множество всех непрерывных кусочно-линейных функций обозначим CPL.

Пусть дана некоторая функция $f(\overline{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Сечением функции $f(\overline{x})$ прямой $l = (\overline{x_1}; \overline{x_2})$ назовем функцию $f_{\overline{x_1},\overline{x_2}}(t) = f((1-t) \cdot \overline{x_1} + t \cdot \overline{x_2})$ одного аргумента $t \in \mathbb{R}$.

Отметим, что иногда для краткости удобно опускать или сокращать обозначение прямой, по которой производится сечение, и писать $f_l(t)$ или просто $f(t)$.

Сечение всякой функции $f(\overline{x})$ произвольной прямой $(\overline{x_1}; \overline{x_2})$ обладает следующими очевидными свойствами:

1) $f(0) = f(\overline{x_1}),\ f(1) = f(\overline{x_2})$.

2) $\forall \overline{\xi} \in (\overline{x_1}; \overline{x_2})\ \exists t_{\overline{\xi}} \in (0; 1) : f(t_{\overline{\xi}}) = f(\overline{\xi})$.

3) Если $f(\overline{x})$ – непрерывная функция, то $f(t)$ – тоже непрерывная функция.

4) Если $f(\overline{x})$ – линейная функция, то $f(t)$ – линейная функция одного аргумента.

5) Если $f(\overline{x})$ – выпуклая функция, то $f(t)$ – тоже выпуклая функция, как сужение выпуклой функции на выпуклое множество.

6) Вообще говоря, сечения функции $f(\overline{x})$ прямыми $(\overline{x_1}; \overline{x_2})$ и $(\overline{x_2}; \overline{x_1})$ – это два разных сечения из-за разницы в параметризации прямых.

Пусть $f_{R^i}(t), f_{R^j}(t)$ – сечения линейных частей функции $f(\overline{x})$ некоторой прямой $(\overline{x_1}; \overline{x_2})$. Тогда разницей сечений линейных частей (дельтой линейных частей) назовем функцию $A(t) = f_{R^i}(t) - f_{R^j}(t)$.

Функция $A(t)$ обладает следующими очевидными замечательными свойствами:

1) Если $\exists \overline{\xi} \in (\overline{x_1}; \overline{x_2}) : \quad f_{R^i}(\overline{\xi}) = f_{R^j}(\overline{\xi})$, то $A(t_{\overline{\xi}}) = 0$ и наоборот. А также, в частности, $f_{R^i}(\overline{x_1}) = f_{R^j}(\overline{x_1})$ эквивалентно тому, что $A(0) = 0$, а $f_{R^i}(\overline{x_2}) = f_{R^j}(\overline{x_2})$ эквивалентно тому, что $A(1) = 0$.

2) $A(t)$ является линейной функцией одного аргумента, как разность двух линейных одноместных функций.

Пусть $f(\overline{x})$ – CPL-функция, заданная над разбиением $\{R^1, ..., R^s\}$, порожденным гиперплоскостями $\{l_1, ..., l_k\}$ и пусть R^+, R^- – два смежных класса эквивалентности по пограничному классу R^0. Тогда склейкой классов R^+, R^- назовем функцию $g(\overline{x})$, для которой выполняется два свойства:

1) $g(\overline{x}) = \max(f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x}))$ или $g(\overline{x}) = \min(f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x}))$;

2) $g(\overline{x}) = f(\overline{x}) \; \forall \overline{x} \in R^+ \cup R^- \cup R^0$.

Очевидно, что любая склейка — это CPL-функция, которую можно задать над разбиением пространства единственной прямой $l \in \{l_1, ..., l_k\}$: $R^0 \subset l$.

Ниже будет показано (лемма 11), что для любой CPL-функции склейки существуют для всех пар смежных классов R^+, R^- разбиения, задающего рассматриваемую CPL-функцию.

Склейку классов R^+, R^- для функции $f(\overline{x})$ назовем вогнутой, если ее можно представить в виде функции $g(\overline{x}) = \min(f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x}))$. Выпуклой склейкой классов R^+, R^- назовем склейку, представимую функцией $g(\overline{x}) = \max(f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x}))$.

Как далее станет известно, склейки могут быть одновременно выпуклыми и вогнутыми. Чтобы задать класс склеек, которые являются выпуклыми, но не являются вогнутыми и наоборот, введем следующие понятия.

Склейку классов R^+, R^- для функции $f(\overline{x})$ назовем строго вогнутой, если она является вогнутой, но не является выпуклой. Строго выпуклой склейкой классов R^+, R^- назовем склейку, которая является выпуклой, но не является вогнутой.

Пусть $R \subset V(L)$ – некоторое подмножество множества объемных классов, полученных при разбиении пространства $\mathbb{R}^n$ некоторым набором гиперплоскостей L.

Тогда обозначим $\partial_S(R) = \{R^i \in V(L) : \exists R^j \in R : R^i|R^j\} \cup R$, что в переводе на русский означает множество исходных классов R, расширенное на множество всех классов, смежных с классами данного множества R. Если же R – это некоторый класс (а не множество классов), то будем считать, что $\partial_S(R) = \partial_S(\{R\})$.

Пусть $R^{(1)} \in V(L)$, где L – некоторый набор гиперплоскостей. Цепью (цепью расширений) $\partial^i_S(R^{(1)}),\ i \in \mathbb{N}$ будем называть последовательность множеств $\partial^i_S(R^{(1)}) = \underbrace{\partial_S(...\partial_S(R^{(1)}))}_{\text{i раз}}$. Будем говорить, что цепь $\partial^i_S(R^{(1)}),\ i \in \mathbb{N}$ стабилизируется (на некотором индексе $i_{stab} \in \mathbb{N}$), если $\partial^{i_{stab}+1}_S(R^{(1)}) = \partial^{i_{stab}}_S(R^{(1)})$.

Обозначим также $\partial^{i-1}_{add}(R^{(1)}) = \partial^i_S(R^{(1)}) \setminus \partial^{i-1}_S(R^{(1)})$.

Наконец, напомним несколько определений и свойств из топологии и выпуклого анализа, которые будут активно использоваться в дальнейшем.

Отрезком, соединяющим две произвольные точки $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ назовем множество $[\overline{x}; \overline{y}] = \{\overline{\xi} = (1-\alpha)\cdot\overline{x} + \alpha\cdot\overline{y} | \alpha \in [0;1]\}$. Аналогично вводится понятие интервала: $(\overline{x}; \overline{y}) = \{\overline{\xi} = (1-\alpha)\cdot\overline{x} + \alpha\cdot\overline{y} | \alpha \in (0;1)\}$. Под прямой, соединяющей точки $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$, будем понимать множество $(\overline{x}; \overline{y})_\infty = \{\overline{\xi} = (1-\alpha)\cdot\overline{x} + \alpha\cdot\overline{y} | \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Отметим, что если дана некоторая точка $\overline{\xi}$ из отрезка, интервала или прямой, соединяющих точки $\overline{x}, \overline{y}$, то ей соответствует единственное значение параметра $t \in \mathbb{R}$, задающего точку $\overline{\xi}$ в данном промежутке. Будем обозначать это значение параметра, как $t_{\overline{\xi}}$.

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если $\forall \overline{x}, \overline{y} \in M$ выполняется, что $[\overline{x}; \overline{y}] \subset M$.

Функция $f : U \to \mathbb{R}$ называется выпуклой, если $U \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое множество и $\forall \overline{x_1}, \overline{x_2} \in U\ \forall \alpha \in (0;1)$ выполняется, что $f((1-\alpha)\cdot\overline{x_1} + \alpha\cdot\overline{x_2}) \leqslant (1-\alpha)\cdot f(\overline{x_1}) + \alpha\cdot f(\overline{x_2})$.

ε-окрестностью точки $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\varepsilon > 0)$ будем называть шар $O_\varepsilon(\overline{x}) = \{\overline{x'} \in \mathbb{R}^n : ||\overline{x} - \overline{x'}|| < \varepsilon\}$. Иногда удобно рассуждать в терминах окрестностей вида $O(\overline{x})$. Под такой окрестностью понимается окрестность какого-то радиуса $\varepsilon > 0$, без уточнения конкретного значения ε. Обычно такая запись употребляется вместе с кванторами всеобщности или существования, когда конкретное значение ε становится избыточным.

Точка $\overline{x} \in M \subset \mathbb{R}^n$ называется внутренней точкой множества M, если $\exists O(\overline{x}) \subset M$. Множество всех внутренних точек множества M называется внутренностью множества M и обозначается $\operatorname{int} M$.

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется открытым, если $\forall \overline{x} \in M\ \exists O(\overline{x}) : O(\overline{x}) \subset M$. Или, другими словами, если любая точка данного множества – внутренняя.

Точкой прикосновения множества $M \subset \mathbb{R}^n$ называется всякая точка $\overline{x'} \in \mathbb{R}^n$ для которой выполняется, что $\exists \{\overline{x_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M : \lim\limits_{n \to +\infty} \overline{x_n} = \overline{x'}$.

Замыканием множества M назовем множество $\overline{M}$ всех точек прикосновения множества M.

Граничной точкой множества $M \subset \mathbb{R}^n$ называется всякая точка $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, для которой выполняется, что $\forall O(\overline{x})\ \exists \overline{x'}, \overline{x''} \in O(\overline{x}) : \overline{x'} \notin M\ \&\ \overline{x''} \in M$. Множество всех граничных точек множества M называется границей множества M и обозначается ∂M.

Из курса общей топологии [12], [13] известно, что если множество M – открыто, то это эквивалентно тому, что $M = \operatorname{int} M$, а также, что $\overline{M} = \operatorname{int} M \cup \partial M$ и для любых множеств $A_1, ..., A_n$ верно, что $\overline{A_1 \cap ... \cap A_n} \subset \overline{A_1} \cap ... \cap \overline{A_n}$.

Далее представлены основные результаты данной работы. Их формулировки и доказательства для удобства разбиты на несколько разделов.

В первом, вспомогательном, разделе (фактически, это раздел 4) описывается общая схема доказательства основной теоремы со ссылками на соответствующие леммы, в которых описываемые идеи превращаются из гипотез в доказанные суждения. В данном разделе все утверждения формулируются в виде неформализованных гипотез.

Во втором разделе (фактически, это раздел 5) описываются технические леммы, которые требуются для доказательства основных лемм (основных идей из описываемой в первом разделе схемы доказательства).

В третьем разделе (фактически, это раздел 6) строго формулируются и доказываются основные идеи, описанные в первом разделе.

В четвертом разделе (фактически, это раздел 7) доказывается основное утверждение о выразимости произвольной n-местной CPL-функции в виде нейронной схемы над базисом B_1 и несколько следствий из него.

3. Схема доказательства основного результата

Доказательство выразимости CPL-функций над базисом B_1 идейно опирается на результаты о выразимости выпуклых CPL-функций, полученные в работе [11], к которым добавлены новые гипотезы о поведении CPL-функций:

1) Сложение и умножение на константу любой CPL-функции снова дает CPL-функцию, при этом множество гиперплоскостей, над которыми можно задать результат сложения, можно взять равным объединению множеств гиперплоскостей исходных функций. А умножение на константу вообще не меняет число порождающих гиперплоскостей. Данная гипотеза формализована и доказана в лемме 18.

Гипотеза 1, формально, не используется в процессе доказательства основного утверждения, т.к. скрыта в доказательстве гипотезы 2, однако идейно она включается в основные гипотезы, т.к. при помощи нее осуществляется контроль неизменности числа склеек при упомянутых преобразованиях.

2) Добавление вогнутой функции к CPL-функции уменьшает число строго выпуклых склеек CPL-функции (при определенных предположениях, связанных с гипотезой 1). Частный случай данной гипотезы (когда вогнутая функция — это вогнутая склейка), достаточный для доказательства основного результата, доказан в лемме 19.

3) Если CPL-функция не имеет строго выпуклых склеек, то она вогнута (лемма 21).

Ниже, для упрощения понимания, представлена схема доказательства утверждения о выразимости CPL-функций над базисом B_1. Пусть f – CPL-функция. Тогда:

1) Если f не имеет строго выпуклых склеек, то она вогнута (гипотеза 3) и ее можно представить нейронной схемой [11].

2) Если f имеет строго выпуклые склейки, то смоделируем (выразим) одну из таких склеек нейронной схемой g_1 и вычтем ее из f. Получим функцию $f_1 = f - g_1$, заданную над теми же гиперплоскостями, что и функция f (гипотеза 1), поэтому число склеек в f_1 не увеличилось. При этом у функции f_1 уменьшилось число строго выпуклых склеек (гипотеза 2).

3) Проделывая пункты 3.1. и 3.2. для получаемых в пункте 3.2 функций $f_j, j \in \mathbb{N}$, получаем в некоторый момент времени функцию $f_N = f - \sum\limits_{i \in \{1,...,N\}} g_i$ без строго выпуклых склеек.

4) Если у функции f_N нет строго выпуклых склеек, то она — вогнутая (гипотеза 3), поэтому ее можно восстановить некоторой нейронной схемой [11].

5) Но $f_N + \sum\limits_{i \in \{1,...,N\}} g_i$ по построению в точности совпадает с f, а функции $g_i,\ i \in \{1,...,N\},\ f_N$ выразимы нейронными схемами. Но тогда и f выразима нейронной схемой, как суперпозиция суммы и схем $g_i,\ i \in \{1,...,N\},\ f_N$.

6) Далее производится оценка числа N для оценки нелинейной сложности полученной схемы. Нелинейная глубина полученной схемы оценивается исходя из оценки нелинейных глубин схем g_i, $i \in \{1, ..., N\}$, f_N.

4. Вспомогательные леммы

Далее формулируются и доказываются вспомогательные леммы, которые не являются основными гипотезами, сформулированными в разделе 3, однако активно используются как при доказательстве данных гипотез, так и при доказательстве основного утверждения. Доказательства лемм 1, 2, 3 и 4 можно найти в работе [11].

Лемма 1. *Пусть* $f(\overline{x}) = a_1 \cdot x_1 + ... + a_n \cdot x_n + d$ *– линейная функция и имеются две точки* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$*. Тогда* $\forall \alpha \in [0;1]$ $f((1-\alpha)\cdot\overline{x} + \alpha\cdot\overline{y}) = (1-\alpha)\cdot f(\overline{x}) + \alpha\cdot f(\overline{y})$.

Лемма 2. *Пусть* l *– гиперплоскость, определяемая уравнением* $a_1 \cdot x_1 + ... + a_n \cdot x_n + d = 0$*, а также* l^+ *и* l^- *– соответствующие полупространства, определяемые данной гиперплоскостью. Тогда верны следующие утверждения:*

1) $l = \partial l^+, l = \partial l^-$.

2) l^+, l^- *– открытые множества.*

3) $\overline{l^+} = l^+ \cup l$.

4) $l^+, l^-, \overline{l^+}, \overline{l^-}, l$ *– выпуклые множества.*

Лемма 3. *Для всякого разбиения* $\{R^1, ..., R^s\}$ *пространства* $\mathbb{R}^n$ *выполнены следующие свойства:*

1) *Любой непустой объемный класс* R^i *является выпуклым открытым множеством.*

2) *Для любого непустого объемного класса* R^i *верно, что* $\overline{R^i} = R^i \cup \partial_{lin} R^i$.

3) *Любой непустой плоский класс содержится в пересечении замыканий как минимум двух непустых объемных классов эквивалентности.*

Лемма 4. *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– выпуклая непрерывная кусочно-линейная функция, заданная над разбиением* $\{R^1, ..., R^s\}$ *пространства*

$\mathbb{R}^n$*, а* R^i, R^j *– два произвольных непустых объемных класса из данного разбиения.*

Тогда верно, что $\forall \overline{x} \in R^j \ f(\overline{x}) \geqslant f_{R^i}(\overline{x})$.

