

О континуальных структурах классов конечных автоматов

С. В. Алешин¹

Дается описание новых континуальных структур замкнутых классов автоматов.

Ключевые слова: континуальные структуры, замкнутые классы, автоматы.

Структуры замкнутых классов автоматных отображений привлекали внимание авторов с первых исследований по теории автоматов. Уже первые работы структурной теории автоматов, в частности, работы В. Б. Кудрявцева [1, 2], обнаружили континуальные семейства классов автоматов, связанные с решением задачи выразимости. Для функциональной системы автоматных отображений с операциями суперпозиции и обратной связи P им была доказана континуальность множества предполных (максимальных) классов. Его доказательство распространяется и на оператор замыкания относительно только операций суперпозиции. Однако, для этой функциональной системы сравнительно недавно Д. Н. Бабиным было доказано существование замкнутых классов, не содержащихся ни в каком предполном классе, что, конечно, создает принципиально новую ситуацию в проблематике функциональной полноты.

Другое континуальное семейство классов, предполных относительно суперпозиции и обратной связи, было обнаружено в работе [3]. Каждый из этих классов содержит множество K всех автоматных функций, в каждом состоянии у которых реализуются функции алгебры логики, существенно зависящие не более чем от одной переменной (в разных состояниях могут быть разные переменные).

Как известно, проблема полноты конечных систем автоматов из P алгоритмически неразрешима [4]. В отличие от этого, для систем функций из P , содержащих множество K , то есть имеющих вид KUS , где S — конечная система автоматов, существует алгоритм распознавания полноты таких систем [5].

Заметим также, что в P существует базис относительно операции суперпозиции [2], то есть неприводимая полная система автоматов, при

¹Алешин Станислав Владимирович — доктор физ-мат наук, профессор, каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: stanislav.aleshin@rambler.ru.

Aleshin Stanislav Vladimirovich — Dr.Sc., Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

этом все элементы базиса, кроме автомата с одним состоянием, в котором вычисляется функция Шеффера, это автоматы из множества K .

Все сказанное привлекает внимание к множеству K , которое, как выяснилось, само обладает рядом свойств, подобных выше перечисленным свойствам класса всех автоматных функций P . Нетрудно видеть, что множество K замкнуто относительно операций суперпозиции и обратной связи, то есть является классом. Класс K является классом конечной глубины в P — достаточно добавить автомат без памяти, реализующий функцию Шеффера.

1. Класс K

Напомним стандартные определения. Через $[\Pi]$ обозначим замыкание множества Π относительно операций суперпозиции и обратной связи. Множество Π замкнуто, если $[\Pi] = \Pi$. Множество Π называется предполным классом в K , если

- 1) $\Pi \neq K$,
- 2) для любого автомата $f \notin \Pi$ имеет место $[\Pi \cup f] = K$.

Предполный класс, очевидно, замкнут.

Теорема 1. *В K имеется континуум предполных классов.*

Доказательство. Доказательство, в основном, использует конструкцию, предложенную В. Б. Кудрявцевым в работе [1], которую он применил для теоремы о континуальности множества предполных в P классов. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — автоматная функция, а схема на рис. 1 вычисляет функцию $W(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ такую, что при подстановке последовательности γ на место входной переменной x_{n+1} эта схема вычисляет автоматную функцию f :

$$f(x_1, \dots, x_n) = W(x_1, \dots, x_n, \gamma),$$

а при подстановке любой последовательности $\beta \neq \gamma$ схема переключается в состояние, в котором вычисляется функция $\varphi(x) = x$. Заметим, что если о.-д. функция $f(x_1, \dots, x_n)$, используемая в этой схеме, принадлежит K , то есть в каждом состоянии реализуется функция алгебры логики не более чем одной переменной, то и функция принадлежит K . Поэтому эта конструкция может быть использована для класса K .

Как обычно, наряду с употреблением термина ограниченно-детерминированная функция (о.-д. функция) мы используем название «а-функция (автоматная функция)».

