

Моделирование аэродинамики крыла клеточными автоматами

Гордеева А. С.¹

В работе исследуется задача моделирования движения полёта крыла в воздушном потоке. Для этой цели использованы клеточные автоматы, имитирующие движение воздуха, а также автомат, моделирующий крыло. Крыло имеет некоторую несимметричную форму. Клеточные автоматы изображают прямолинейное движение частиц, но при столкновении с крылом обтекают его, причем скорость частиц, движущихся по более длинной стороне крыла, больше скорости частиц с другой стороны. Из-за этого возникает подъемная сила. Автомат, моделирующий крыло, видит клеточные автоматы из некоторой окрестности и высчитывает их скорость, на основе этого вычисляется вектор подъемной силы. В результате чего крыло меняет свои координаты.

Найдена явная формула для вычисления скоростей в общем случае, достаточных для того, чтобы крыло поднималось. Также представлено доказательство утверждения для упрощенного профиля крыла. Приведен пример, демонстрирующий, что скорость, вычисленная по явной формуле, убывает при малом увеличении угла атаки.

Ключевые слова: автоматное моделирование аэродинамики крыла, однородная структура со входами, клеточный автомат, подъемная сила.

1. Введение

Задача моделирования потоков жидкости или газа может быть реализована как с помощью представления процессов в виде дифференциальных уравнений в частных производных (традиционный подход), так и на основе клеточно—автоматного моделирования. Клеточные автоматы обладают рядом возможностей, позволяющих предположить, что они могут быть полезными для моделирования движения жидкости и газа.

¹Гордеева Ангелина Сергеевна — студент каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: gordeeva_angelina@mail.ru

Gordeeva Angelina Sergeevna — student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

КА—моделирование потоков жидкости составляет собственное направление в газовой динамике, которое получило название Gas—Lattice [3, 4], что на русский язык переводится как “решеточный газ”. Это направление объединяет целую группу моделей, в основе которой лежит понятие классического КА. Принципы построения клеточно-автоматных моделей исходят из общих законов физики, действующих в некотором “дискретном мире”, стилизованном под молекулярную динамику. Газ представлен некоторыми гипотетическими частицами, движущимися в свободном пространстве и сталкивающимися друг с другом. Главное условие, которому должна удовлетворять функция переходов: обеспечение выполнения законов сохранения массы и импульса. Кроме этого, на КА—модель газовой динамики накладывается требование обеспечения изотропии процесса. В теории КА газовой динамики условия изотропии определяются как тензоры отображения дискретного пространства КА в декартову решетку.

Первая КА—модель газовой динамики получила название “НРР—газ” по первым буквам ее трех авторов (Hardy, Pazzis, Peaumeau) [5]. НРР—газ очень простая модель, удовлетворяющая требованиям сохранения массы и импульса, поскольку суммарная масса и скорости не изменяются функциями переходов. Условие изотропии удовлетворяется для тензоров до третьего ранга. Недостатком модели является тот факт, что она имеет “лишние” законы сохранения — суммарная масса и импульс сохраняются вдоль каждой оси пространства по отдельности. Именно этот недостаток является причиной того, что НРР—газ не получил распространения как модель потока жидкости.

Поиск КА—моделей, удовлетворяющих всем условиям изотропии, привел к появлению КА с гексагональной структурой клеточного пространства, который получил название ГНР—модели (по именам авторов Frish, Hasslacher, Pomeau) [6]. Гексагональная структура клеточного массива определяет число соседей каждой клетки, равное 6. Вычислительные эксперименты над ГНР—моделью показали очень близкое сходство с результатами решения уравнения Навье—Стокса при числах Рейнольдса $Re < 100$. Важнейшим научным результатом исследования этой модели стало строгое доказательство того, что она аппроксимирует уравнение Навье—Стокса со вторым порядком точности.