Лемма 5. *Пусть даны два различных непустых объемных класса* R^+, R^- *из одного разбиения. Тогда они смежные по* $(n-1)$*-мерному классу* $R^0 \iff R^0 \neq \varnothing$ *и* $\sigma(R^+) = (\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, 1, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k)$, $\sigma(R^-) = (\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, -1, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k)$, $\sigma(R^0) = (\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, 0, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k)$, *где* $\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k \in \{-1, 1\}$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$: Пусть $R^0 \neq \varnothing$ – $(n-1)$-мерный класс. Тогда по лемме 3 найдутся непустые объемные классы R^+, R^- такие, что $R^+ \neq R^-$ и $R^0 \subset \overline{R^+} \cap \overline{R^-}$. По определению, они являются смежными по R^0.

Причем, так как $\sigma(R^0) = (\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, 0, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k)$, то из доказательства [11] леммы 3 видно, что $\sigma(R^+) = (\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, 1, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k)$, $\sigma(R^-) = (\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, -1, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k)$.

В силу единственности класса, обладающего заданной сигнатурой, получаем, что классы R^+, R^- с требуемыми сигнатурами существуют, непусты, объемны и смежны по R^0.

$(\Rightarrow)$: Пусть R^+, R^- – смежные по классу R^0. По определению это означает, что $R^0 \neq \varnothing$, а также, что верно следующее:

$$R^0 \subset \overline{R^+} \cap \overline{R^-} \tag{3}$$

Отметим также, что так как R^0 – $(n-1)$-мерный, то $\sigma(R^0) = (\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, 0, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k)$, где $\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k \in \{-1, 1\}$.

Далее, по лемме 3 для любого непустого объемного класса R^j верно (4).

$$\overline{R^j} = R^j \cup \partial_{lin} \ R^j \tag{4}$$

Но тогда, из (3), (4) и таких очевидных фактов, как $R^+ \cap R^- = \varnothing$, $R^- \cap \partial_{lin} \ R^+ = \varnothing$ и $R^+ \cap \partial_{lin} \ R^- = \varnothing$, следует (5).

$$R^0 \in \partial_{set\ lin} \ R^+ \cap \partial_{set\ lin} \ R^- \tag{5}$$

Но в $\partial_{set\ lin} \ R^+$ содержатся только классы, полученные занулениями компонент сигнатуры R^+. Следовательно, $\forall R \in \partial_{set\ lin} \ R^+$ верно, что $\sigma_i(R) = \sigma_i(R^+)$, если $\sigma_i(R^+) \neq 0$.

Учитывая сказанное и тот факт, что $R^0 \in \partial_{set\ lin} \ R^+$ (следует из (5)), получаем, что $\sigma_i(R^0) = \sigma_i(R^+) \stackrel{def}{=} \sigma_i \ \forall i \in \{1, ..., k\} \setminus \{u\}$. Аналогичное верно и для R^-, то есть $\sigma_i(R^0) = \sigma_i(R^-) \stackrel{def}{=} \sigma_i \ \forall i \in \{1, ..., k\} \setminus \{u\}$.

Таким образом, $\sigma_i(R^+) = \sigma_i(R^-)$ для $\forall i \in \{1, ..., k\} \setminus \{u\}$.

При этом, по условию, $R^+ \neq R^-$. Следовательно, сигнатуры классов R^+, R^- также различны. А из того, что $\sigma_i(R^+) = \sigma_i(R^-)$ для $\forall i \in \{1, ..., k\} \setminus \{u\}$, следует, что их сигнатуры могут различаться лишь в u-ой компоненте.

При этом R^+, R^- – объемные, следовательно, в их сигнатурах отсутствуют нули.

Поэтому $\sigma_i(R^+) = \sigma_i(R^-) \in \{-1, 1\}$ $\forall i \in \{1, ..., k\} \setminus \{u\}$. Без ограничения общности, положим, что $\sigma_u(R^+) = 1$, а $\sigma_u(R^-) = -1$, откуда и следует доказываемое. $\square$

Лемма 6. *Пусть R^+, R^-, R^0 - классы некоторого разбиения $R(L)$, обладающие сигнатурами $\sigma(R^+) = (\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, 1, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k)$, $\sigma(R^-) = (\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, -1, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k)$ и $\sigma(R^0) = (\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, 0, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k)$, причем $R^+, R^- \neq \varnothing$. Тогда:*

1. $\overline{R^+} \cup \overline{R^-}$, $\overline{R^+ \cup R^-}$ и $R^+ \cup R^- \cup R^0$ – выпуклые множества.

2. $\forall \overline{x} \in R^+, \forall \overline{y} \in R^-$ верно, что $\exists \overline{\xi} \in [\overline{x}; \overline{y}] \cap R^0$.

Доказательство. 1. Рассмотрим классы R^+, R^-. По условию, сигнатуры классов R^+, R^- отличаются только в u-ой компоненте и имеют вид $\sigma(R^+) = (\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, 1, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k), \sigma(R^-) = (\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, -1, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k)$. Это означает, что R^+ и R^- являются решениями систем (6) и (7), соответственно.

$$\begin{cases} \sigma_1 \cdot l_1(\overline{x}) > 0 \\ ... \\ \sigma_{u-1} \cdot l_{u-1}(\overline{x}) > 0 \\ l_u(\overline{x}) > 0 \\ \sigma_{u+1} \cdot l_{u+1}(\overline{x}) > 0 \\ ... \\ \sigma_k \cdot l_k(\overline{x}) > 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 \cdot l_1(\overline{x}) > 0 \\ ... \\ \sigma_{u-1} \cdot l_{u-1}(\overline{x}) > 0 \\ l_u(\overline{x}) < 0 \\ \sigma_{u+1} \cdot l_{u+1}(\overline{x}) > 0 \\ ... \\ \sigma_k \cdot l_k(\overline{x}) > 0 \end{cases} \tag{7}$$

Но тогда по пункту 2 леммы 3 верно, что $\overline{R^+}$ и $\overline{R^-}$ являются решениями систем (8) и (9), соответственно.

$$\begin{cases} \sigma_1 \cdot l_1(\overline{x}) \geqslant 0 \\ ... \\ \sigma_{u-1} \cdot l_{u-1}(\overline{x}) \geqslant 0 \\ l_u(\overline{x}) \geqslant 0 \\ \sigma_{u+1} \cdot l_{u+1}(\overline{x}) \geqslant 0 \\ ... \\ \sigma_k \cdot l_k(\overline{x}) \geqslant 0 \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 \cdot l_1(\overline{x}) \geqslant 0 \\ ... \\ \sigma_{u-1} \cdot l_{u-1}(\overline{x}) \geqslant 0 \\ l_u(\overline{x}) \leqslant 0 \\ \sigma_{u+1} \cdot l_{u+1}(\overline{x}) \geqslant 0 \\ ... \\ \sigma_k \cdot l_k(\overline{x}) \geqslant 0 \end{cases} \tag{9}$$

Полученные системы (8) и (9) отличаются только в неравенстве с номером u. Поэтому $\overline{R^+} \cup \overline{R^-}$ можно записать в виде решения системы (10).

$$\begin{cases} \sigma_1 \cdot l_1(\overline{x}) \geqslant 0 \\ ... \\ \sigma_{u-1} \cdot l_{u-1}(\overline{x}) \geqslant 0 \\ l_u(\overline{x}) \geqslant 0 \cup l_u(\overline{x}) \leqslant 0 \\ \sigma_{u+1} \cdot l_{u+1}(\overline{x}) \geqslant 0 \\ ... \\ \sigma_k \cdot l_k(\overline{x}) \geqslant 0 \end{cases} \tag{10}$$

Строку с номером u в системе (10) можно, очевидно, поменять с $l_u(\overline{x}) \geqslant 0 \cup l_u(\overline{x}) \leqslant 0$ на $l_u(\overline{x}) \in \mathbb{R}$, в результате чего получаем систему (11).

$$\begin{cases} \sigma_1 \cdot l_1(\overline{x}) \geqslant 0 \\ ... \\ \sigma_{u-1} \cdot l_{u-1}(\overline{x}) \geqslant 0 \\ l_u(\overline{x}) \in \mathbb{R} \\ \sigma_{u+1} \cdot l_{u+1}(\overline{x}) \geqslant 0 \\ ... \\ \sigma_k \cdot l_k(\overline{x}) \geqslant 0 \end{cases} \qquad (11)$$

Но $\mathbb{R}$ – выпуклое множество, как и множества, задаваемые неравенствами $\sigma_i \cdot l_i(\overline{x}) \geqslant 0, i \in \{1, ..., u-1, u+1, ..., k\}$. То есть $\overline{R^+} \cup \overline{R^-}$ задается в виде пересечения конечного числа выпуклых множеств, откуда следует, что множество $\overline{R^+} \cup \overline{R^-}$ – выпукло. Аналогично доказываются и остальные случаи.

2. Возьмем $\forall \overline{x} \in R^+, \forall \overline{y} \in R^-$ и рассмотрим отрезок $[\overline{x}; \overline{y}]$. Очевидно, что $R^+, R^- \subset R^+ \cup R^- \cup R^0$, поэтому верно (12).

$$\overline{x}, \overline{y} \in R^+ \cup R^- \cup R^0 \qquad (12)$$

Но $R^+ \cup R^- \cup R^0$ – выпуклое множество, поэтому из (12) следует, что $[\overline{x}; \overline{y}] \subset R^+ \cup R^- \cup R^0$. Последнее означает, что $\forall \overline{\xi} \in [\overline{x}; \overline{y}]$ $\sigma_u(\overline{\xi}) \in \{-1, 0, 1\}$, а $\sigma_i(\overline{\xi}) = \sigma_i(R^+) = \sigma_i(R^-)$ при $i \in \{1, ..., k\} \setminus \{u\}$.

Далее, так как $\sigma_u(\overline{x}) = 1, \sigma_u(\overline{y}) = -1$, то $l_u(\overline{x}) > 0$ и $l_u(\overline{y}) < 0$. Рассмотрим $t = \frac{l_u(\overline{x})}{l_u(\overline{x}) - l_u(\overline{y})}$. Очевидно, что $t \in (0; 1)$. Тогда t порождает некоторую точку $\overline{\xi} = (1-t) \cdot \overline{x} + t \cdot \overline{y} \in (\overline{x}; \overline{y}) \subset [\overline{x}; \overline{y}]$.

Причем $l_u(\overline{\xi}) = l_u((1-t) \cdot \overline{x} + t \cdot \overline{y}) \overset{\text{лемма 1}}{=} (1-t) \cdot l_u(\overline{x}) + t \cdot l_u(\overline{y}) = (1 - \frac{l_u(\overline{x})}{l_u(\overline{x}) - l_u(\overline{y})}) \cdot l_u(\overline{x}) + \frac{l_u(\overline{x})}{l_u(\overline{x}) - l_u(\overline{y})} \cdot l_u(\overline{y}) = \frac{l_u(\overline{x}) - l_u(\overline{y}) - l_u(\overline{x})}{l_u(\overline{x}) - l_u(\overline{y})} \cdot l_u(\overline{x}) + \frac{l_u(\overline{x}) \cdot l_u(\overline{y})}{l_u(\overline{x}) - l_u(\overline{y})} = \frac{l_u(\overline{x}) \cdot l_u(\overline{y})}{l_u(\overline{x}) - l_u(\overline{y})} - \frac{l_u(\overline{x}) \cdot l_u(\overline{y})}{l_u(\overline{x}) - l_u(\overline{y})} = 0$.

Таким образом, $l_u(\overline{\xi}) = 0$, а $\sigma_i(\overline{\xi}) = \sigma_i(R^+) = \sigma_i(R^-)$ $\forall i \in \{1, ..., k\} \setminus \{u\}$. Следовательно, $\overline{\xi} \in R^0$. При этом, по построению, $\overline{\xi} \in (\overline{x}; \overline{y}) \subset [\overline{x}; \overline{y}]$. То есть нашлась точка $\overline{\xi} \in R^0 \cap [\overline{x}; \overline{y}]$.

□

Лемма 7. *Если R^+, R^- – смежные классы, а R^0 – пограничный класс, то:*

1. $\overline{R^+} \cup \overline{R^-}$, $\overline{R^+ \cup R^-}$ и $R^+ \cup R^0 \cup R^-$ – выпуклые множества.

2. $\forall \overline{x} \in R^+, \forall \overline{y} \in R^-$ верно, что $\exists \overline{\xi} \in [\overline{x}; \overline{y}] \cap R^0$.

Доказательство. Прямое следствие лемм 5 и 6. □

Лемма 5 устанавливает некую взаимосвязь между смежными классами и поведением их сигнатур, что существенно упрощает работу по определению смежных классов. Однако на практике проверка условия $R^0 \neq \varnothing$ иногда является избыточной, так как часто требуется установить просто факт смежности классов без знания чего-либо о пограничном классе R^0, по которому данные классы являются смежными.

Поэтому взаимосвязь из леммы 5 можно существенно усилить, убрав условие $R^0 \neq \varnothing$ и сведя проверку смежности реально существующих в пространстве $\mathbb{R}^n$ (то есть непустых) классов к простой проверке поведения их сигнатур. Данная усиленная взаимосвязь формулируется и доказывается в следующей лемме.

Лемма 8. *Два непустых, различных объемных класса R^+, R^- являются смежными* $\iff$ $\sigma(R^+) = (\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, 1, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k)$, $\sigma(R^-) = (\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, -1, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k)$.

Доказательство. $(\Rightarrow)$: Если два непустых объемных класса R^+, R^- смежны, то по определению $\exists R^0 \neq \varnothing$, являющийся $(n-1)$-мерным, такой, что $R^0 \subset \overline{R^+} \cap \overline{R^-}$.

То есть классы R^+, R^- являются смежными по некоторому $(n-1)$-мерному классу R^0. Но тогда, по лемме 5, $\sigma(R^+) = (\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, 1, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k)$, $\sigma(R^-) = (\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, -1, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k)$.

$(\Leftarrow)$: Пусть $\sigma(R^+) = (\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, 1, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k)$, $\sigma(R^-) = (\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, -1, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k)$ и при этом R^+, R^- – непустые и объемные. Тогда по пункту 2 леммы 6 $\forall \overline{x} \in R^+, \forall \overline{y} \in R^- \ \exists \overline{\xi} \in [\overline{x}; \overline{y}] \cap R^0$, где R^0 – класс, обладающий сигнатурой $\sigma(R^0) = (\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, 0, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k)$.

Но тогда получаем, что точка $\overline{\xi}$ имеет сигнатуру $\sigma(\overline{\xi}) = (\sigma_1, ..., \sigma_{u-1}, 0, \sigma_{u+1}, ..., \sigma_k)$, откуда следует, что $\overline{\xi} \in R^0$. Из последнего следует, что $R^0 \neq \varnothing$. Более того, так как $\sigma(R^0)$ содержит всего один нуль, то данный класс является $(n-1)$-мерным.

Так как все условия леммы 5 выполнены, то $R^+ | R^-$. $\square$

Лемма 9. *Пусть $f(\overline{x})$ – CPL-функция, заданная над разбиением $\{R^1, ..., R^s\}$, порожденным гиперплоскостями $\{l_1, ..., l_k\}$. И пусть также $R^+, R^- \in \{R^1, ..., R^s\}$ – смежные классы, а $R^0 \in \{R^1, ..., R^s\}$ – пограничный класс. Тогда:*

1. $\forall \overline{x} \in R^0 \ f(\overline{x}) = f_{R^+}(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x})$.

2. Если $\forall \overline{x} \in R^0 \ f(\overline{x}) = f_{R^+}(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x})$ и $R^0 \subset l$, где l – некоторая гиперплоскость, то $\forall \overline{x} \in l \ f(\overline{x}) = f_{R^+}(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x})$.