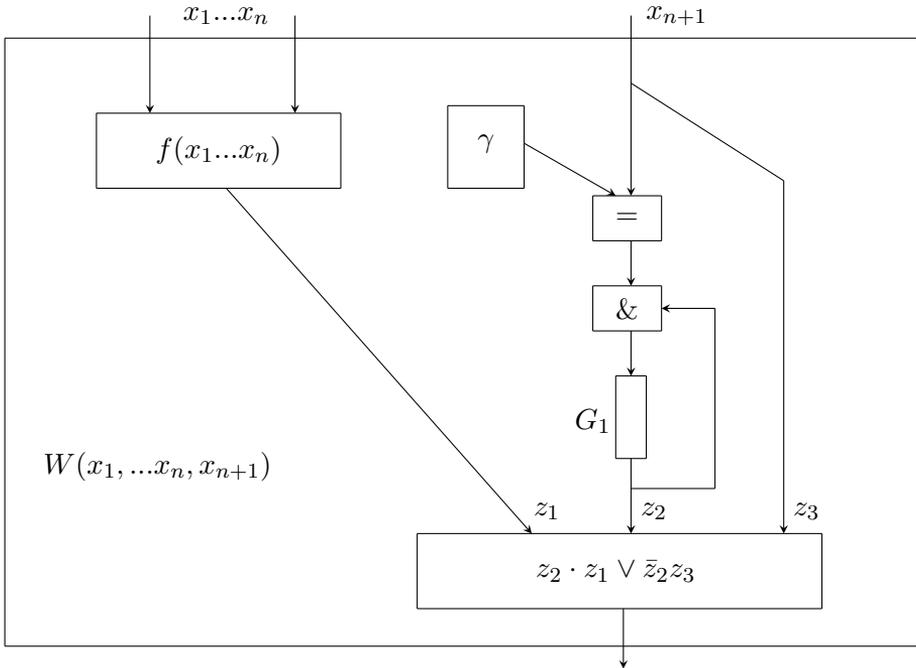


Рис. 1.

Пусть B — множество последовательностей из 0 и 1. Скажем, что а-функция $f(x_1, \dots, x_n)$ сохраняет B , если для любого набора $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ последовательностей из B значение $f(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ принадлежит B .

Пусть $\Gamma = \{\gamma_i \mid \gamma_i = \overbrace{0..0}^i 1 \overbrace{0..0}^i 1 \overbrace{0..0}^i 1 \dots, i = 1, 2, \dots\}$. Для подмножества $\Gamma' \subseteq \Gamma$ через $]\Gamma'[,$ обозначим множество последовательностей, отличающихся от последовательностей из Γ' в конечном числе разрядов. Очевидно, что если $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma, \Gamma_1 \neq \Gamma_2$, то $]\Gamma_1[\neq]\Gamma_2[$.

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется почти константной, если существует t_f и последовательность $\beta = \beta(1)\beta(2)\dots$, такие что для любого набора последовательностей $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, если $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \gamma(1)\gamma(2)\dots$, то $\gamma(t) = \beta(t)$ при $t \geq t_f$.

Скажем, что а-функция $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет переменную x_i , обладающую F -свойством на множестве последовательностей $B =]\Gamma'[,$ если при подстановке на место переменной x_i последовательности $\beta \in B$, $\beta = \beta_1\beta_2\dots$ наступает момент t_β , в который автомат переходит в состояние, которое в дальнейшем не меняется, и в котором реализуется выходная функция x_i .

Пусть $U(B)$, $B =]\Gamma'$, $\Gamma' \subseteq \Gamma$ — множество а-функций, которое содержит

- а) любую почти константную функцию, сохраняющую B ,
- б) любую функцию, которая имеет переменную, обладающую F -свойством на B .

Нетрудно видеть, что $U(B)$ замкнуто относительно операций суперпозиции и обратной связи.

Обозначим через $R(\gamma, F)$ функцию от $n+1$ переменных, вычисляемую схемой рис. 1.

$$R(\gamma, F) = W(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}).$$

Заметим, что если последовательность γ не содержится в множестве B , то для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет место $R(\gamma, F) \in U(B)$. Таким образом, если добавить к $U(B)$ константную функцию γ , то замыкание $[U(B) \cup \gamma] = K$, так как для любой функции f подставляя γ на вход $R(\gamma, F)$, получим f .

Если B_1, B_2 — разные подмножества Γ , то найдется γ такая, что $\gamma \in B_1$, $\gamma \notin B_2$, и, следовательно $\gamma \in U(B_1)$, $\gamma \notin U(B_2)$. Поэтому $[U(B_1) \cup U(B_2)] \supseteq [U(B_2) \cup \gamma] = K$, т.е. $U(B_1) \neq U(B_2)$.