В настоящее время известно и изучено достаточно много КА, эволюция которых имитирует простые физические, химические, биологические и др. явления. Однако обычно возникают задачи моделирования сложных процессов, состоящих из нескольких более простых. При этом составные части сложного явления могут быть заданы различными КА.

У нас именно такой тип задачи. Имеется клеточно—автоматная модель движения воздушного потока. Если поместить в этот поток крыло,

то в модели необходимо учитывать его влияние. Возникает задача “сложения” двух процессов.

Частицы воздуха представлены однородной структурой со входами, они видят крыло и меняют свои законы движения рядом с ним. В свою очередь, крыло функционирует как единый автомат, который отличается от клеточных автоматов, помещенных в каждый узел решетки однородной структуры, и играет роль вычислителя. Крыло вырабатывает входы для остальных автоматов, производя расчёт по специальным формулам, поскольку мы хотим получить упрощенную модель, которая отражает только главные аспекты поднятия крыла. Работа посвящена моделированию такого процесса и изучению его свойств.

Автором не было найдено опубликованных работ по клеточно-автоматному моделированию аэродинамики крыла. Однако существует множество работ по численному моделированию обтекания крыла, например [8, 7, 9].

Автор выражает благодарность профессору Э.Э. Гасанову за постановку задачи и помощь в работе.

2. Основные понятия и формулировка результата

Введем основные определения: однородная структура со входами, подъемная сила.

Однородная структура со входами (сокращенно ОСВ) A определяется как набор (\mathbb{Z}^k, W, V) , где \mathbb{Z}^k — множество k -мерных векторов с целыми координатами, задающие узлы k -мерной целочисленной решетки; W — конечный автомат, помещенный в каждый узел решетки, у которого n входных каналов, l состояний, при этом в момент времени $t+1$ состояние автомата полагается равным:

$$s(t+1) = \varphi(x(t), s(t)), \quad \varphi : (E_m)^n \times S \rightarrow S \quad (1)$$

(здесь $E_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$, S — множество состояний автомата W , $x = (x_1, \dots, x_n)$, s — вход и состояние автомата W); $V = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$, где $\alpha_i \in \mathbb{Z}^k, i = \overline{1, p}$ — шаблон соседства: каждый вектор $\alpha_i \in V$ для автомата с координатами α определяет автомат с координатами $\alpha + \alpha_i$.

Автомат W называем *порождающим ОСВ автоматом*; функцию φ — *локальной функцией переходов*. Векторы из \mathbb{Z}^k с целочисленными координатами называем *узлами*, а узлы с помещенными в них автоматами — *ячейками ОСВВ*. Автомат W , помещенный в узел α , будет обозначать через W^α .

Функционирование ОСВ происходит в дискретные моменты времени $t = 1, 2, 3, \dots$. Для формального описания глобального функциониро-

вания ОСВ $A = (\mathbb{Z}^k, W, V)$ введем следующие определения. *Пространством входов* $B(X)$ ОСВ A называем множество функций следующего вида $X : N \times \mathbb{Z}^k \rightarrow (E_m)^n$, при этом $X_t(\alpha)$ означает вход ячейки α в момент времени t . *Пространством состояний* $B(\Sigma)$ ОСВ A называем множество функций $\Sigma : N \times \mathbb{Z}^k \rightarrow S$.

Пусть $\Sigma_1 = f$ — начальное состояние ОСВ A . Тогда функционирование однородной структуры со входами определяется в соответствии с (1) рекуррентными соотношениями:

$$\begin{cases} \Sigma_1 = f, \\ \Sigma_{t+1}(\alpha) = \varphi(X_t(\alpha), \Sigma_t(\alpha), \Sigma_t(\alpha + \alpha_1), \dots, \Sigma_t(\alpha + \alpha_p)), \end{cases} \quad (2)$$

где X и Σ — вход и состояние ОСВ.