Аналогичное утверждение верно для выражения $n(\overline{x}) = C$, где $n(\overline{x})$ – линейная функция, а C – константа. Другими словами, если $\forall \overline{x} \in R^0 \ n(\overline{x}) = C$ и $R^0 \subset l$, где l – некоторая гиперплоскость, то $\forall \overline{x} \in l \ n(\overline{x}) = C$.

3. Если $\exists \overline{x} \in R^+ \cup R^- \ f_{R^+}(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x})$, то $f_{R^+} = f_{R^-}$ (то есть $\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n \ f_{R^+}(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x})$).

4. Если $\exists \overline{x} \in R^+$ $f_{R^+}(\overline{x}) > f_{R^-}(\overline{x})$, *то* $\forall \overline{x} \in l^+$ $f_{R^+}(\overline{x}) > f_{R^-}(\overline{x})$ *и* $\forall \overline{x} \in l^-$ $f_{R^+}(\overline{x}) < f_{R^-}(\overline{x})$.

5. Если $\exists \overline{x} \in R^+$ $f_{R^+}(\overline{x}) < f_{R^-}(\overline{x})$, *то* $\forall \overline{x} \in l^+$ $f_{R^+}(\overline{x}) < f_{R^-}(\overline{x})$ *и* $\forall \overline{x} \in l^-$ $f_{R^+}(\overline{x}) > f_{R^-}(\overline{x})$.

Доказательство. **1.** Пусть $f(\overline{x})$ – CPL-функция, R^+, R^- – смежные классы, а R^0 – пограничный при них класс. Рассмотрим $\forall \overline{x^*} \in R^0$. В силу того, что $R^0 \subset \overline{R^+} \cap \overline{R^-} \subset \overline{R^+}, \overline{R^-}$, получаем (13).

$$\exists \{\overline{x_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset R^+, \exists \{\overline{y_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset R^- : \lim_{n\to+\infty} \overline{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \overline{y_n} = \overline{x^*} \tag{13}$$

При этом, так как $\forall \overline{x} \in R^+$ $f(\overline{x}) = f_{R^+}(\overline{x})$, то $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(\overline{x_n}) = f_{R^+}(\overline{x_n})$. Аналогично, $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(\overline{y_n}) = f_{R^-}(\overline{y_n})$. Но тогда верно (14)

$$\lim_{n\to+\infty} f(\overline{x_n}) = \lim_{n\to+\infty} f_{R^+}(\overline{x_n}),\ \lim_{n\to+\infty} f(\overline{y_n}) = \lim_{n\to+\infty} f_{R^-}(\overline{y_n}) \tag{14}$$

В силу непрерывности функций f, f_{R^+}, f_{R^-}, можно внести пределы под данные функции, в результате из (14) получим (15).

$$f(\lim_{n\to+\infty} \overline{x_n}) = f_{R^+}(\lim_{n\to+\infty} \overline{x_n}),\ f(\lim_{n\to+\infty} \overline{y_n}) = f_{R^-}(\lim_{n\to+\infty} \overline{y_n}) \tag{15}$$

Переходя к пределу в (15) и учитывая (13), получаем, что $f(\overline{x^*}) = f_{R^+}(\overline{x^*})$, $f(\overline{x^*}) = f_{R^-}(\overline{x^*})$. Отсюда и следует, что $f(\overline{x^*}) = f_{R^+}(\overline{x^*}) = f_{R^-}(\overline{x^*})$.

2. Пусть $\forall \overline{x} \in R^0$ $f(\overline{x}) = f_{R^+}(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x})$ и $R^0 \subset l$. Отметим, что, по определению, множество R^0 задается системой неравенств (16).

$$\begin{cases} \sigma_1 \cdot l_1(\overline{x}) > 0 \\ ... \\ \sigma_{i-1} \cdot l_{i-1}(\overline{x}) > 0 \\ \sigma_i \cdot l_i(\overline{x}) = 0 \\ \sigma_{i+1} \cdot l_{i+1}(\overline{x}) > 0 \\ ... \\ \sigma_k \cdot l_k(\overline{x}) > 0 \end{cases} \tag{16}$$

Отметим, что $\sigma_i \cdot l_i(\overline{x})$ можно представить в виде $a_1 \cdot x_1 + ... + a_n \cdot x_n + d$, где $a_1, ..., a_n, d \in \mathbb{R}$ – некоторые константы, причем $a_1, ..., a_n$ не равны нулю одновременно. Без ограничения общности, будем считать, что $a_n \neq$

0. Но тогда уравнение $\sigma_i \cdot l_i(\overline{x}) = 0$ можно записать в виде выражения (17), в котором $\widetilde{a}_i = a_i/a_n, i \in \{1, ..., n-1\},\ \widetilde{d} = d/a_n$.

$$x_n = -\widetilde{a}_1 \cdot x_1 - ... - \widetilde{a}_{n-1} \cdot x_{n-1} - \widetilde{d} \tag{17}$$

Заменяя в (16) переменную x_n на линейную комбинацию значений $x_1, ..., x_{n-1}, 1$ по уравнению (17), получаем, что систему равенств и неравенств (16) можно переписать в виде эквивалентной системы (18), в которой $l'_j(x_1, ..., x_{n-1}), j = 1, ..., k$ – линейные функции, а $l'_i(x_1, ..., x_{n-1}) = -\widetilde{a}_1 \cdot x_1 - ... - \widetilde{a}_{n-1} \cdot x_{n-1} - \widetilde{d}$.

$$\begin{cases} l'_1(x_1, ..., x_{n-1}) > 0 \\ ... \\ l'_{i-1}(x_1, ..., x_{n-1}) > 0 \\ x_n = l'_i(x_1, ..., x_{n-1}) \\ l'_{i+1}(x_1, ..., x_{n-1}) > 0 \\ ... \\ l'_k(x_1, ..., x_{n-1}) > 0 \end{cases} \tag{18}$$

Очевидно, что система (19), полученная из (18) удалением уравнения $x_n = l'_i(x_1, ..., x_{n-1})$, является системой строгих неравенств, то есть задает некоторый объемный класс в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$. По лемме 3 данный класс является открытым множеством, поэтому (19) задает открытое множество R^0_{n-1} в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$.

$$\begin{cases} l'_1(x_1, ..., x_{n-1}) > 0 \\ ... \\ l'_{i-1}(x_1, ..., x_{n-1}) > 0 \\ l'_{i+1}(x_1, ..., x_{n-1}) > 0 \\ ... \\ l'_k(x_1, ..., x_{n-1}) > 0 \end{cases} \tag{19}$$

Далее введем отображения $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ и $\pi^{-1} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, действующие по законам $\pi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{n-1})$ и $\pi^{-1}(x_1, ..., x_{n-1}) = (x_1, ..., x_{n-1}, l'_i(x_1, ..., x_{n-1}))$, соответственно.

Выберем некоторую точку $\overline{x} \in R^0$ и рассмотрим точку $\overline{x'} = (x_1, ..., x_{n-1}) = \pi(\overline{x}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Из построения множества R^0_{n-1} и того факта, что $\overline{x} \in R^0$, выполняется $\overline{x'} \in R^0_{n-1}$. И так как R^0_{n-1} – открыто, то существует некоторая окрестность $O_\varepsilon(\overline{x'})$ такая, что $O_\varepsilon(\overline{x'}) \subset R^0_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

Далее возьмем произвольную точку $\overline{y} = (y_1, ..., y_n) \in l$ и рассмотрим точку $\overline{y'} = (y_1, ..., y_{n-1}) = \pi(\overline{y}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Соединим точки $\overline{x'}$ и $\overline{y'}$ отрезком $[\overline{x'};\overline{y'}]$. Очевидно, что $\exists\overline{\xi'} \in (\overline{x'};\overline{y'}) \cap O_\varepsilon(\overline{x'})$, где $(\overline{x'};\overline{y'}) \subset [\overline{x'};\overline{y'}]$. Рассмотрим точки $\overline{x} = \pi^{-1}(\overline{x'})$, $\overline{\xi} = \pi^{-1}(\overline{\xi'})$. По построению R^0_{n-1} следует, что $\overline{x}, \overline{\xi} \in R^0$.

Тогда, по условию, для точек $\overline{x}, \overline{\xi}$ верно, что $f_{R^+}(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x})$ и $f_{R^+}(\overline{\xi}) = f_{R^-}(\overline{\xi})$. Отметим также, что $\overline{\xi} \in (\overline{x};\overline{y}) \subset [\overline{x};\overline{y}]$. Действительно, пусть $t_{\overline{\xi'}} \in (0;1)$ – параметр интервала $(\overline{x'};\overline{y'})$, задающий точку $\overline{\xi'}$. Это означает, что $\overline{\xi'} = (\xi_1, ..., \xi_{n-1})$, где $\xi_i,\ i = 1, ..., n-1$ определены по формуле (20).

$$\xi_i = (1-t) \cdot x_i + t \cdot y_i,\ i = 1, ..., n-1 \tag{20}$$

Но тогда, по определению π^{-1}, $\overline{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_{n-1}, \xi_n)$, где $\xi_n = -\widetilde{a}_1 \cdot \xi_1 - ... - \widetilde{a}_{n-1} \cdot \xi_{n-1} - \widetilde{d}$. Выражая в последней формуле значения ξ_i, $i = 1, ..., n-1$, используя выражение (20), получаем, что $\xi_n = -\widetilde{a}_1 \cdot ((1-t_{\overline{\xi'}}) \cdot x_1 + t_{\overline{\xi'}} \cdot y_1) - ... - \widetilde{a}_{n-1} \cdot ((1-t_{\overline{\xi'}}) \cdot x_{n-1} + t_{\overline{\xi'}} \cdot y_{n-1}) - \widetilde{d} = -\widetilde{a}_1 \cdot ((1-t_{\overline{\xi'}}) \cdot x_1) - \widetilde{a}_1 \cdot (t_{\overline{\xi'}} \cdot y_1) - ... - \widetilde{a}_{n-1} \cdot ((1-t_{\overline{\xi'}}) \cdot x_{n-1}) - \widetilde{a}_{n-1} \cdot (t_{\overline{\xi'}} \cdot y_{n-1}) - \widetilde{d} = (1-t_{\overline{\xi'}}) \cdot (-\widetilde{a}_1 \cdot x_1 - ... - \widetilde{a}_{n-1} \cdot x_{n-1} - \widetilde{d}) + t_{\overline{\xi'}} \cdot (-\widetilde{a}_1 \cdot y_1 - ... - \widetilde{a}_{n-1} \cdot y_{n-1} - \widetilde{d}) = (1-t_{\overline{\xi'}}) \cdot x_n + t_{\overline{\xi'}} \cdot y_n$.

Таким образом, $\xi_i = (1-t_{\overline{\xi'}}) \cdot x_i + t_{\overline{\xi'}} \cdot y_i$, $i = 1, ..., n$, где $t_{\overline{\xi'}} \in (0;1)$, откуда по определению следует, что $\overline{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_{n-1}, \xi_n) \in (\overline{x};\overline{y}) \subset [\overline{x};\overline{y}]$. Причем отметим, что точку $\overline{\xi}$ на промежутке $(\overline{x};\overline{y})$ задает тот же параметр $t_{\overline{\xi'}}$, который использовался при задании точки $\overline{\xi'}$ на промежутке $(\overline{x'};\overline{y'})$. Другими словами, $t_{\overline{\xi'}} = t_{\overline{\xi}}$, где $t_{\overline{\xi}}$ – параметр, задающий точку $\overline{\xi} \in (\overline{x};\overline{y}) \subset [\overline{x};\overline{y}]$.

Рассмотрим разность $A(t) = f_{R^+}(t) - f_{R^-}(t)$ сечений $f_{R^+}(t) = f_{R^+}((1-t) \cdot \overline{x} + t \cdot \overline{y})$, $f_{R^-}(t) = f_{R^-}((1-t) \cdot \overline{x} + t \cdot \overline{y})$ линейных частей $f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x})$ на прямой $(\overline{x};\overline{y})_\infty$.

По построению $\overline{\xi}$, верно, что $A(t_{\overline{\xi}}) = 0$. Но из того, что $A(0) = 0, A(t_{\overline{\xi}}) = 0,\ t_{\overline{\xi}} \neq 0$, а также из того факта, что $A(t)$ – линейная функция одного аргумента, следует, что $\forall t \in \mathbb{R}\ A(t) = 0$, откуда следует, что $A(1) = 0$. А это означает, по определению, что $f_{R^+}(\overline{y}) = f_{R^-}(\overline{y})$.

Таким образом, $\forall \overline{y} \in l\ f_{R^+}(\overline{y}) = f_{R^-}(\overline{y})$. Получили доказываемое.

Для доказательства пункта 2 применительно к выражению $n(\overline{x}) = C$ достаточно рассмотреть функции $f_{R^+}(\overline{x}) = n(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x}) = C$, абстрагировавшись от того, что $f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x})$ – линейные части некоторой CPL-функции, после чего применить уже доказанную часть данного пункта.

3. Покажем, что, если $\exists \overline{x} \in R^+ \cup R^- : f_{R^+}(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x})$, то $f_{R^+} = f_{R^-}$. Выберем точку $\overline{x} \in R^+ \cup R^- : f_{R^+}(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x})$. Без ограничения общности, будем считать, что $\overline{x} \in R^+$.

Рассмотрим R^0 – пограничный класс для смежных классов $R^+ \cup R^-$. Очевидно, что среди гиперплоскостей $\{l_1, ..., l_k\}$, порождающих разбиение $\{R^1, ..., R^s\}$, существует такая гиперплоскость l, что $R^0 \subset l$. Тогда по лемме 5, $R^+ \subset l^+$ и $R^- \subset l^-$.

Далее возьмем $\forall \overline{y} \in l^-$. Очевидно, что $\exists \overline{\xi} \in l \cap (\overline{x}; \overline{y})$. Но по пункту 1 данной леммы $\forall \overline{\eta} \in R^0$ $f_{R^+}(\overline{\eta}) = f_{R^-}(\overline{\eta})$, а тогда по пункту 2 данной леммы $\forall \overline{\eta} \in l$ $f_{R^+}(\overline{\eta}) = f_{R^-}(\overline{\eta})$, в частности $f_{R^+}(\overline{\xi}) = f_{R^-}(\overline{\xi})$.

Рассмотрим функцию $A(t) = f_{R^+}(t) - f_{R^-}(t)$, где $f_{R^+}(t)$, $f_{R^-}(t)$ – сечения функций $f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x})$ прямой $(\overline{x}; \overline{y})_\infty$. По условию для выбранного $\overline{x} \in R^+$ верно, что $f_{R^+}(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x})$, поэтому $A(0) = 0$, а так как $f_{R^+}(\overline{\xi}) = f_{R^-}(\overline{\xi})$, то $A(t_{\overline{\xi}}) = 0$, где $t_{\overline{\xi}} \in (0; 1) :\ \overline{\xi} = (1 - t_{\overline{\xi}}) \cdot \overline{x} + t_{\overline{\xi}} \cdot \overline{y}$.

Но тогда, в силу того, что $A(t)$ – линейная функция одного аргумента, то из $A(0) = 0$, $A(t_{\overline{\xi}}) = 0$ и того факта, что $t_{\overline{\xi}} \neq 0$, получаем, что $\forall t \in \mathbb{R}$ $A(t) = 0$. Тогда и $A(1) = 0$, откуда следует, что $f_{R^+}(\overline{y}) = f_{R^-}(\overline{y})$.

Но тогда, взяв $\forall \overline{y} \in l^-$, $\forall \overline{x} \in l^+$ и рассуждая аналогично (построив отрезок $[\overline{y}; \overline{x}]$ и рассмотрев на нем поведение функции $A(t)$, построенной на сечениях функций $f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x})$ прямой $(\overline{y}; \overline{x})_\infty$), получаем, что $\forall \overline{x} \in l^+$ $f_{R^+}(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x})$.