Покажем, что расширяется до предполного в класса. Разобьем множество всех функций из K на две части. В первую войдут такие функции φ , что $[\varphi \cup U(B_2)] = K$. В частности, в эту группу попадет константная функция γ . Во вторую группу войдут все остальные функции, эту группу мы упорядочим, элементы группы занумеруем —

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s, \dots, [\varphi_i \cup U(B_2)] \neq K.$$

Пусть $\mathfrak{N}_1 = [\varphi_1 \cup U(B_2)] \neq K$. Если для $i > 1$ $\varphi_i \in \mathfrak{N}_1$, то \mathfrak{N}_1 — предполный класс. В противном случае возьмем первый номер i_1 такой, что $\varphi_{i_1} \notin \mathfrak{N}_1$, и рассмотрим подпоследовательность Π_2 последовательности $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, в которую войдут все $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots$, такие что $\varphi_{i_s} \notin \mathfrak{N}_1$. Пусть $\mathfrak{N}_2 = [\mathfrak{N}_1 \cup \varphi_{i_1}]$, для него повторим процедуру, которую провели для \mathfrak{N}_1 — либо \mathfrak{N}_2 — предполный класс, либо рассмотрим \mathfrak{N}_3 , и т.д.

Возможны два варианта

- 1) процесс заканчивается на некотором номере — мы построили предполный класс.
- 2) процесс бесконечен. Рассмотрим класс $\mathfrak{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{N}_i$.

Заметим, что $\mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{N}_{i+1}$. Множество \mathfrak{N} — это предполный класс. В самом деле

а) \mathfrak{N} — замкнутое множество.

б) $\mathfrak{N} \neq P$, поскольку $\gamma \notin \mathfrak{N}$.

в) если $f \notin \mathfrak{N}$, то f принадлежит первой части разбиения, следовательно $[f \cup U(B_2)] = K$.

Поскольку у множества Γ континуум подмножеств, теорема доказана. □

Как и при рассмотрении класса всех автоматов, в случае класса K обнаруживается второе континуальное семейство предполных множеств.

Обозначим через L множество всех автоматов из K , у которых в состояниях реализуются функции из множества $\{0, 1, x_i, i \in N\}$. Можно заметить, что $K = [L \cup \bar{x}]$.

Теорема 2. *В классе K имеется континуум предполных классов, каждый из которых содержит L .*

Доказательство. Пусть p_1, p_2, \dots — последовательность всех простых чисел, $p_1 = 3$. Пусть R_1, R_2 — две последовательности из 0 и 1, $R_1 = \{r_{p_1}^{(1)}, r_{p_2}^{(1)}, \dots\}$, $R_2 = \{r_{p_1}^{(2)}, r_{p_2}^{(2)}, \dots\}$, $r_{p_1}^{(1)} = r_{p_1}^{(2)}, \dots, r_{p_{m-1}}^{(1)} = r_{p_{m-1}}^{(2)}, r_{p_m}^{(1)} \neq r_{p_m}^{(2)}, r_{p_m}^{(1)} = 0, r_{p_m}^{(2)} = 1$.

Для каждого $p_i, i = 1, 2, \dots$ рассмотрим две функции переменных x_1, x_2 :

$$g_{p_i}^0(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1(t), & t = d \cdot p_i + 1, d = 0, 1, \dots \\ \bar{x}_2(t), & t - \text{остальные} \end{cases}$$

$$g_{p_i}^1(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1(t), & t = d \cdot p_i + 2, d = 0, 1, 2, \dots \\ \bar{x}_2(t), & t - \text{остальные} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функции $g_{p_i}^0, g_{p_i}^1$ принадлежат классу K .

Обозначим через S_{R_1} класс функций

$$S_{R_1} = L \bigcup_{r_{p_i} \in R_1} g_{p_i}^{(r_i)}$$

и через S_{R_2} класс функций

$$S_{R_2} = L \cup \bigcup_{r_{p_i} \in R_2} g_{p_i}^{(r_i)}.$$

Заметим, что $r_{p_m}^{(1)} \neq r_{p_m}^{(2)}, r_{p_m}^{(1)} = 0, r_{p_m}^{(2)} = 1$, и $g_{p_m}^{(0)} \in S_{R_1}, g_{p_m}^{(1)} \in S_{R_2}$, так что $S_{R_1} \neq S_{R_2}$ и при этом

$$S_{R_1} \cup S_{R_2} \supseteq \{g_{p_m}^{(0)}(x_1, x_2), g_{p_m}^{(1)}(x_1, x_2)\}.$$

Функция

$$h_{p_m}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1(t), & t = d \cdot p_m + 1 \\ x_2(t), & t - \text{остальные} \end{cases}$$

принадлежит L так как при всех (x_1, x_2) она принимает либо значение $x_1 \in \{0, 1, x\}$, либо $x_2 \in \{0, 1, x\}$.