Система (2) определяет глобальное тактовое функционирование ОСВ:

$$\begin{cases} \Sigma_1 = f, \\ \Sigma_{t+1} = \Phi(X_t, \Sigma_t), \end{cases}$$

где Φ — функция переходов ОСВ.

Как правило, на функционирование ОСВ накладывают ограничения: для некоторого выделенного состояния $s_0 \in S$ локальная функция переходов удовлетворяет условию $\varphi(0, s_0) = s_0$; начальные состояния ОСВ рассматриваются только такие, для которых лишь конечное число ячеек находятся в состояниях, отличных от состояния s_0 (выделенное состояние s_0 есть состояние покоя).

Подъёмная сила — составляющая полной аэродинамической силы, перпендикулярная вектору скорости движения тела в потоке жидкости или газа, возникающая в результате несимметричности обтекания тела потоком.

Полная аэродинамическая сила — это интеграл от давления вокруг контура профиля крыла. Справедлива формула

$$F + P = \oint_{\partial\Omega} p n d\Omega,$$

где F — подъёмная сила, P — тяга, $\partial\Omega$ — граница профиля, p — величина давления, n — нормаль к профилю.

Величина подъёмной силы определяется по формуле:

$$F = \frac{1}{2} c_y \rho v^2 S,$$

где F — подъёмная сила, c_y — коэффициент подъёмной силы, зависящий от угла атаки, ρ — плотность воздуха на высоте полёта (kg/m^3), v — скорость набегающего потока (m/s), S — площадь проекции крыла на горизонтальную плоскость (m^2).

Закон Бернулли утверждает, что

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + p = const,$$

где ρ — плотность, v — скорость потока, h — высота, p — давление, g — ускорение свободного падения.

Рассмотрим процесс образования подъемной силы крыла. Профиль крыла делит поток воздуха на две части, которые объединяются за задней кромкой профиля. Верхняя часть профиля более выпуклая, чем нижняя. Поэтому, частицы воздуха, обтекающие верхнюю и нижнюю поверхности, проделывают различный путь. Над верхней поверхностью молекулы воздуха движутся быстрее и располагаются реже, чем внизу. Возникает разрежение (закон Бернулли гласит, что с увеличением скорости потока уменьшается его давление). Разница давлений между верхней и нижней поверхностями крыла приводит к появлению подъемной силы, толкающей крыло вверх. Величина подъемной силы сильно зависит от угла, под которым набегающий поток “ударяется” в крыло. Угол между набегающим потоком и хордой профиля называется углом атаки. При увеличении угла атаки, точка деления потока воздуха смещается на нижнюю поверхность профиля. Путь частиц по верхней поверхности увеличивается. Из-за этого возрастает разница давлений и увеличивается подъемная сила. Подобный рост подъемной силы возможен, пока угол атаки не достиг критического значения.

Далее сформулируем основные результаты данной работы:

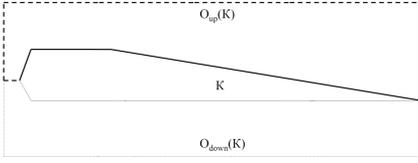
Теорема 1. Пусть задан контур крыла с углом атаки α следующим образом: $\{(l_1^{up}, \alpha_1), \dots, (l_p^{up}, \alpha_p), \dots, (l_1^{down}, \beta_1), \dots, (l_q^{down}, \beta_q)\}$, где $l_i^{up}, i = \overline{1, p}$ — длина i -го отрезка верхнего контура крыла, $\alpha_i, i = \overline{1, p}$ — угол между i -ым отрезком верхнего контура крыла и горизонталью, $l_i^{down}, i = \overline{1, q}$ — длина i -го отрезка нижнего контура крыла, $\beta_i, i = \overline{1, q}$ — угол между i -ым отрезком нижнего контура крыла и горизонталью. Пусть $v_0 = \sqrt{\frac{2mg}{L(A^2 - B^2)}}$, при условии, что $A > B$, где

$$A = \frac{A_1}{A_2}, A_1 = \sum_{i=1}^{p_m} \left(\sum_{j=1}^{i-1} l_j^{up} \cdot \sin \alpha_j + \frac{1}{2} \cdot l_i^{up} \cdot \sin \alpha_i \right) \cdot l_i^{up} +$$