Таким образом, из всего вышесказанного получили, что $\forall \overline{x} \in l^+, l^-, l$ $f_{R^+}(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x})$. Но тогда, в силу того, что $l^+ \cup l \cup l^- = \mathbb{R}^n$, получаем доказываемое.

4. Пусть $\exists \overline{x} \in R^+ : f_{R^+}(\overline{x}) > f_{R^-}(\overline{x})$. Покажем, что тогда $\forall \overline{x} \in l^+ : f_{R^+}(\overline{x}) > f_{R^-}(\overline{x})$ и $\forall \overline{x} \in l^- : f_{R^+}(\overline{x}) < f_{R^-}(\overline{x})$.

Доказывается по той же схеме, что и пункт 3. Возьмем $\overline{x} \in R^+ : f_{R^+}(\overline{x}) > f_{R^-}(\overline{x})$ и выберем $\forall \overline{y} \in l^-$. После чего рассмотрим $A(t) = f_{R^+}(t) - f_{R^-}(t)$, где $f_{R^+}(t), f_{R^-}(t)$ – сечения функций $f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x})$ прямой $(\overline{x}; \overline{y})_\infty$.

Далее, по построению, $\exists \overline{\xi} \in (\overline{x}; \overline{y}) \cap l$. По определению выражение $\overline{\xi} \in (\overline{x}; \overline{y})$ означает, что $\exists t_{\overline{\xi}} \in (0; 1) : \overline{\xi} = (1 - t_{\overline{\xi}}) \cdot \overline{x} + t_{\overline{\xi}} \cdot \overline{y}$.

Но тогда, в силу того, что $\forall \overline{x} \in l$ $f_{R^+}(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x})$, то $A(t_{\overline{\xi}}) = 0$. А так как для выбранного $\overline{x} \in R^+$ верно $f_{R^+}(\overline{x}) > f_{R^-}(\overline{x})$, то $A(0) > 0$.

Таким образом, получили, что $t_{\overline{\xi}} > 0, A(0) > 0, A(t_{\overline{\xi}}) = 0$. Причем, так как $A(t)$ – линейная функция одного аргумента, то $\forall t > t_{\overline{\xi}}$ $A(t) < 0$ и $\forall t < t_{\overline{\xi}}$ $A(t) > 0$. Но тогда $A(1) < 0$, так как $1 > t_{\overline{\xi}}$. Следовательно, $f_{R^+}(\overline{y}) < f_{R^-}(\overline{y})$.

Но тогда, взяв $\forall \overline{y} \in l^-$, $\forall \overline{x} \in l^+$ и рассуждая аналогично, получаем, что $\forall \overline{x} \in l^+$ $f_{R^+}(\overline{x}) > f_{R^-}(\overline{x})$.

Итак, получили, что $\forall \overline{x} \in l^+$ $f_{R^+}(\overline{x}) > f_{R^-}(\overline{x})$, $\forall \overline{x} \in l^-$ $f_{R^+}(\overline{x}) < f_{R^-}(\overline{x})$.

5. Доказывается полностью аналогично пункту 4. □

Лемма 10. *Пусть $f(\overline{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – кусочно-линейная функция, заданная над гиперплоскостями $\{l_1, ..., l_k\}$. Тогда можно добавить к гипер-*

плоскостям $\{l_1, ..., l_k\}$ гиперплоскость l_{k+1} и считать, что $f(\overline{x})$ задана над гиперплоскостями $\{l_1, ..., l_k, l_{k+1}\}$ (то есть разбиение, полученное от нового набора гиперплоскостей, тоже можно считать валидирующим для данной кусочно-линейной функции).

Доказательство. Пусть $f(\overline{x})$ задана над гиперплоскостями $L = \{l_1, ..., l_k\}$. Это означает, что классы R^i из разбиения $\{R^1, ..., R^s\}$ пространства $\mathbb{R}^n$ гиперплоскостями L обладают сигнатурами $\sigma(R^i) = (\sigma_1, ..., \sigma_k)$, где k – число гиперплоскостей, а также выполняется, что $\forall \overline{x} \in R^i \in R(L)$ $f(\overline{x}) = f_{R^i}(\overline{x})$, где $f_{R^i}(\overline{x})$ – линейная функция. Но тогда, добавив новую гиперплоскость l_{k+1}, мы получим набор гиперплоскостей $\{l_1, ..., l_k, l_{k+1}\}$ и классы $Q^i_{\sigma_{k+1}}$, обладающие сигнатурами $\sigma(Q^i_{\sigma_{k+1}}) = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{k+1})$, $i \in \{1, ..., s\}, \sigma_{k+1} \in \{-1, 0, 1\}$ (для удобства сделана двойная индексация получившихся классов).

Причем очевидно, что для получения исходной картины (исходного разбиения пространства $\mathbb{R}^n$ гиперплоскостями $\{l_1, ..., l_k\}$ на классы), достаточно рассмотреть классы $R^i = Q^i_1 \cup Q^i_0 \cup Q^i_{-1}$, где $\sigma(Q^i_q) = (\sigma_1, ..., \sigma_k, q)$, $q \in \{-1, 0, 1\}$. К тому же, также очевидно, что все пустые классы могут разбиться лишь в объединение пустых классов.

Но тогда имеем, что если $\forall \overline{x} \in R^i \in R(L)$ $f(\overline{x}) = f_{R^i}(\overline{x})$, то для тех из классов Q^i_1, Q^i_0, Q^i_{-1}, которые не являются пустыми, верно, что $\forall \overline{x} \in Q^i_1 \subset R^i$, $Q^i_0 \subset R^i$, $Q^i_{-1} \subset R^i$ $f(\overline{x}) = f_{R^i}(\overline{x})$. То есть $f(\overline{x})$ по определению является кусочно-линейной функцией над классами $Q^i_{\sigma_{k+1}}$, $i \in \{1, ..., s\}$, $\sigma_{k+1} \in \{-1, 0, 1\}$. Но классы $Q^i_{\sigma_{k+1}}$ порождаются гиперплоскостями $\{l_1, ..., l_k, l_{k+1}\}$, откуда и следует доказываемое. □

Лемма 11. *Пусть $f(\overline{x})$ – CPL-функция. Тогда верно, что:*

1) *Для любых двух смежных классов R^+, R^- существует склейка;*

2) *Для любых двух смежных классов R^+, R^- верно, что их склейку можно представить либо в виде выпуклой склейки, либо в виде вогнутой склейки.*

Доказательство. Пусть R^+, R^- – смежные классы, а класс R^0 является пограничным для R^+, R^-. Рассмотрим три случая:

• Пусть $\exists \overline{x} \in R^+$ $f_{R^+}(\overline{x}) > f_{R^-}(\overline{x})$. Тогда по пункту 4 леммы 9 верно, что $\forall \overline{x} \in R^+$ $f(\overline{x}) = f_{R^+}(\overline{x}) > f_{R^-}(\overline{x})$ и $\forall \overline{x} \in R^-$ $f_{R^+}(\overline{x}) < f_{R^-}(\overline{x}) = f(\overline{x})$ (так как, очевидно, что $R^+ \subset l^+, R^- \subset l^-$). Отсюда немедленно следует, что $\forall \overline{x} \in R^+$ $f(\overline{x}) = f_{R^+}(\overline{x}) = \max(f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x}))$. Полностью аналогично, получаем, что $\forall \overline{x} \in R^-$ $f(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x}) = \max(f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x}))$.

А по пункту 1 леммы 9 $\forall \overline{x} \in R^0$ $f(\overline{x}) = f_{R^+}(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x}) = \max(f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x}))$. Таким образом, в данном случае $\forall \overline{x} \in R^0 \cup R^+ \cup R^-$ $f(\overline{x}) = \max(f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x}))$.

• Пусть $\exists \overline{x} \in R^+ \ f_{R^+}(\overline{x}) < f_{R^-}(\overline{x})$. Тогда по пункту 5 леммы 9 верно, что $\forall \overline{x} \in R^+ \ f_{R^+}(\overline{x}) = f(\overline{x}) < f_{R^-}(\overline{x})$ и $\forall \overline{x} \in R^- \ f_{R^+}(\overline{x}) > f_{R^-}(\overline{x}) = f(\overline{x})$. Причем по пункту 1 леммы 9 $\forall \overline{x} \in R^0$ выполняется, что $f(\overline{x}) = f_{R^+}(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x})$.

Получили, что $\forall \overline{x} \in R^+ \cup R^- \cup R^0 \ f(\overline{x}) = \min(f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x}))$.

• Пусть $\forall \overline{x} \in R^+ \ f_{R^+}(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x})$. Тогда по пункту 3 леммы 9 получаем, что $\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n \ f_{R^+}(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x})$.

В частности, $\forall \overline{x} \in R^+ \cup R^- \cup R^0 \ f_{R^+}(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x})$. Поэтому $\forall \overline{x} \in R^+ \ f(\overline{x}) = f_{R^+}(\overline{x}) = \max(f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x})) = \min(f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x}))$ и $\forall \overline{x} \in R^- \ f(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x}) = \max(f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x})) = \min(f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x}))$. Учитывая, что $\forall \overline{x} \in R^0 f(\overline{x}) = f_{R^+}(\overline{x}) = f_{R^-}(\overline{x}) = \max(f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x})) = \min(f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x}))$, получаем, что в данном случае выполняется $\forall \overline{x} \in R^+ \cup R^- \cup R^0 \ f(\overline{x}) = \max(f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x})) = \min(f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x}))$.

Так как всегда, очевидно, верен один из трех рассмотренных случаев, то верен пункт 1 леммы. А так как по определению склейки всегда выражаются функциями $\min(f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x}))$ или $\max(f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x}))$, то любую склейку можно считать выпуклой или вогнутой, поэтому пункт 2 леммы тоже верен. □

Далее сформулируем и докажем несколько лемм, необходимых для понимания доказательства всего лишь одного, кажущегося на первый взгляд очевидным, факта: если у функции нет чисто выпуклых склеек, то она — вогнутая (сам факт доказывается в следующем разделе).

На деле при доказательстве данного факта возникают дополнительные вопросы о характере поведения классов эквивалентности, такие, как:

• Можно ли связать два произвольных непустых объемных класса цепочкой смежных классов? (то есть, построить такую цепочку классов с началом в первом объемном классе и концом во втором объемном классе, в которой два любых соседних класса являются смежными);

• Точно ли элементы последовательности множеств $\partial_S^i(R^{(1)})$ когда-нибудь станут равными множеству всех непустых объемных классов эквивалентности или же часть непустых объемных классов так никогда и не войдет в последовательность $\partial_S^i(R^{(1)})$;

• Какие элементы добавляются к $\partial_S^i(R^{(1)})$ при переходе от $\partial_S^i(R^{(1)})$ к $\partial_S^{i+1}(R^{(1)})$;

• Стабилизируется ли цепь $\partial_S^i(R^{(1)})$ и есть ли какие-нибудь критерии стабилизируемости данной цепи.

Для доказательства всех вышеописанных фактов в определениях вводились так называемые укрупнения. И рассмотрение сформулированных выше вопросов мы начнем с доказательств некоторых свойств данных укрупнений.

Лемма 12. *Пусть $L = \{l_1, ..., l_k\}$ - набор гиперплоскостей. Тогда при укрупнении $L' = L \backslash \{l_i\}$ любой из объемных классов $U \in V(L')$ либо равен одному из классов в $V(L)$ (равенство множеств), либо образован, как $U = R^+ \cup R^0 \cup R^-$ для некоторых непустых классов $R^+, R^0, R^- \in R(L)$, из которых R^+, R^- – объемные (и не равные друг другу), а R^0 – $(n-1)$-мерный. Причем классы R^+, R^- являются смежными по классу R^0 (см. рис. 1 и 2).*

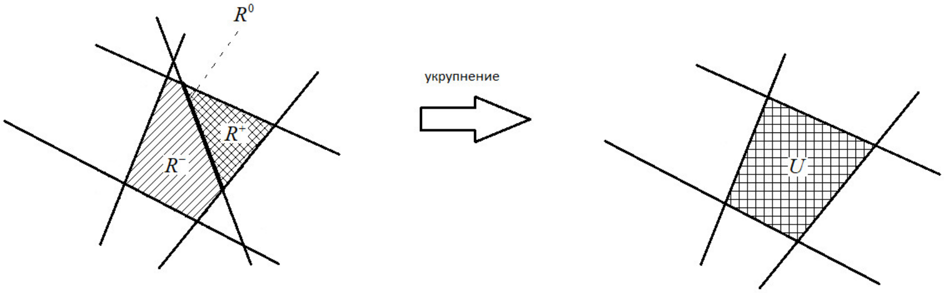

Рис. 1. Иллюстрация основной идеи леммы 2 (первый возможный случай)

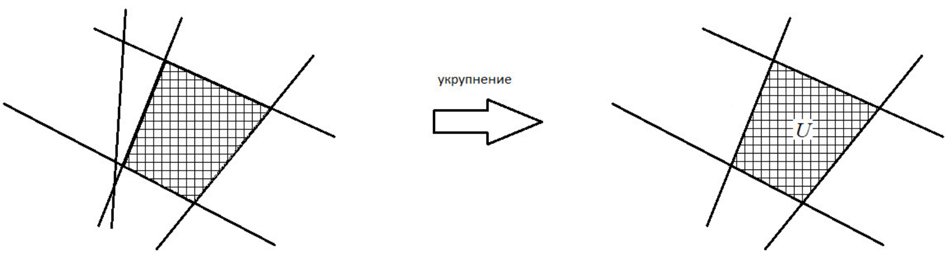

Рис. 2. Иллюстрация основной идеи леммы 2 (второй возможный случай)

Доказательство. Рассмотрим произвольный класс $U \in V(L')$ и проведем гиперплоскость l_i. Без ограничения общности будем считать, что $L' = \{l_1, ..., l_{k-1}\}$, а $l_i = l_k$. Возможны два случая:

• $U \cap l_k = \varnothing$. Отметим, что $\forall \overline{x}, \overline{y} \in U$ $\sigma(\overline{x}) = \sigma(\overline{y})$ при разбиении $R(L')$. Поэтому $\sigma_i(\overline{x}) = \sigma_i(\overline{y})$, $i \in \{1, ..., k-1\}$. Далее рассмотрим $\sigma_k(\overline{x}) = sgn(l_k(\overline{x}))$ и $\sigma_k(\overline{y}) = sgn(l_k(\overline{y}))$.

Отметим, что, если $U \cap l_k = \varnothing$, то $\sigma_k(\overline{x}) = \sigma_k(\overline{y})$. В противном случае мы можем соединить точки $\overline{x}, \overline{y}$ отрезком $[\overline{x}; \overline{y}]$. А так как по лемме 3 любой класс эквивалентности при любом разбиении гиперплоскостями — это выпуклое множество, то $[\overline{x}; \overline{y}] \subset U$. И при этом, если $\sigma_k(\overline{x}) \neq \sigma_k(\overline{y})$, то, очевидно, что $\exists \overline{\xi} \in [\overline{x}; \overline{y}] : \ \sigma_k(\overline{\xi}) = 0$. Но последнее означает, что $\overline{\xi} \in l_k$. Таким образом, $\exists \overline{\xi} \in [\overline{x}; \overline{y}] \cap l_k \subset U \cap l_k$, откуда вытекает, что $U \cap l_k \neq \varnothing$. Получили противоречие.

Следовательно, предположение неверно и $\forall \overline{x}, \overline{y} \in U \ \sigma_k(\overline{x}) = \sigma_k(\overline{y})$. Но тогда получаем, что $\forall \overline{x}, \overline{y} \in U$ обладают одинаковыми сигнатурами при разбиении $R(L)$.