Рассмотрим суперпозицию

$$\begin{aligned} h_{p_m}(g_{p_m}^1(x_1, x_2), g_{p_m}^0(x_1, x_2)) &= \begin{cases} g_{p_m}^{(1)}(x_1, x_2), & t = d \cdot p_m + 1 \\ g_{p_m}^0(x_1, x_2), & \text{ост. } t \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \bar{x}_2(t), & \text{т.к. } d \cdot p_m + 1 \neq d \cdot p_m + 2 \\ \bar{x}_2(t), & \text{т.к. } t \neq d \cdot p_m + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, $h_{p_m}(g_{p_m}^1, g_{p_m}^0) \equiv \bar{x}_2(t)$, следовательно

$$[S_{R_1} \cup S_{R_2}] \supseteq [L \cup \bar{x}] = K. \quad (1)$$

Кроме того, для любого R_i любая функция из S_{R_i} в некоторые моменты времени t реализует функцию $x(t)$: пусть взята суперпозиция функций $g_{p_{i_1}}^{r_{i_1}}, g_{p_{i_2}}^{r_{i_2}}, \dots, g_{p_{i_s}}^{r_{i_s}}$, тогда имеет место равенство $g_{p_{i_1}}^{r_{i_1}} = x_1(t)$ при $t = p_{i_2} \cdot p_{i_1} + 1$, то есть $x_1(t)$ при $t = p_{i_2} \cdot p_{i_1} + 1$, $g_{p_{i_2}}^{r_{i_2}} = x_1(t)$ при $t = d \cdot p_{i_2} + 1$, $d = 0, 1, \dots$, то есть $t = p_{i_2} \cdot p_{i_1} + 1$ при $t = p_{i_2} \cdot p_{i_1} + 1$.

Аналогично для $i_1, i_2, i_3, \dots, i_s$ $g_{p_{i_k}}^{r_{i_k}} = x_1(t)$ при $t = p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_k} + 1$.

Таким образом $[S_{R_i}] = K$.

Разных множеств S_{R_i} как и разных последовательностей из 0 и 1 — континуум. При этом S_{R_1}, S_{R_2} расширяются до предполных классов Π_1, Π_2 , соответственно, а из равенства (1) следует, что $\Pi_1 \neq \Pi_2$, что и требовалось.

Класс K наследует и такое важное свойство класса P как наличие базиса относительно суперпозиции, то есть системы (очевидно, бесконечной), в которой нет собственной полной подсистемы. \square

Теорема 3. *В классе K существует неприводимая полная относительно суперпозиции система (базис).*

Доказательство. Рассмотрим систему автоматов $\Phi = \{\bar{x}, 0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots\}$. Представим эту систему в виде последовательности наборов $G_0 = \{\bar{x}, 0\}, G_1 = \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{i_1}\}, G_2 = \{\Gamma_{i_1+1}, \dots, \Gamma_{i_2}\}, \dots, G_{s+1} = \{\Gamma_{i_s+1}, \dots, \Gamma_{i_{s+1}}\}, \dots$, то есть $\Phi = \{G_0, G_1, G_2, \dots\}$.

Набор $G_i, i = 1, 2, \dots$ состоит из всех автоматов с не более чем 2^i состояниями, $i = 1, 2, \dots$ и не более чем i входами, при этом в состояниях

реализуются функции x_m , в разных состояниях разные переменные. Заметим, что отождествляя переменные и подставляя константы 0 и 1, или отрицание \bar{x} , можно получить все автоматы с $\leq 2^i$ состояниями из класса K . Таким образом, меняя $i = 1, 2, \dots$, получим полную в K систему относительно суперпозиции.

Покажем, как, используя систему Φ , можно построить базис относительно суперпозиции в классе K .

Для каждого набора $G_i, i = 1, 2, \dots$ возьмем набор схем $R(A, \gamma_i), A \in G_1$ [рис. 1], которые «управляются» единой для всех схем набора периодической последовательностью γ_i , такой что $\gamma_i \in Z_i$, но $\gamma_i \notin Z_{i-1}$. Заметим, что количество схем для каждого i конечно, и возникает система конечных наборов схем $\{R(A, \gamma_i)\}$.