При этом также очевидно, что если две точки обладали разными сигнатурами при разбиении $R(L')$, то при разбиении $R(L)$ они будут обладать тем более различными сигнатурами (в вектор сигнатур лишь добавились новые компоненты).

Из всего сказанного вытекает, что в новом разбиении класс U сохраняется (является таким же множеством точек, как и в исходном разбиении).

• $U \cap l_k \neq \varnothing$. Пусть $\overline{\xi} = U \cap l_k$. Так как U – объемный класс, то по лемме 3 он является открытым множеством, а поэтому $\exists O_\varepsilon(\overline{\xi}) : \ O_\varepsilon(\overline{\xi}) \subset U$. При этом очевидно, что найдутся точки $\overline{x'}, \overline{x''} \in O_\varepsilon(\overline{\xi}) : \ l_k(\overline{x'}) > 0, l_k(\overline{x''}) < 0$ (для этого достаточно рассмотреть любую точку в направлении вектора нормали, расстояние от которой до $\overline{\xi}$ будет меньше ε; это будет искомая точка $\overline{x'}$; аналогично для точки $\overline{x''}$).

Очевидно, что точки $\overline{x'}, \overline{x''}$ будут принадлежать двум разным классам в новом разбиении $R(L)$. Обозначим эти классы R^+, R^-, соответственно. Также рассмотрим сигнатуру $(\sigma(U), 0)$ и рассмотрим класс R^0, обладающий данной сигнатурой.

Так как сигнатура U не содержит нулей в $R(L')$, а также, $sgn(l_k(\overline{x'})) = 1, \ sgn(l_k(\overline{x''})) = -1$, то $\sigma(\overline{x'}), \sigma(\overline{x''})$ не содержат нулей. Отсюда следует, что R^+, R^- – объемные.

При этом также очевидно, что $R^+ \subset U, R^- \subset U, R^0 \subset U$, так как они являются решением системы, состоящей из уравнений и неравенств, задающих множество U, к которым добавлено дополнительно одно из трех выражений $l_k(\overline{x}) > 0, l_k(\overline{x}) < 0, l_k(\overline{x}) = 0$ в зависимости от задаваемого класса R^+, R^-, R^0, соответственно.

Таким образом, нашлись два класса R^+, R^- – объемные и непустые такие, что $R^+ \subset U, R^- \subset U$. Более того, так как для любой точки $\overline{x} \in U$ верно, что $sgn(l_k(\overline{x})) > 0$ или $sgn(l_k(\overline{x})) < 0$ или $sgn(l_k(\overline{x})) = 0$, то $R^+ \cup R^- \cup R^0 = U$.

По лемме 6 $R^0 \neq \varnothing$. Учитывая, что, по построению, $\sigma(R^+) = (\sigma_1, ..., \sigma_{k-1}, 1)$, $\sigma(R^-) = (\sigma_1, ..., \sigma_{k-1}, -1)$, $\sigma(R^0) = (\sigma_1, ..., \sigma_{k-1}, 0)$, то по лемме 5 классы R^+, R^- смежные по классу R^0. □

Лемма 13. *Пусть дано разбиение $R(L)$ и его укрупнение $R(L')$. Тогда для любых двух смежных классов $Q'_1, Q'_2 \in R(L')$ выполняется, что $\exists Q_1, Q_2 \in R(L) : Q_1 \subset Q'_1, Q_2 \subset Q'_2,\ Q_1|Q_2$.*

Другими словами, для любых двух смежных классов из укрупнения (двух крупных классов) верно, что найдутся два класса из исходного разбиения (мелкие классы), каждый из которых лежит в своем крупном классе и при этом данные мелкие классы — смежные (см. рис. 3).

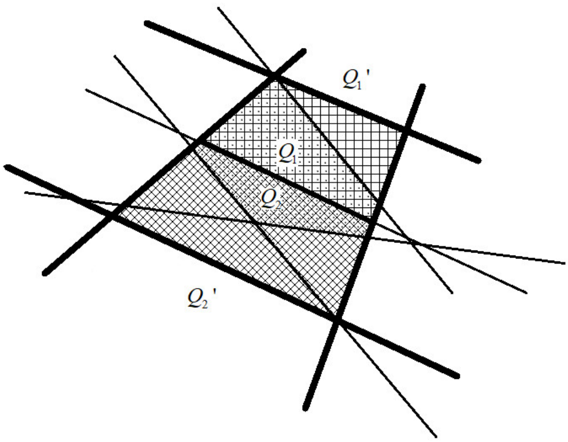

Рис. 3. Иллюстрация к формулировке леммы 13. Жирным выделены линии, оставшиеся после укрупнения, Q'_1, Q'_2 - два ограниченных класса в укрупнении (Q'_1 - класс, отмеченный прямой сеткой, Q'_2 - класс, отмеченный косой сеткой). Классы Q_1, Q_2 содержатся классах Q'_1, Q'_2 и отмечены прямой и косой сетками с точками, соответственно

Доказательство. Рассмотрим следующий пошаговый процесс построения из укрупнения $R(L')$ исходного разбиения $R(L)$:

1) Берется набор гиперплоскостей L' и к нему добавляется какая-то одна гиперплоскость из L, которой нет в L'. Получается некоторый набор $L^{(1)}$, которому соответствует некоторое укрупнение $R(L^{(1)})$ разбиения $R(L)$.

2) Пусть дан набор $L^{(i)} : L' \underset{\neq}{\subset} L^{(i)} \underset{\neq}{\subset} L$, полученный из L', добавлением i штук гиперплоскостей из L, которых нет в L'.

   Тогда, добавляя к $L^{(i)}$ еще одну гиперплоскость из L, которой нет в $L^{(i)}$, получим новый набор $L^{(i+1)}$, которому соответствует укрупнение $R(L^{(i+1)})$ разбиения $R(L)$.

3) Если $L^{(i)} = L$, то полученное укрупнение $R(L^{(i)})$ совпадает с исходным разбиением $R(L)$ и построение разбиения заканчивается.

Далее, если показать, что для любых двух смежных классов $Q'_1, Q'_2 \in R(L^{(i)}), i = 0, 1, ...$ (полагаем, что $L^{(0)} = L'$) найдутся два смежных класса $Q''_1, Q''_2 \in R(L^{(i+1)}) : Q''_1 \subset Q'_1, Q''_2 \subset Q'_2$, то будет выполняться, что и для любых двух смежных классов из $Q'_1, Q'_2 \in R(L')$ найдутся два смежных класса $Q''_1, Q''_2 \in R(L^{(i+1)}) : Q''_1 \subset Q'_1, Q''_2 \subset Q'_2$.

Действительно, возьмем два смежных класса $Q'_1, Q'_2 \in R(L')$. Тогда по предположению найдутся два смежных класса $Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)} \in R(L^{(1)})$: $Q_1^{(1)} \subset Q'_1, Q_2^{(1)} \subset Q'_2$. Но для смежных классов $Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)} \in R(L^{(1)})$, в свою очередь, найдутся два смежных класса $Q_1^{(2)}, Q_2^{(2)} \in R(L^{(2)}) : Q_1^{(2)} \subset Q_1^{(1)}, Q_2^{(2)} \subset Q_2^{(1)}$ и так далее.

Продолжая аналогично процесс до некоторых смежных классов $Q_1^{(i+1)}, Q_2^{(i+1)} \in R(L^{(i+1)}) : Q_1^{(i+1)} \subset Q_1^{(i)}, Q_2^{(i+1)} \subset Q_2^{(i)}$, получаем, что нашлись смежные классы $Q''_1 = Q_1^{(i+1)}, Q''_2 = Q_2^{(i+1)} \in R(L^{(i+1)}) : Q_1^{(i+1)} \subset Q_1^{(i)} \subset ... \subset Q'_1, Q_2^{(i+1)} \subset Q_2^{(i)} \subset ... \subset Q'_2$. Что и доказывает утверждение.

Продолжая описанный процесс до того момента, когда $L^{(i+1)} = L$, получаем, что найденные $Q''_1, Q''_2 \in R(L^{(i+1)}) = R(L)$ будут обладать свойством смежности и тем свойством, что $Q''_1 \subset Q'_1, Q''_2 \subset Q'_2$. Сказанное доказывает теорему, при условии, что предположение, сделанное в процессе доказательства (о том, что для любых двух смежных классов $Q'_1, Q'_2 \in R(L^{(i)})$ найдутся два смежных класса $Q''_1, Q''_2 \in R(L^{(i+1)}) : Q''_1 \subset Q'_1, Q''_2 \subset Q'_2$), верное. Покажем, что это так.

Для упрощения доказательства (и уменьшения обозначений) докажем более обобщенное предположение, которое состоит в следующем.

Пусть у нас есть набор гиперплоскостей L', полученный из набора гиперплоскостей $L'' = \{l_1, ..., l_k, l_{k+1}\}$ выбрасыванием единственной гиперплоскости (без ограничения общности, считаем, что это гиперплоскость l_{k+1}). Тогда верно, что:

Для любых двух смежных классов $Q'_1, Q'_2 \in R(L')$ выполняется, что существуют смежные классы $Q''_1, Q''_2 \in R(L'') : Q''_1 \subset Q'_1, Q''_2 \subset Q'_2$.

Действительно, рассмотрим смежные классы $Q'_1, Q'_2 \in R(L')$. Без ограничения общности, будем считать, что они имеют следующие сигнатуры: $\sigma(Q'_1) = (\sigma_1, ..., \sigma_{i^*-1}, 1, \sigma_{i^*+1}, ..., \sigma_k)$, $\sigma(Q'_2) = (\sigma_1, ..., \sigma_{i^*-1}, -1, \sigma_{i^*+1}, ..., \sigma_k)$.

Добавим к L' гиперплоскость l_{k+1} и покажем, что в новом разбиении пространства $\mathbb{R}^n$ гиперплоскостями $L'' = L' \cup \{l_{k+1}\}$ найдутся два смежных класса $Q''_1, Q''_2 : Q''_1 \subset Q'_1, Q''_2 \subset Q'_2$.

Для этого рассмотрим три случая:

- Если $Q'_1 \cap l_{k+1} = \varnothing, Q'_2 \cap l_{k+1} = \varnothing$, то по лемме 12, в разбиении $R(L'')$ (после добавления новой гиперплоскости l_{k+1}) классы Q'_1, Q'_2 остались без изменений (как множества точек). Покажем, что тогда Q'_1, Q'_2 – искомые классы.

Действительно, по определению смежности, $Q'_1, Q'_2 \neq \varnothing$. Далее рассмотрим их сигнатуры. Так как $Q'_1|Q'_2$ в исходном разбиении $R(L')$, то $\sigma_i(Q'_1) = \sigma_i(Q'_2), i \in \{1, ..., k\} \setminus \{i^*\}$ и $\sigma_i(Q'_1) \neq \sigma_i(Q'_2), i = i^*$ для некоторого $i^* \in \{1, ..., k\}$. При этом $\sigma_i(Q'_1), \sigma_i(Q'_2) \in \{-1, 1\}, i \in \{1, 2, ..., k\}$.

Далее, мы добавили к L' еще одну гиперплоскость l_{k+1}. Рассмотрим значения $\sigma_{k+1}(Q'_1), \sigma_{k+1}(Q'_2)$ в новом разбиении $R(L'')$. Так как $Q'_1 \cap l_{k+1} = \varnothing, Q'_2 \cap l_{k+1} = \varnothing$, то верно, что $\forall \overline{x} \in Q'_1\ \sigma_{k+1}(\overline{x}) \in \{-1, 1\}$ и $\forall \overline{x} \in Q'_2\ \sigma_{k+1}(\overline{x}) \in \{-1, 1\}$ (нуля тут быть не может, так как это возможно только для точки из l_{k+1}, но $Q'_1 \cap l_{k+1} = \varnothing, Q'_2 \cap l_{k+1} = \varnothing$, поэтому таких точек у нас нет).

Отсюда сразу же делаем вывод, что классы Q'_1, Q'_2 остаются объемными и в новом разбиении $R(L'')$ (так как в их сигнатурах нет нулей), а учитывая еще, что множества Q'_1, Q'_2 остаются классами эквивалентности в новом разбиении $R(L'')$, получаем, что $\sigma_{k+1}(Q'_1) = \alpha_1 \in \{-1, 1\}$ и $\sigma_{k+1}(Q'_2) = \alpha_2 \in \{-1, 1\}$.

Далее, покажем, что $\sigma_{k+1}(Q'_1) = \sigma_{k+1}(Q'_2)$ (здесь и далее уже рассматриваем исходное разбиение L', а вместо гиперплоскости l_{k+1} рассматриваем функцию $l_{k+1}(\overline{x})$ и ее поведение относительно разбиения L').

Действительно, пусть, для определенности, $\sigma_{k+1}(Q'_1) = 1$. Последнее означает, что $\forall \overline{x} \in Q'_1\ l_{k+1}(\overline{x}) > 0$. Но $l_{k+1}(\overline{x})$ – непрерывная функция, поэтому $\forall \overline{x} \in \overline{Q'_1}\ l_{k+1}(\overline{x}) \geqslant 0$.

Так как в исходном разбиении $R(L')$ верно, что $Q'_1|Q'_2$, то существует непустой $(n-1)$-мерный класс R такой, что $R \subset \overline{Q'_1} \cap \overline{Q'_2}$. В частности, $R \subset \overline{Q'_1}$, поэтому $\forall \overline{x} \in R\ l_{k+1}(\overline{x}) \geqslant 0$. Далее возможны два случая:

1) Если $\forall \overline{x} \in R\ l_{k+1}(\overline{x}) = 0$. Пусть $l_i \in L' :\ \ R \subset l_i$ (так как R – плоский класс в разбиении $R(L')$, то такая гиперплоскость $l_i \in L'$ существует). Тогда по лемме 9 верно, что $\forall \overline{x} \in l_i\ l_{k+1}(\overline{x}) = 0$. Откуда следует, что $l_{k+1} = l_i$ и это противоречит тому, что l_{k+1} – новая (добавленная) гиперплоскость.

2) Если $\exists \overline{x} \in R\ l_{k+1}(\overline{x}) > 0$. Но тогда, в силу непрерывности функции $l_{k+1}(\overline{x})$, верно выражение (21).

$$\exists O_\varepsilon(\overline{x}) : \forall \overline{y} \in O_\varepsilon(\overline{x})\ l_{k+1}(\overline{y}) > 0 \tag{21}$$

Но по определению $R \subset \overline{Q'_2}$, поэтому выполняется выражение (22).

$$\forall \overline{x} \in R \ \forall O_\varepsilon(\overline{x}) \ \exists \overline{y} \in Q_2' \cap O_\varepsilon(\overline{x}) \tag{22}$$

Из (21) и (22) немедленно следует выражение (23).

$$\exists \overline{y} \in Q_2' : \ l_{k+1}(\overline{y}) > 0 \tag{23}$$

Теперь, переходя к разбиению $R(L'')$ и учитывая, что Q_2' является классом эквивалентности в данном разбиении, а также доказанное выражение (23), получаем, что $\sigma_{k+1}(Q_2') = \sigma_{k+1}(Q_1') = 1$.

Но тогда имеем, что уже в новом разбиении $R(L'')$ сигнатуры классов Q_1' и Q_2' имеют вид $\sigma(Q_1') = (\sigma_1, ..., \sigma_{i^*-1}, 1, \sigma_{i^*+1}, ..., \sigma_k, \sigma_{k+1})$, $\sigma(Q_2') = (\sigma_1, ..., \sigma_{i^*-1}, -1, \sigma_{i^*+1}, ..., \sigma_k, \sigma_{k+1})$. Учитывая из ранее доказанного, что Q_1', Q_2' – непустые и объемные, получаем по лемме 8, что $Q_1'|Q_2'$ (эти классы непустые, объемные и их сигнатуры отличаются только в одной компоненте).