Последовательно рассматривая наборы из системы $\{R(A, \gamma_i)\}$, будем исключать из этих наборов те автоматы, которые выразимы через остальные автоматы. Отметим два свойства этого процесса. В силу конечности каждого набора процесс сокращения этого набора конечен. Кроме того, в каждом наборе останется по крайней мере один элемент. В противном случае этот единственный элемент A группы с номером i будет выражаться через элементы других групп. Однако все автоматы из групп с номерами меньшими i сохраняют множество последовательностей Z_{i-1} . Также и автоматы из групп с номерами большими i . Это свойство сохраняется при суперпозиции, тем самым автомат A не может быть получен суперпозицией элементов других групп, поскольку он не сохраняет множество Z_{i-1} .

Таким образом система множеств Φ может быть сокращена до независимой системы, то есть до базиса.

□

2. Класс L

Этот класс является подклассом конечной глубины класса K . Он содержит α -функции, в состояниях которых реализуются переменные или константы 0 и 1 (но не реализуются отрицания переменных). Нетрудно показать, что $K = [L \cup \bar{x}]$. Для класса L справедлив аналог теоремы Кудрявцева.

Теорема 4. *В классе L существует континуум предполных классов.*

Доказательство. Можно заметить, что у автомата построенного с помощью схемы из теоремы Кудрявцева, в состояниях реализуются функции из множества $\{0, 1, x_i\}$, что наглядно проверяется, если построить диаграмму переходов-выходов (рис. 2).

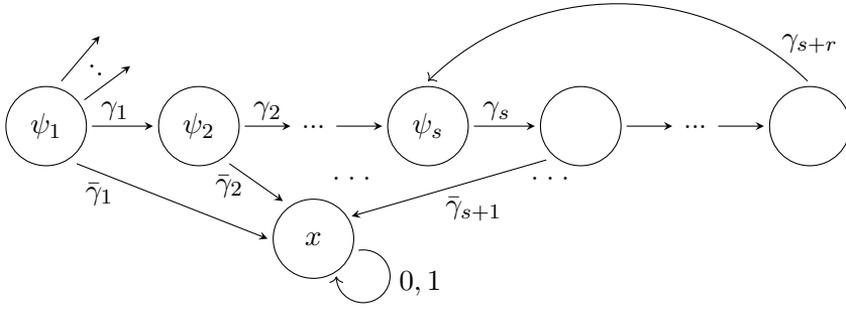


Рис. 2.

Дальше доказательство следует схеме доказательства теоремы Кудрявцева с рассмотрением континуального семейства подмножеств множества Γ .

□

Через Q обозначим класс автоматов, в состояниях которых реализуются функции из множества $\{0, x_i\}$.

Теорема 5. *В классе L существует континуум предполных подклассов, каждый из которых содержит подкласс Q .*

Доказательство. Пусть p_1, p_2, p_3, \dots — последовательность всех простых чисел, $p_1 = 3$. Пусть R_1, R_2 — две последовательности из нулей и единиц:

$$R_1 = \{r_{p_1}^{(1)}, r_{p_2}^{(1)}, r_{p_3}^{(1)}, \dots\}; \quad R_2 = \{r_{p_1}^{(2)}, r_{p_2}^{(2)}, r_{p_3}^{(2)}, \dots\},$$

$$r_{p_1}^{(1)} = r_{p_1}^{(2)}; r_{p_2}^{(1)} = r_{p_2}^{(2)}; \dots r_{p_{m-1}}^{(1)} = r_{p_{m-1}}^{(2)}; r_{p_m}^{(1)} \neq r_{p_m}^{(2)}; r_{p_m}^{(1)} = 0; r_{p_m}^{(2)} = 1.$$

Для каждого p_i рассмотрим две функции переменных x_1, x_2 :

$$g_{p_i}^{(0)}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1(t), & t = d \cdot p_i + 1, d = 0, 1, \dots \\ 1, & t - \text{остальные} \end{cases}$$

$$g_{p_i}^{(1)}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1(t), & t = d \cdot p_i + 2, d = 0, 1, \dots \\ 1, & t - \text{остальные} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функции $g_{p_i}^{(0)}, g_{p_i}^{(1)}$ принадлежат классу L .

Обозначим через S_{R_1} множество функций

$$S_{R_1} = Q \cup \bigcup_{r_{p_i} \in R_1} g_{p_i}^{(r_i)}$$

и через S_{R_2} множество функций

$$S_{R_2} = Q \cup \bigcup_{r_{p_i} \in R_2} g_{p_i}^{(r_i)}.$$

Напомним, что $g_{p_m}^{(0)} \in S_{R_1}, g_{p_m}^{(1)} \in S_{R_2}$ и таким образом $S_{R_1} \neq S_{R_2}$.

При этом

$$S_{R_1} \cup S_{R_2} \supseteq \{g_{p_m}^{(1)}(x_1, x_2), g_{p_m}^{(0)}(x_1, x_2)\}.$$

Функция

$$h_{p_m}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1(t), & t = d \cdot p_m + 1, \quad d = 1, 2, \dots \\ x_2(t), & \text{ост. } t \end{cases}$$

принадлежит Q , так как при всех t она принимает либо значение $x_1(t)$, либо $x_2(t)$.

Рассмотрим суперпозицию

$$\begin{aligned} h_{p_m}(g_{p_m}^{(1)}, g_{p_m}^{(0)}) &= \begin{cases} g_{p_m}^{(1)}(x_1, x_2), & t = d \cdot p_m + 1 \\ g_{p_m}^{(0)}(x_1, x_2), & t - \text{ост.} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 1, & \text{т.к. } t = d \cdot p_m + 1 \text{ [т.е. } \neq d \cdot p_m + 2] \\ 1, & \text{т.к. } t = d \cdot p_m + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, $h_{p_m}(g_{p_m}^1, g_{p_m}^0) \equiv 1$, следовательно

$$[S_{R_1} \cup S_{R_2}] \supseteq \{\{g_{p_m}^{(1)}, g_{p_m}^{(0)}\} \cup \{0, x\} \cup \{1\}\} = L.$$

Кроме того, для любого i любая функция из S_{R_i} в некоторые моменты времени t реализует функцию $x(t)$.

Пусть взята суперпозиция функций $g_{p_{i_1}}^{r_{i_1}}, g_{p_{i_2}}^{r_{i_2}}, \dots, g_{p_{i_s}}^{r_{i_s}}$.

Тогда имеет место равенство $g_{p_{i_1}}^{r_{i_1}} = x_1(t)$ при $t = d \cdot p_{i_2} + 1, d = 0, 1, \dots$

То есть, в том числе при $t = p_{i_2} \cdot p_{i_1} + 1$.

Также имеет место равенство $g_{p_{i_2}}^{r_{i_2}} = x_1(t)$ при $t = p_{i_2} \cdot p_{i_1} + 1$. То есть $x_1(t)$ при $t = p_{i_2} \cdot p_{i_1} + 1$.

Аналогично для i_1, i_2, \dots, i_s $g_{p_{i_k}}^{r_{i_k}} = x_1(t), k = 1, 2, \dots, s$ при $t = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{i_k} + 1$.

Поэтому $[S_{R_i}] \neq L$.

Разных множеств S_{R_i} , как и разных последовательностей из нулей и единиц — континуум. При этом S_{R_1}, S_{R_2} — расширяются до предполных классов Π_1, Π_2 соответственно, а из равенства $[S_{R_1} \cup S_{R_2}] = L$ следует, что $\Pi_1 \neq \Pi_2$, что и требовалось.

□

Теорема 6. В классе L существует базис относительно суперпозиции.

Доказательство. Оно фактически повторяет доказательство теоремы о базисе в классе K . Теперь в качестве полной системы рассмотрим $\Phi = \{0, 1, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots\}$, $G_0 = \{0, 1\}$, $G_1 = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{i_1}\}$, $G_2 = \{\Gamma_{i_1+1}, \dots, \Gamma_{i_2}\}, \dots$

Заметим, что автоматы $\Gamma_i, i \geq 1$ принадлежат классу L . Таким образом, можно провести построение базиса в L с помощью той же схемы рассуждений.

□

Обозначим через M класс автоматов Мура, то есть таких, у которых в состояниях реализуются константы 0 и 1. Нетрудно видеть, что класс L целиком содержит класс M .

Теорема 7 (типа Ку). В классе M существует континуум предполных классов.

Доказательство. Всякая константная функция, в том числе и константы из Γ , содержится в M . Пусть $U(B), B =]\Gamma'[, \Gamma' \subseteq \Gamma$ — множество почти константных функций из M . Класс $U(B)$ замкнут. Рассмотрим схему Σ_f рис. 3.