• Пусть $Q_1' \cap l_{k+1} = \varnothing$ и $Q_2' \cap l_{k+1} \neq \varnothing$ или $Q_1' \cap l_{k+1} \neq \varnothing$ и $Q_2' \cap l_{k+1} = \varnothing$. Без ограничения общности, будем считать, что $Q_1' \cap l_{k+1} = \varnothing$ и $Q_2' \cap l_{k+1} \neq \varnothing$. Тогда по лемме 12 Q_2' распадается в новом разбиении $R(L'')$ на три класса $Q_2^{+\prime}, Q_2^{-\prime}, Q_2^{0\prime}$, из которых два класса $Q_2^{+\prime}, Q_2^{-\prime} \neq \varnothing$ — смежные и объемные. Покажем, что тогда один из этих объемных классов будет смежен с Q_1' (который, по лемме 12, остался классом эквивалентности в разбиении $R(L'')$).

Отметим, что $\sigma_{k+1}(Q_1') = \sigma_{k+1} \in \{-1, 1\}$ (доказательство аналогично предыдущему случаю).

Так как при разбиении $R(L')$ классы Q_1', Q_2' имели следующие сигнатуры: $\sigma(Q_1') = (\sigma_1, ..., \sigma_{i^*-1}, 1, \sigma_{i^*+1}, ..., \sigma_k)$, $\sigma(Q_2') = (\sigma_1, ..., \sigma_{i^*-1}, -1, \sigma_{i^*+1}, ..., \sigma_k)$, то при разбиении $R(L'')$ класс Q_1' останется неизменным (как множество точек), но будет иметь сигнатуру $\sigma(Q_1') = (\sigma_1, ..., \sigma_{i^*-1}, 1, \sigma_{i^*+1}, ..., \sigma_k, \sigma_{k+1})$.

А вместо класса Q_2' появятся классы $Q_2^{+\prime}, Q_2^{-\prime}, Q_2^{0\prime}$, имеющие сигнатуры $\sigma(Q_2^{+\prime}) = (\sigma_1, ..., \sigma_{i^*-1}, -1, \sigma_{i^*+1}, ..., \sigma_k, 1)$, $\sigma(Q_2^{-\prime}) = (\sigma_1, ..., \sigma_{i^*-1}, -1, \sigma_{i^*+1}, ..., \sigma_k, -1)$ и $\sigma(Q_2^{0\prime}) = (\sigma_1, ..., \sigma_{i^*-1}, -1, \sigma_{i^*+1}, ..., \sigma_k, 0)$, соответственно.

Очевидно, что хотя бы одна из сигнатур $\sigma(Q_2^{+\prime})$ или $\sigma(Q_2^{-\prime})$ будет обладать тем свойством, что последняя ее компонента равна $\sigma_{k+1}(Q_1') = \sigma_{k+1}$ (принцип ящиков Дирихле — ранее мы показали, что $\sigma_{k+1}(Q_1') = \sigma_{k+1} \in \{-1, 1\}$, а далее мы рассматриваем классы $Q_2^{+\prime}$ и $Q_2^{-\prime}$ с сигнатурами, обладающими компонентами $\sigma_{k+1}(Q_2^{+\prime}) = 1, \sigma_{k+1}(Q_2^{-\prime}) = -1$; поэтому какой-то из этих компонент $\sigma_{k+1}(Q_2^{+\prime}), \sigma_{k+1}(Q_2^{-\prime})$ компонента

$\sigma_{k+1}(Q'_1) = \sigma_{k+1} \in \{-1, 1\}$ окажется равной). Без ограничения общности, пусть это будет класс $Q_2^{+'}$ (то есть $\sigma_{k+1}(Q_2^{+'}) = \sigma_{k+1}(Q'_1) = \sigma_{k+1}$).

Очевидно, что в таком случае сигнатура класса $Q_2^{+'}$ отличается от сигнатуры класса Q'_1 лишь в компоненте i^*. При этом $\sigma_{i^*}(Q'_1) = 1$, а $\sigma_{i^*}(Q_2^{+'}) = -1$.

Тогда, выбирая класс $Q_2^{+'}$ в качестве Q''_2, а в качестве Q''_1 беря Q'_1, получаем, что нашлись два непустых класса Q''_1 и Q''_2 такие, что $Q''_1 \subset Q'_1$ (так как по построению $Q'_1 = Q''_1$), $Q''_2 \subset Q'_2$ (доказано в лемме 12) такие, что $Q''_1|Q''_2$ (следует из построения и леммы 8).

• Пусть $Q'_1 \cap l_{k+1} \neq \varnothing$, $Q'_2 \cap l_{k+1} \neq \varnothing$. Но тогда, по лемме 12, $Q'_1 = Q_1^{+'} \cup Q_1^{-'} \cup Q_1^{0'}$, $Q'_2 = Q_2^{+'} \cup Q_2^{-'} \cup Q_2^{0'}$, где $Q_i^{+'}, Q_i^{-'}, Q_i^{0'}$, $i \in \{1, 2\}$ – классы из нового разбиения $R(L'')$ (каждый из классов Q'_1 и Q'_2 распался на три класса $Q_i^{+'}, Q_i^{-'}, Q_i^{0'}$, $i \in \{1, 2\}$). Причем классы $Q_i^{+'}, Q_i^{-'}$, $i \in \{1, 2\}$ непусты, объемны, смежны (при фиксированном i), а также $Q_1^{+'}, Q_1^{-'} \subset Q'_1$, $Q_2^{+'}, Q_2^{-'} \subset Q'_2$.

Но тогда, взяв, например, пару $Q_1^{+'}, Q_2^{+'}$ за классы Q''_1, Q''_2, соответственно, получаем, что $Q_1^{+'}, Q_2^{+'}$, очевидно, смежны в разбиении $R(L'')$. Откуда и следует доказываемое утверждение. □

Лемма 14. *Пусть дано укрупнение $R(L')$ некоторого разбиения $R(L)$ и взят класс $U \in V(L')$. Тогда верно, что:*

1) *Или U содержит единственный класс эквивалентности $R \in V(L)$.*

2) *Или $\forall R_1, R_2 \in V(L) : R_1, R_2 \subset U$, $R_1 \neq R_2$ выполняется, что $R_1|R_2$ или $\exists R^{(1)}, ..., R^{(r)} \in V(L) : R^{(1)}, ..., R^{(r)} \subset U$ и при этом $R_1|R^{(1)}|...|R^{(r)}|R_2$ (см. рис. 4).*

Доказательство. Будем доказывать по индукции построения укрупнения.

База индукции: Пусть $R(L_1)$ образовано из $R(L)$ вычеркиванием одной гиперплоскости (без ограничения общности будем считать, что это гиперплоскость l_1). Тогда по лемме 12 любой из классов $U \in V(L_1)$ либо совпадает с некоторым классом из $V(L)$, либо образован, как $U = R^+ \cup R^0 \cup R^-$ для некоторых непустых классов R^+, R^0, R^-, из которых R^+, R^- – объемные, а R^0 – $(n-1)$-мерный. При этом R^+, R^- являются смежными по R^0.

В первом случае (когда $U \in V(L_1)$ совпадает с некоторым классом из $V(L)$) получаем, что в данном классе $U \in V(L_1)$ содержится всего лишь один класс из $V(L)$ — сам класс $U \in V(L)$ (как подмножество). Отсюда следует, что в данном случае теорема верна.

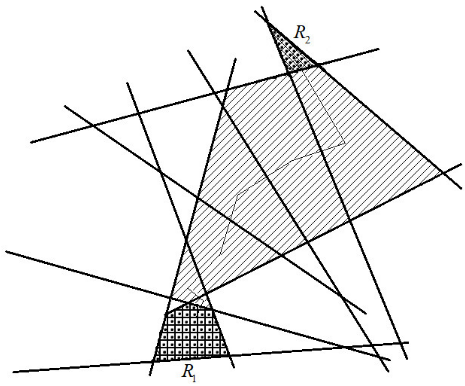

Рис. 4. Иллюстрация утверждения леммы 14 (второй случай) при $U = \mathbb{R}^2$. Классы R_1, R_2 обозначены сеткой; цепь смежных классов $R^{(1)}, ..., R^{(r)}$ закрашена косыми линиями. Для наглядности путь по смежным классам $R^{(1)}, ..., R^{(r)}$ через соответствующие смежностям пограничные классы обозначен ломаной линией

Во втором случае теорема также верна, так как для любых $R_1, R_2 \in V(L) : R_1, R_2 \subset U,\ R_1 \neq R_2$ верно, что $R_1 = R^+, R_2 = R^-$, так как, по построению, из непустых объемных классов в $V(L)$ только R^+ и R^- являются подмножествами U. И данные классы $R_1 = R^+, R_2 = R^-$ по лемме 12 являются смежными в разбиении $R(L)$.

Рассмотрим также несколько экстремальных ситуаций. Так, если в L' нет гиперплоскостей, то по определению $R(L') = V(L') = \{\mathbb{R}^n\}$. Далее возможны два случая:

• Если $L = \{l_1\}$, то, очевидно, что $U = \mathbb{R}^n = l_1^+ \cup l_1 \cup l_1^-$. И поэтому единственные два различных класса из $V(L)$, содержащиеся в U — это $R_1 = l_1^+, R_2 = l_1^-$, которые, очевидно, являются смежными в $R(L)$.

• Если же в L нет гиперплоскостей (то есть $L = \varnothing$), то по определению $V(L') = R(L') = R(L) = V(L) = \{\mathbb{R}^n\}$ и в $V(L')$ содержится единственный класс эквивалентности $R = U = \mathbb{R}^n$ из $V(L)$, поэтому утверждение снова верно.

Шаг индукции: Пусть L_i образовано из L_{i-1} вычеркиванием гиперплоскости l_i (а L_{i-1} образовано из $L = \{l_1, ..., l_k\}$ вычеркиванием гиперплоскостей $l_1, ..., l_{i-1}$). Рассмотрим разбиение $R(L_{i-1})$ и полученное укрупнение $R(L_i)$.

Тогда по лемме 12 каждый $U \in V(L_i)$ либо совпадает с некоторым $R \in V(L_{i-1})$, либо образован, как $U = R^+ \cup R^0 \cup R^-$, где $R^+|R^-$ и $R^+, R^- \in V(L_{i-1})$.

Если $U \in V(L_i)$ совпадает с некоторым $R \in V(L_{i-1})$, то для него выполняется предположение индукции и все доказано.

Если же $U = R^+ \cup R^0 \cup R^-$, где $R^+|R^-$ и $R^+, R^- \in V(L_{i-1})$, то для R^+, R^- верно предположение индукции. То есть, либо в R^+ находится единственный класс эквивалентности из $V(L)$, либо в R^+ находится несколько классов эквивалентности из $V(L)$ и тогда $\forall R_1^+, R_2^+ \in V(L)$: $R_1^+, R_2^+ \subset R^+, R_1^+ \neq R_2^+$ выполняется, что $R_1^+|R_2^+$ или $\exists R^{(1),+}, ..., R^{(r_1),+} \in V(L) : R^{(1),+}, ..., R^{(r_1),+} \subset R^+$ и при этом $R_1^+|R^{(1),+}|...|R^{(r_1),+}|R_2^+$.

И полностью аналогично, либо в R^- находится единственный класс эквивалентности из $V(L)$, либо в R^- находится несколько классов эквивалентности из $V(L)$ и тогда $\forall R_1^-, R_2^- \in V(L) : R_1^-, R_2^- \subset R^-, R_1^- \neq R_2^-$ выполняется, что $R_1^-|R_2^-$ или $\exists R^{(1),-}, ..., R^{(r_2),-} \in V(L)$: $R^{(1),-}, ..., R^{(r_2),-} \subset R^-$ и при этом $R_1^-|R^{(1),-}|...|R^{(r_2),-}|R_2^-$.

Отметим, что случай, когда в R^+ или R^- содержится единственный класс из $V(L)$ соответствует (согласно лемме 12) ситуации, когда R^+ или R^- остался классом эквивалентности в $V(L_{i-1})$, поэтому он совпадает, как множество, с классом R^+ или R^- в $V(L)$. В дальнейшем это рассуждение будем опускать и говорить, что это следует из леммы 12.

Также, из леммы 13 известно, что для любых двух смежных классов $Q_1, Q_2 \in R(L_{i-1})$ (из всякого укрупнения разбиения $R(L)$) выполняется, что $\exists Q_1', Q_2' \in V(L) : Q_1' \subset Q_1, Q_2' \subset Q_2, Q_1'|Q_2'$.

Но тогда для $R^+, R^- \in R(L_{i-1})$ верно (24).

$$\exists Q_1', Q_2' \in V(L) : Q_1' \subset R^+, Q_2' \subset R^-, Q_1'|Q_2' \tag{24}$$

Далее рассмотрим $\forall R_1, R_2 \in V(L) : R_1, R_2 \subset U$. Согласно предположению индукции, для них возможны следующие случаи:

• Пусть $R_1, R_2 \subset R^+$ или $R_1, R_2 \subset R^-$. В любом случае выполняется предположение индукции для классов R^+ и R^-, откуда следует истинность утверждения.

• Пусть $R_1 \subset R^+, R_2 \subset R^-$ и оба класса R^+, R^- содержат единственный класс эквивалентности из $V(L)$. Тогда из леммы 12 следует, что R^- и R^+ в разбиении $V(L_{i-1})$ совпадают с собой же в разбиении $V(L)$. Тогда существуют единственные отличные друг от друга объемные классы $R_1 = R^+, R_2 = R^-$ из U и они, по построению, смежные.

• Пусть $R_1 \subset R^+, R_2 \subset R^-$ и один из классов $R^+ \in V(L_{i-1}), R^- \in V(L_{i-1})$ содержит единственный класс эквивалентности из $V(L)$. Без ограничения общности, можно считать, что это класс R^+. Тогда из леммы 12 следует, что R^+ в $V(L_{i-1})$ совпадает с собой же в $V(L)$.

Но тогда отсюда и из (24) получаем, что $R_1 = R^+ = Q_1'$ и $\exists Q_2' \in V(L) : Q_2' \subset R^-$, причем $R_1|Q_2'$.

В свою очередь, так как $Q_2' \subset R^-, R_2 \subset R^-$, то по предположению индукции для R^-, будет выполняться либо $Q_2' = R_2$, либо $Q_2'|R_2$, либо $\exists R^{(1),-},...,R^{(r_2),-} \in V(L) : R^{(1),-},...,R^{(r_2),-} \subset R^-$ такие, что $R_2|R^{(1),-}|...|R^{(r_2),-}|Q'_2$.

Тогда, учитывая, что $R_1|Q'_2$ и симметричность отношения смежности, получаем (на примере случая с самым большим числом промежуточных классов), что $R_1|Q'_2|R^{(r_2),-}|...|R^{(1),-}|R_2$. Учитывая, что $R^+, R^- \subset U$, то и $Q'_2, R^{(r_2),-},...,R^{(1),-} \subset U$. Откуда и следует доказываемое. Остальные случаи рассматриваются полностью аналогично.

• Пусть R^+ и R^- (каждый) содержат как минимум по два класса из $V(L)$. Выберем $\forall R_1 \in V(L) : R_1 \subset R^+$ и $\forall R_2 \in V(L) : R_2 \subset R^-$. Тогда по предположению индукции $R_1 = Q'_1$, или $R_1|Q'_1$, или $\exists R^{(1),+},...,R^{(r_1),+} \in V(L) : R^{(1),+},...,R^{(r_1),+} \subset R^+$ и при этом $R_1|R^{(1),+}|...|R^{(r_1),+}|Q'_1$. И, аналогично, $R_2 = Q'_2$ или $R_2|Q'_2$, или $\exists R^{(1),-},...,R^{(r_2),-} \in V(L) : R^{(1),-},...,R^{(r_2),-} \subset R^-$ и при этом $R_2|R^{(1),-}|...|R^{(r_2),-}|Q'_2$.