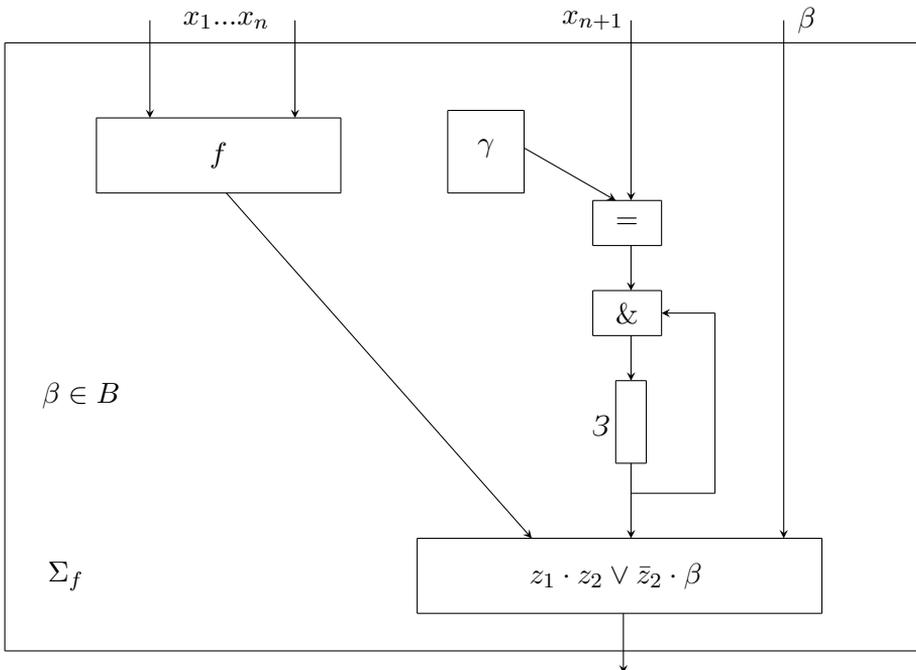


Рис. 3.

Диаграмма автомата, который реализуется схемой, частично приведена на рис. 4.

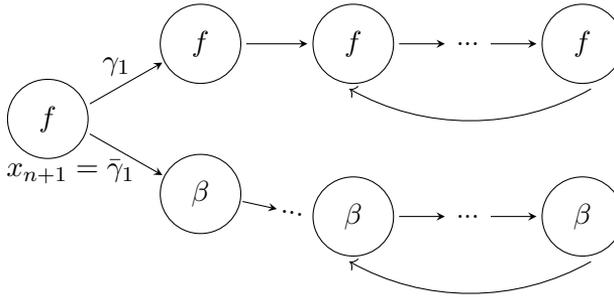


Рис. 4.

Если функция $f(x_1, \dots, x_n) \in M$ реализуется автоматом Мура, то в каждом состоянии этого автомата, очевидно, реализуется некоторая константа, то есть автомат схемы Σ_f — это автомат Мура.

Таким образом, для последовательности γ и любого автомата Мура $f(x_1, \dots, x_n)$ существует схема Σ_f , такая что $F_\Sigma = \Sigma_f(f, x_{n+1})$, и для последовательности γ выполнено $f = \Sigma_f(f, \gamma)$. Поэтому, если $f \in M$, то автомат Σ_f содержится в M , и следовательно для всякой функции $f \in M$ имеет место $f \in [\gamma, \Sigma_f]$. Следовательно $M \subseteq [\gamma \cup \Sigma_f]$. При этом все автоматы из $\{\Sigma_{f,\gamma}\}$ сохраняют множество $\{\Gamma \setminus \gamma\}$, поэтому $[\{\Sigma_{f,\gamma}\}] \neq M$.

Покажем, что $\{\Sigma_{f,\gamma}\}$ расширяется до предполного в M класса. Пусть $\Pi_0 = \varphi_1, \varphi_2, \dots$ — последовательность всех таких автоматов, что $[\varphi_i \cup U(B)] = M$. Эта последовательность не пуста, так как, например, можно взять $\varphi_i = \gamma$.

Пусть $\Pi_1 = \psi_1, \psi_2, \dots$ — все функции, не принадлежащие последовательности Π_0 .

Пусть $\mathfrak{N}_1 = [\psi_1 \cup U(B)]$. Если для всех $i > 1$ $[\mathfrak{N}_1 \cup \psi_i] = M$, то \mathfrak{N}_1 — предполный класс, и процесс окончен. В противном случае имеется подпоследовательность последовательности Π_1 , которая начинается с i_1 , что для i_1 выполнено $[\mathfrak{N}_1 \cup \psi_{i_1}] \neq M$.