Но учитывая, что $Q'_1|Q'_2$ и симметричность отношения смежности, получаем (снова на примере случая с самым большим числом промежуточных классов), что $R_1|R^{(1),+}|...|R^{(r_1),+}|Q'_1|Q'_2|R^{(r_2),-}|...|R^{(1),-}|R_2$. Учитывая, что $R^+, R^- \subset U$, то и $Q'_1, Q'_2, R^{(1),+},...,R^{(r_1),+}, R^{(r_2),-},...,R^{(1),-} \subset U$. Откуда и следует доказываемое. Остальные случаи рассматриваются полностью аналогично.

Также отметим, что в случае, если $L_{i-1} = \varnothing$, полагаем, что $R(L_i) = R(L_{i-1}) = V(L_i) = V(L_{i-1}) = \{\mathbb{R}^n\}$. И в данном случае для класса $U = \mathbb{R}^n \in V(L_i)$ выполняется предположение индукции и утверждение можно считать доказанным. □

Лемма 15. *Все объемные классы произвольного разбиения связаны по смежности друг с другом. Другими словами, для произвольного набора гиперплоскостей $L = \{l_1,...,l_k\}$ верно, что $\forall R_1, R_2 \in V(L) : R_1 \neq R_2$ выполняется $R_1|R_2$ или $\exists R^{(1)},...,R^{(r)} \in V(L) : R_1|R^{(1)}|...|R^{(r)}|R_2$.*

Доказательство. Укрупняя в лемме 14 разбиение $R(L)$ до $R(\varnothing)$, получаем доказываемое утверждение. □

Лемма 16 (первый критерий стабилизируемости)**.** *Верны следующие утверждения:*

1) *Если цепь $\partial_S^i(R^{(1)}), i \in \mathbb{N}$ стабилизируется при $i = i_{stab}$, то*

$$\forall t \in \mathbb{N}\ \partial_S^{i_{stab}+t}(R^{(1)}) = \partial_S^{i_{stab}}(R^{(1)}).$$

2) *Стабилизация при некотором $i = i_{stab}$ может произойти в том и только том случае, когда все непустые объемные классы эквивалентности входят во множество $\partial_S^{i_{stab}}(R^{(1)})$.*

Доказательство. **1.** Пусть цепь $\partial_S^i(R^{(1)}), i \in \mathbb{N}$ стабилизировалась при $i = i_{stab}$. Тогда по определению верно, что $\partial_S^{i_{stab}+1}(R^{(1)}) = \partial_S^{i_{stab}}(R^{(1)})$.

Но тогда $\partial_S^{i_{stab}+t}(R^{(1)}) = \partial_S^t(\partial_S^{i_{stab}}(R^{(1)})) = \partial_S^{t-1}(\partial_S(\partial_S^{i_{stab}}(R^{(1)}))) = \partial_S^{t-1}(\partial_S^{i_{stab}+1}(R^{(1)})) = \partial_S^{t-1}(\partial_S^{i_{stab}}(R^{(1)})) = ... = \partial_S^{i_{stab}}(R^{(1)})$. Откуда и следует доказываемое.

2. Если все непустые объемные классы эквивалентности вошли в $\partial_S^{i_{stab}}(R^{(1)})$, то, очевидно, что $\partial(\partial_S^{i_{stab}}(R^{(1)})) = \partial_S^{i_{stab}}(R^{(1)})$ (так как по определению $\forall i \in \mathbb{N}\ \partial_S^i(R^{(1)}) \subset V(L)$), откуда следует, что цепь стабилизировалась.

Предположим теперь, что в цепь не вошли все объемные непустые классы эквивалентности. Предположим, что при этом цепь стабилизировалась. Тогда по пункту 1 некоторые объемные непустые классы эквивалентности так и не войдут в цепь $\partial_S^i(R^{(1)}), i \in \mathbb{N}$.

Очевидно, что в цепь входит класс $R^{(1)}$ или такие классы эквивалентности $R' \in V(L)$, что $R'|R^{(1)}$ или $\exists\{R'_1, ..., R'_r\} \subset V(L) : R'_1|R^{(1)}, ..., R'|R'_r, R'_j|R'_{j-1}, j \in \{2, ..., r\}$.

Но тогда тот факт, что некоторые непустые объемные классы никогда не войдут в цепь $\partial_S^i(R^{(1)}), i \in \mathbb{N}$ означает, что $\exists R^{fin} \in V(L) : R^{fin} \neq R^{(1)}, R^{fin} \not| R^{(1)}$ и $\forall r \in \mathbb{N}\ \nexists\{R'_1, ..., R'_r\} \subset V(L) : R'_1|R^{(1)}, R'|R'_r, R'_j|R'_{j-1}, j \in \{2, ..., r\}$. Но последнее противоречит лемме 15. Следовательно, наше предположение неверно. Поэтому, цепь не может стабилизироваться, пока в некоторый элемент цепи не вошли все непустые объемные классы эквивалентности. $\square$

Лемма 17 (второй критерий стабилизируемости)**.** *Цепь $\partial_S^i(R^{(1)}), i \in \mathbb{N}$ стабилизируется (при некотором $i = i_{stab}$) $\iff$ $\partial_{add}^{i_{stab}}(R^{(1)}) = \varnothing$.*

Доказательство. $(\Leftarrow)$: Пусть существует $i = i_{stab}$, при котором $\partial_{add}^i(R^{(1)}) = \varnothing$. Предположим, что при этом $\partial_S^i(R^{(1)}), i \in \mathbb{N}$ не стабилизировалась на индексе i_{stab} (то есть $\partial_S^{i_{stab}}(R^{(1)}) \neq \partial_S^{i_{stab}+1}(R^{(1)})$). Но тогда $\partial_{add}^{i_{stab}}(R^{(1)}) \overset{def}{=} \partial_S^{i_{stab}+1}(R^{(1)}) \setminus \partial_S^{i_{stab}}(R^{(1)}) \neq \varnothing$ – противоречие.

$(\Rightarrow)$: Пусть цепь стабилизировалась на элементе $\partial_S^{i_{stab}}(R^{(1)})$. Тогда, по определению, $\partial_S^{i_{stab}+1}(R^{(1)}) = \partial_S^{i_{stab}}(R^{(1)})$, откуда следует, что $\partial_{add}^{i_{stab}}(R^{(1)}) \overset{def}{=} \partial_S^{i_{stab}+1}(R^{(1)}) \setminus \partial_S^{i_{stab}}(R^{(1)}) = \varnothing$. $\square$

5. Основные леммы

Лемма 18. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – две CPL-функции, заданные над гиперплоскостями $\{l_1, ..., l_{k_1}\}$ и $\{p_1, ..., p_{k_2}\}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда:*

1) *Функция $f + g$ является CPL-функцией, причем ее можно задать над объединением $\{l_1, ..., l_{k_1}\} \cup \{p_1, ..., p_{k_2}\}$.*

2) *Функция $\alpha \cdot f$ является CPL-функцией, причем ее можно задать над множеством гиперплоскостей $\{l_1, ..., l_{k_1}\}$.*

Доказательство. **1.** Рассмотрим множество гиперплоскостей $\{l_1, ..., l_{k_1}\} \cup \{p_1, ..., p_{k_2}\}$. По лемме 10 можно считать, что $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – непрерывные кусочно-линейные функции, заданные над данным объединением $\{l_1, ..., l_{k_1}\} \cup \{p_1, ..., p_{k_2}\}$.

Отметим, что из курса математического анализа, известно, что $f + g$ – также непрерывная функция.

Далее, рассмотрим $\forall \chi \in R(\{l_1, ..., l_{k_1}\} \cup \{p_1, ..., p_{k_2}\})$. По определению, $\forall \overline{x} \in \chi \ f(\overline{x}) = f_\chi(\overline{x}), \ g(\overline{x}) = g_\chi(\overline{x})$, где $f_\chi(\overline{x}), g_\chi(\overline{x})$ – линейные части функций f, g, соответственно, на классе χ.

Но тогда $\forall \overline{x} \in \chi \ f(\overline{x}) + g(\overline{x}) = f_\chi(\overline{x}) + g_\chi(\overline{x})$. Но $f_\chi(\overline{x}) + g_\chi(\overline{x})$ – это тоже линейная функция. Таким образом, по определению, $f + g$ – кусочно-линейная функция, заданная над гиперплоскостями $\{l_1, ..., l_{k_1}\} \cup \{p_1, ..., p_{k_2}\}$.

2. Полностью аналогично, из курса математического анализа известно, что $\alpha \cdot f$ – непрерывная функция. И, кроме того, если f задана над $\{l_1, ..., l_{k_1}\}$, то $\forall \chi \in R(\{l_1, ..., l_{k_1}\})$ выполняется, что $\forall \overline{x} \in \chi \ f(\overline{x}) = f_\chi(\overline{x})$. Но тогда $\forall \overline{x} \in \chi \ \alpha \cdot f(\overline{x}) = \alpha \cdot f_\chi(\overline{x})$, причем $\alpha \cdot f_\chi(\overline{x})$ – линейная функция. Откуда и следует доказываемое. □

Лемма 19. *Пусть f – некоторая CPL-функция, заданная над разбиением $\{R^1, ..., R^s\}$, а h – некоторая ее выпуклая склейка на классах $R^+, R^- \in \{R^1, ..., R^s\}$. Тогда верно, что:*

1) *Функция $f - h$ является CPL-функцией*

2) *Функция $f - h$ задана над теми же классами эквивалентности, что и функция f.*

3) *Число строго выпуклых склеек функции $f - h$ как минимум на одну меньше, чем у функции f.*

Доказательство. **1.** Так как h – выпуклая склейка на классах R^+, R^-, то по определению $h(\overline{x}) = \max(f_{R^+}(\overline{x}), f_{R^-}(\overline{x}))$. Поэтому очевидно, что h – выпуклая, непрерывная и кусочно-линейная функция (заданная над единственной гиперплоскостью $l \in \{l_1, ..., l_k\} : R^0 \subset l$, где R^0 – пограничный класс при смежных классах R^+, R^-).

Но тогда по лемме 18 $f - h$ – CPL-функция.

2. Более того, по той же лемме 18, $f - h$ задается над теми же гиперплоскостями, что и f. Следовательно, $f - h$ можно задать над теми же классами эквивалентности, что и функцию f.

3. Выберем произвольную пару смежных классов R^+, R^- со склейкой φ и обозначим R^0 – пограничный класс для данной пары смежных классов.

Отметим, что, если склейка φ была вогнутая, то функция $f-h$ будет равна на классах R^+, R^-, R^0 функции $\varphi - h$, которая является вогнутой (как сумма двух вогнутых функций). Следовательно, склейка по функции $f - h$ на классах R^+, R^- также будет вогнутой.

Если склейка φ была выпуклой, то мы ничего не можем утверждать про выпуклость или вогнутость функции $\varphi - h$ кроме одного случая. Это случай, когда $\varphi = h$. В этом случае на классах R^+, R^-, R^0 функция $\varphi - h$ будет вести себя, как константа. Поэтому ее можно реализовать как выпуклой, так и вогнутой склейкой. Такие склейки не считаются строго выпуклыми.

Таким образом, функция $f - h$ обладает числом строго выпуклых склеек на единицу меньшим, чем число строго выпуклых склеек у функции f. □

Лемма 20. *Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ не имеет строго вогнутых склеек, то она выпуклая.*

Доказательство. Пусть f задана над некоторым разбиением $R(L) = \{R^1, ..., R^s\}$, порожденным гиперплоскостями $L = \{l_1, ..., l_k\}$. Без ограничения общности положим, что $V(L) = \{R^1, ..., R^{s'}\}$, где $\{1, ..., s'\} \subset \{1, ..., s\}$. Отметим, что отсутствие строго вогнутых склеек у f означает, что все ее склейки являются выпуклыми (и какие-то из них, быть может, одновременно являются вогнутыми).

По определению, это означает, что для любых двух смежных классов $R^i, R^j \in V(L)$ верно, что $\forall \overline{x} \in R^i$ $f_{R^i}(\overline{x}) \geqslant f_{R^j}(\overline{x})$. Покажем, что $\forall R^i, R^j \in V(L)$ (не обязательно смежных) выполняется, что $\forall \overline{x} \in R^i$ $f_{R^i}(\overline{x}) \geqslant f_{R^j}(\overline{x})$.

Сначала выберем (зафиксируем) $\forall R^{(1)} \in V(L)$ и покажем, что $\forall R^j \in V(L)$ $\forall \overline{x} \in R^{(1)}$ $f_{R^{(1)}}(\overline{x}) \geqslant f_{R^j}(\overline{x})$. Для этого рассмотрим цепочку расширений $\partial^i_S(R^{(1)}) = \underbrace{\partial_S(...\partial_S(R^{(1)}))}_{i \text{ раз}}$, $i \in \mathbb{N}$.

По лемме 16 данная цепочка стабилизируется лишь при достижении всего множества $V(L)$. Обозначим момент $i \in \mathbb{N}$ стабилизации цепочки $\partial^i_S(R^{(1)})$, $i \in \mathbb{N}$ через i_{stab}.

Покажем теперь по индукции, что $\forall i \in \{1, ..., i_{stab}\}$ и $\forall R^{(i+1)} \in \partial^i_S(R^{(1)})$ выполняется, что $\forall \overline{x} \in R^{(1)}$ $f_{R^{(1)}}(\overline{x}) \geqslant f_{R^{(i+1)}}(\overline{x})$.

База индукции: Пусть $i = 1$. Тогда $\partial^i_S(R^{(1)}) = \partial_S(R^{(1)})$. И по построению $\forall R^{(2)} \in \partial_S(R^{(1)})$ либо совпадает с $R^{(1)}$, либо является смежным к $R^{(1)}$ и по условию леммы $\forall \overline{x} \in R^{(1)}$ $f_{R^{(1)}}(\overline{x}) \geqslant f_{R^{(2)}}(\overline{x})$.

Шаг индукции: Пусть утверждение верно до $i-1$ включительно. Покажем, что утверждение верно для i. Действительно, если $i-1 \geqslant i_{stab}$, то при переходе от $i-1$ к i новых классов не добавляется (так как цепь стабилизируется на множестве всех непустых объемных классов эквивалентности) и утверждение доказано.

Если же $i-1 < i_{stab}$, то по лемме 16 цепь $\partial_s^i(R^{(1)}),\ i \in \mathbb{N}$ еще не стабилизировалась, поэтому по лемме 17 $\partial_{add}^{i-1}(R^{(1)}) = \partial_S^i(R^{(1)}) \backslash \partial_S^{i-1}(R^{(1)}) \neq \varnothing$. Тогда $\partial_S^i(R^{(1)}) = \partial_{add}^{i-1}(R^{(1)}) \cup \partial_S^{i-1}(R^{(1)})$. Причем для $\partial_S^{i-1}(R^{(1)})$ по предположению индукции утверждение верно (то есть $\forall R^{(i+1)} = R^{(i)} \in \partial_S^{i-1}(R^{(1)})\ \forall \overline{x} \in R^{(1)}\ f_{R^{(1)}}(\overline{x}) \geqslant f_{R^{(i)}}(\overline{x})$). Следовательно, остается доказать утверждение только для $\partial_{add}^{i-1}(R^{(1)})$.

Возьмем $\forall R^{(i+1)} \in \partial_{add}^{i-1}(R^{(1)})$ и покажем, что $\forall \overline{x} \in R^{(1)}\ f_{R^{(1)}}(\overline{x}) \geqslant f_{R^{(i+1)}}(\overline{x})$. Так как в $\partial_{add}^{i-1}(R^{(1)})$ по построению содержатся только новые классы, смежные с классами из $\partial_S^{i-1}(R^{(1)})$, то для $R^{(i+1)}$ найдется класс $R^{(i)} \in \partial_S^{i-1}(R^{(1)})$, смежный с классом $R^{(i+1)}$. По индукции, $\forall \overline{x} \in R^{(1)}\ f_{R^{(1)}}(\overline{x}) \geqslant f_{R^{(i)}}(\overline{x})$.

Пусть также сигнатуры классов $R^{(i)}$ и $R^{(i+1)}$ отличаются в компоненте $j_{i,i+1} \in \{1, ..., k\}$.

Далее, так как $R^{(i)}$ и $R^{(i+1)}$ – смежные классы и все склейки у функции f – выпуклы, то $\forall \overline{x} \in R^{(i)}\ f_{R^{(i)}}(\overline{x}) \geqslant f_{R^{(i+1)}}(\overline{x})$.

Далее возможны два случая:

• Пусть $\sigma_{j_{i,i+1}}(R^{(1)}) = \sigma_{j_{i,i+1}}(R^{(i)})$. Это означает, что классы $R^{(1)}, R^{(i)}$ лежат по одну сторону от гиперплоскости l, разделяющей классы $R^{(i)}, R^{(i+1)}$ (на которой всегда достигается равенство $f_{R^{(i)}}, f_{R^{(i+1)}}$). Без ограничения общности, можно считать, что $R^{(1)}, R^{(i)} \in l^+$. Тогда по пунктам 2 и 4 леммы 9 и из выражения $\forall \overline{x} \in R^{(i)}\ f_{R^{(i)}}(\overline{x}) \geqslant f_{R^{(i+1)}}(\overline{x})$ получаем, что $\forall \overline{x} \in l^+\ f_{R^{(i)}}(\overline{x}) \geqslant f_{R^{(i+1)}}(\overline{x})$. Откуда следует, что $\forall \overline{x} \in R^{(1)}\ f_{R^{(i)}}(\overline{x}) \geqslant f_{R^{(i+1)}}(\overline{x})$.

Учитывая, что $\forall \overline{x} \in R^{(1)}\ f_{R^{(1)}}(\overline{x}) \geqslant f_{R^{(i)}}(\overline{x})$, получаем, что в данном случае $\forall \overline{x} \in R^{(1)}\ f_{R^{(1)}}(\overline{x}) \geqslant f_{R^{(i+1)}}(\overline{x})$ и утверждение для этого случая доказано.

• Пусть $\sigma_{j_{i,i+1}}(R^{(1)}) \neq \sigma_{j_{i,i+1}}(R^{(i)})$. Это означает, что классы $R^{(1)}, R^{(i)}$ лежат по разные стороны от гиперплоскости l, разделяющей классы $R^{(i)}, R^{(i+1)}$. Но тогда $\sigma_{j_{i,i+1}}(R^{(1)}) = \sigma_{j_{i,i+1}}(R^{(i+1)})$ (так как именно в этой компоненте с номером $j_{i,i+1}$ и отличаются классы $R^{(i)}, R^{(i+1)}$) и получается, что классы $R^{(1)}, R^{(i+1)}$ находятся по одну сторону от гиперплоскости l.

Обозначим $N = \left|\{j | \sigma_j(R^{(1)}) \neq \sigma_j(R^{(i)})\}\right|$. Но тогда выполняется $\left|\{j | \sigma_j(R^{(1)}) \neq \sigma_j(R^{(i+1)})\}\right| = N - 1$, что противоречит построению $\partial_{add}^{i-1}(R^{(1)})$.

Действительно, по построению и лемме 8 во множестве $\partial_S^i(R^{(1)})$ содержатся классы, сигнатуры которых отличаются от сигнатуры $\sigma(R^{(1)})$

не более, чем в i компонентах. Причем, по построению ($\partial_S^i(R^{(1)}) = \partial_{add}^{i-1}(R^{(1)}) \cup \partial_S^{i-1}(R^{(1)})$), во множестве $\partial_{add}^{i-1}(R^{(1)})$ содержатся только те классы, сигнатуры которых отличаются от сигнатуры $\sigma(R^{(1)})$ ровно в i компонентах. Таким образом, на i-ом шаге в $\partial_{add}^{i-1}(R^{(1)})$ не могут попасть классы с $i-1$ инверсией, так как они уже есть в $\partial_S^{i-1}(R^{(1)})$. Получили противоречие, поэтому данный случай невозможен.

Таким образом, показано, что $\forall R^j \in V(L)\ \forall \overline{x} \in R^{(1)}\ f_{R^{(1)}} \geqslant f_{R^j}(\overline{x})$. А в силу того, что $R^{(1)}$ – это произвольный непустой объемный класс эквивалентности, то отсюда и получаем доказываемое (что $\forall R^i, R^j \in V(L)\ \forall \overline{x} \in R^i\ f_{R^i}(\overline{x}) \geqslant f_{R^j}(\overline{x})$).

Но тогда для $f(\overline{x})$ верен тот же вывод, что и для любой выпуклой CPL-функции (см. лемму 4). Отсюда и из основной теоремы в [11] получаем, что функция $f(\overline{x})$ представима в виде $\max\limits_{i \in \{1,\ldots,s'\}}(f_{R^i}(\overline{x}))$. А так как последняя функция выпукла, то и $f(\overline{x})$ – тоже выпукла. □

Лемма 21. *Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ не имеет строго выпуклых склеек, то она вогнутая.*

Доказательство. Отметим, что $-f$ не имеет строго вогнутых склеек. Но тогда данная функция является выпуклой по лемме 20. А тогда f – вогнутая. □

6. Основные результаты

Теорема 1. *Любую CPL-функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданную над разбиением $R(L) = \{R^1, ..., R^s\}$, порожденным гиперплоскостями $L = \{l_1, ..., l_k\}$, можно восстановить нейронной схемой над базисом B_1 нелинейной глубины 1 и нелинейной сложности, не превосходящей $k \cdot \lceil s'/2 \rceil + 1$, где $s' = |V(L)|$.*

Доказательство. Рассмотрим множество строго выпуклых склеек функции f. Пусть это множество $S^{(0)}$. Выберем произвольную строго выпуклую склейку $h_1 \in S^{(0)}$ и рассмотрим функцию $g_1 = f - h_1$. По лемме 19 функция g_1 также является CPL-функцией, заданной над теми же гиперплоскостями $\{l_1, ..., l_k\}$, но при этом множество строго выпуклых склеек $S^{(1)}$ для функции g_1 обладает тем свойством, что $|S^{(1)}| \leqslant |S^{(0)}| - 1$.

Продолжая процесс до некоторого N, при котором $S^{(N)} = \varnothing$, получаем функцию $g_N = f - h_1 - h_2 - ... - h_N$. Таким образом, функция g_N обладает пустым множеством строго выпуклых склеек. Но тогда по лемме 21 функция g_N – вогнутая.

Вогнутую функцию можно представить нейронной схемой над базисом B_1 [11], поэтому g_N выразима нейронной схемой над B_1. Но тогда

$f = h_1 + ... + h_N + g_N$, где $h_1, ..., h_N, g_N$ – функции, выразимые нейронными схемами. Следовательно, f также выразима нейронной схемой.

Отметим, что так как $h_1, ..., h_N, g_N$ можно выразить в виде нейронной схемы нелинейной глубины 1 [11], то f тоже является нейронной схемой нелинейной глубины 1 над базисом B_1.

Оценим нелинейную сложность такой нейронной схемы. Так как функции $h_1, ..., h_N, g_N$ выразимы над базисом B_1 нейронными схемами нелинейной сложности 1, то достаточно оценить число N. Самая простая оценка сверху — это число выпуклых склеек функции f. Но тогда $|\{h_1, ..., h_N, g_N\}| = N + 1 \leqslant |S^{(0)}| + 1$. Оценим теперь число выпуклых склеек.

Для этого возьмем произвольную гиперплоскость l. Так как в каждой склейке участвует два непустых объемных класса, то данная гиперплоскость может дать нам максимум $\lceil s'/2 \rceil$ склеек, где s' – число непустых объемных классов. Так как гиперплоскостей k штук, то получаем оценку сверху $|S^{(0)}| \leqslant k \cdot \lceil s'/2 \rceil$.

Но тогда получается, что $|\{h_1, ..., h_N, g_N\}| \leqslant k \cdot \lceil s'/2 \rceil + 1$. Таким образом, нелинейную сложность полученной нейронной схемы можно оценить сверху числом $k \cdot \lceil s'/2 \rceil + 1$. □

Любую CPL-функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданную над разбиением $R(L) = \{R^1, ..., R^s\}$, порожденным гиперплоскостями $L = \{l_1, ..., l_k\}$, можно восстановить нейронной схемой над базисом B_2 нелинейной глубины $\lceil log_2\ s' \rceil$ и нелинейной сложности, не превосходящей $s' \cdot (k \cdot \lceil s'/2 \rceil + 1)$, где $s' = |V(L)|$.

Доказательство. По теореме 1 данную функцию f можно представить в виде суммы $f = h_1 + ... + h_N + g_N$, где $h_1, ..., h_N, g_N$ – выпуклые или вогнутые функции, а $|\{h_1, ..., h_N, g_N\}| = N + 1 \leqslant k \cdot \lceil s'/2 \rceil + 1$.

Но по следствию к теореме 1 в работе [11] каждую функцию $\varphi \in \{h_1, ..., h_N, g_N\}$ можно представить нейронной схемой нелинейной глубины $\lceil log_2\ s' \rceil$ и нелинейной сложности s' в базисе B_2.

Тогда из выражения $h_1 + ... + h_N + g_N$ следует, что функцию f можно реализовать нейронной схемой нелинейной сложности $s' \cdot (N + 1) \leqslant s' \cdot (k \cdot \lceil s'/2 \rceil + 1)$. Причем, так как нелинейная глубина функции $h_1 + ... + h_N + g_N$ равна максимальной нелинейной глубине ее аргументов, а все ее аргументы обладают нелинейной глубиной $\lceil log_2\ s' \rceil$, то получаем, что нелинейная глубина f равна $\lceil log_2\ s' \rceil$ в базисе B_2. □

Теорема 2. $[B_1] = CPL$, $[B_2] = CPL$

Доказательство. Докажем, что $[B_1] = CPL$, равенство $[B_2] = CPL$ доказывается аналогично. Доказывать будем методом двойного включения:

• ($[B_1] \subset CPL$) : Так как в базисе B_1 содержатся только кусочно-линейные непрерывные функции, то при суперпозициях также будут получаться кусочно-линейные непрерывные функции [6].

• ($CPL \subset [B_1]$) : Пусть есть произвольная CPL-функция f. Тогда по теореме 1 данную функцию можно представить в виде нейронной схемы над базисом B_1. Следовательно, $f \in [B_1]$. □

Автор выражает благодарность научному руководителю, к.ф.-м.н., научному сотруднику В.С. Половникову за постановку задачи и научное руководство, а также д.ф.-м.н., доценту А.А. Часовских за помощь в проверке полученных результатов.

Список литературы

[1] Половников В.С., *Об оптимизации структурной реализации нейронных сетей*, Диссертация на соискание степени кандидата наук, Москва, 2007.

[2] Яблонский С.В., *Введение в дискретную математику*, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва, 1986.

[3] Simon Haykin, *Neural Networks. A Comprehensive Foundation*, Prentice Hall International, Inc., Canada, 2006.

[4] Шишляков В.Г., “О построении явной архитектуры нейронной сети, приближающей кусочно-линейные функции”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **26**:2 (2022), 42–60.

[5] McCulloch W.S., Pitts W., “A logical calculus of the ideas immanent nervous activity”, *Bull. Of math. Biophysics*, **5** (1943), 115–133.

[6] Кан А.Н., “Вопросы выразимости в классе нейронных функций”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **19**:1 (2015), 35–38.

[7] Кан А.Н., “Вопросы полноты в классе кусочно-линейных непрерывных функций”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21**:2 (2017), 46–56.

[8] Кан А.Н., “Вопросы выразимости в классе согласованных функций”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:2 (2019), 125–133.

[9] Кан А.Н., “Решетка 1-следов замкнутых классов кусочно-линейных функций”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:3 (2020), 121–142.

[10] Самсонова Н.А., *Класс кусочно-линейных непрерывных функций*, Бакалаврская работа, Якутск, 2015.

[11] Шишляков В.Г., “Восстановление выпуклых функций класса CPL нейронными сетями над RELU-базисами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **26**:4 (2022), 174–197.

[12] Мищенко А.С., Фоменко А.Т., *Курс дифференциальной геометрии и топологии*, Факториал Пресс, Москва, 2000.

[13] Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М., *Задачи по топологии*, СПбГУ, Санкт-Петербург, 2000.

CPL-functions expressibility by neural circuits on ReLU bases

Shishlyakov V.G.

The paper considers the question of the expressibility of any continuous particle-linear function of several real variables in the form of a neural circuit over a basis with nonlinearities of the max type. Then the result is transferred to neural circuits built over a basis with a single non-linear RELU function.

Before proving the result, several auxiliary, technical lemmas are formulated and proved, expanding the existing knowledge about the properties of particle-linear functions and equivalence classes generated by a certain set of hyperplanes.

The paper also gives estimates of nonlinear complexity and depth for the constructed neural circuits in two given bases.

Finally, the paper proves the equality of the class of continuous particle-linear functions, the class of functions representable by neural circuits over a basis of the first type, and the class of functions representable by neural circuits over a basis of the second type.

Keywords: Neural networks, architecture, functions recovery, functions expressibility, convex functions, continuous particle-linear functions, ReLU function, maximum function.

References

[1] Polovnikov V.S., *On optimization of the structural implementation of neural networks*, Ph.D. Thesis ... physical and mathematical sciences, MSU, Moscow, 2007 (In Russian).

[2] YAblonskij S.V., *Introduction to discrete mathematics*, eds. fiz.-mat.lit., «Science», Moscow, 1986 (In Russian).

[3] Simon Haykin, *Neural Networks. A Comprehensive Foundation*, Prentice Hall International, Inc., Canada, 2006.

[4] Shishlyakov V.G., "On the construction of an explicit neural network architecture that approximates particle-linear functions", *Intelligent systems. Theory and applications.*, **26**:2 (2022), 42–60 (In Russian).

[5] McCulloch W.S., Pitts W., "A logical calculus of the ideas immanent nervous activity", *Bull. Of math. Biophysics*, **5** (1943), 115–133.

[6] Kan A.N., "Issues of expressibility in the class of neural functions", *Intelligent systems. Theory and applications.*, **19**:1 (2015), 35–38 (In Russian).

[7] Kan A.N., "Questions of completeness in the class of continuous particle-linear functions", *Intelligent systems. Theory and applications.*, **21**:2 (2017), 46–56 (In Russian).

[8] Kan A.N., "Issues of expressibility in the class of consistent functions", *Intelligent systems. Theory and applications.*, **23**:2 (2019), 125–133 (In Russian).

[9] Kan A.N., "Lattice of 1-traces of closed classes of particle-linear functions", *Intelligent systems. Theory and applications.*, **24**:3 (2020), 121–142 (In Russian).

[10] Samsonova N.A., *Class of continuous particle-linear functions*, Graduate work, Yakutsk, 2015 (In Russian).

[11] Shishlyakov V.G., "Convex CPL-functions recovering by neural networks on RELU-bases", *Intelligent systems. Theory and applications.*, **26**:3 (2022), 174–197 (In Russian).

[12] Mishchenko A.S., Fomenko A.T., *Course in Differential Geometry and Topology*, Factorial Press, Moscow, 2000 (In Russian).

[13] Viro O.Ya., Ivanov O.A., Netsvetaev N.Yu., Kharlamov V.M., *Topology tasks*, St. Petersburg State University, St. Petersburg, 2000 (In Russian).