Снова, пусть для $\mathfrak{N}_2 = [\mathfrak{N}_1 \cup \psi_{i_1}]$ имеет место $\mathfrak{N}_2 \neq M$, тогда \mathfrak{N}_2 — предполный класс, иначе ... и т.д.

Если процесс бесконечен, то рассмотрим класс $\hat{\mathfrak{N}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{N}_i$. Этот класс предполон — выполнены условия предполноты.

Заметим, что если $B_1 \neq B_2$, то они расширяются до разных предполных классов. В самом деле, пусть $\Pi_1 = \Pi_2$. Так как $\gamma \in B_1, \gamma \notin B_2$, то $[U(B_2) \cup \gamma] = M$, следовательно $\Pi_1 \neq \Pi_2$. Таким образом, разным подмно-

жествам B_i соответствуют разные предполные классы, отсюда мощность множества предполных классов равна континууму. Теорема доказана. \square

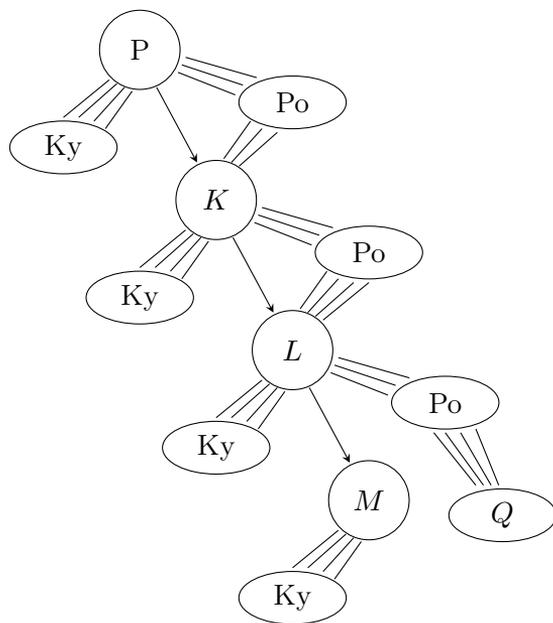


Рис. 5. Диаграмма классов.

K_y — континуум классов типа континуума Кудрявцева

P_o — континуум классов типа континуума Родина

K — класс функций $\langle 0, 1, x, x \rangle$, L — класс функций $\langle 0, 1, x \rangle$

M — класс автоматов Мура

Список литературы

- [1] В. Б. Кудрявцев, “О мощности множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами”, *Проблемы кибернетики*, вып. 13, М. Наука (1965), 45–74.
- [2] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин, *Введение в теорию автоматов*, Издательство МГУ, 2019.
- [3] А. А. Родин, “О континуальности множества специальных предполных классов во множестве автоматных отображений”, *Интеллектуальные системы*, 16:1–4 (2012), 329–334.

- [4] М. И. Кратко, “Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов”, **155**:1, М. ДАН СССР (1964).
- [5] С. В. Алешин, *Алгебраические системы автоматов*, стр. 108–116, М., МАКС ПРЕСС, 2016.

On continuum structures of finite automata classes
Aleshin S.V.

The description of new continuum structures of closed automata classes.

Keywords: continuum structures, closed classes, automata.

References

- [1] V. B. Kudryavcev, “O moshchnosti mnozhestv predpolnykh mnozhestv nekotorykh funktsional’nykh sistem, svyazannykh s avtomatami [On the Cardinality of Sets of Precomplete Sets of Some Functional Systems Related to Automata]”, *Problemy kibernetiki*, **13** (1965), 45–74 (in Russian).
- [2] V. B. Kudryavcev, S. V. Aleshin, A. S. Podkolzin, *Vvedenie v teoriyu avtomatov [Introduction to automata theory]*, MSU Press, 2019 (in Russian).
- [3] A. A. Rodin, “O kontinual’nosti mnozhestva spetsial’nykh predpolnykh klassov vo mnozhestve avtomatnykh otobrazhenii [On the continuity of the set of special precomplete classes in the set of automatic mappings]”, *Intelligent systems*, **16**:1–4 (2012), 329–334 (in Russian).
- [4] M. I. Kratko, “Algoritmicheskaya nerazreshimost’ problemy raspoznavaniya polnoty dlya konechnykh avtomatov [Algorithmic undecidability of the completeness recognition problem for finite automata]”, **155**:1, Doklady Akademii Nauk USSR (1964) (in Russian).
- [5] S. V. Aleshin, *Algebraicheskie sistemy avtomatov [Algebraic systems of automata]*, стр. 108–116, MaxPress, Moscow, 2016 (in Russian).