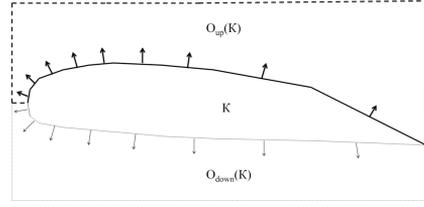
$$+ \sum_{i=p_m+1}^p \left(\sum_{j=1}^{p_m} l_j^{up} \cdot \sin \alpha_j \right) \cdot l_i^{up},$$

$$A_2 = \sum_{i=1}^{p_m} \left(\sum_{j=1}^{i-1} l_j^{up} \cdot \sin \alpha_j + \frac{1}{2} \cdot l_i^{up} \cdot \sin \alpha_i \right) \cdot l_i^{up} \cos \alpha_i +$$

$$+ \sum_{i=p_m+1}^p \left(\sum_{j=1}^{p_m} l_j^{up} \cdot \sin \alpha_j \right) \cdot l_i^{up} \cos \alpha_i,$$



(a) Упрощенный контур крыла



(b) Контур крыла

Рис. 1.

$$B = \frac{B_1}{B_2}, B_1 = \sum_{i=1}^q \left(\sum_{j=1}^{i-1} l_j^{down} \cdot \sin \beta_j + \frac{1}{2} \cdot l_i^{down} \cdot \sin \beta_i \right) \cdot l_i^{down},$$

$$B_2 = \sum_{i=1}^q \left(\sum_{j=1}^{i-1} l_j^{down} \cdot \sin \beta_j + \frac{1}{2} \cdot l_i^{down} \cdot \sin \beta_i \right) \cdot l_i^{down} \cos \beta_i,$$

m — масса крыла, g — ускорение свободного падения, $L = L(\alpha)$ — длина крыла по оси Ox , $p_m = p_m(\alpha)$ — номер определяющего отрезка верхнего контура крыла, а нижний контур крыла определяющего отрезка не имеет. Тогда при $v_x > v_0$ крыло поднимается, иначе — падает.

Рассмотрим упрощенный контур крыла, изображенный на Рис. 1(а). Верхний контур состоит из трех отрезков, нижний — из двух.

Теорема 2. Пусть задан упрощенный контур крыла следующим образом: $\{(l_1^{up}, \alpha_1), (l_2^{up}, \alpha_2), (l_3^{up}, \alpha_3), (l_1^{down}, \beta_1), (l_2^{down}, \beta_2)\}$, для которого выполняется неравенство $l^{up} > l^{down}$, где $l^{up} = l_1^{up} + l_2^{up} + l_3^{up}$, $l^{down} = l_1^{down} + l_2^{down}$. Положим $\tilde{v} = (L + l_2^{down}) \sqrt{\frac{2mg}{L(A^2 - B^2)}}$, где $A = l^{up} + l_2^{up} + l_3^{up}$, $B = l^{down} + l_2^{down}$, m — масса крыла, g — ускорение свободного падения, L — длина крыла по оси Ox . Тогда при $v_x > \tilde{v}$ крыло поднимается, иначе — падает.

3. Моделирование воздушного потока

Приступим к описанию конкретной однородной структуры (\mathbb{Z}^2, W, V) с одним входом, с помощью которой мы будем моделировать движение воздушного потока. На вход автомата W поступает число от 0 до 12, которое вырабатывает автомат-крыло. Подробно этот процесс будет описан ниже. В данном разделе предполагается, что ось Ox направлена слева направо, а ось Oy сверху вниз.

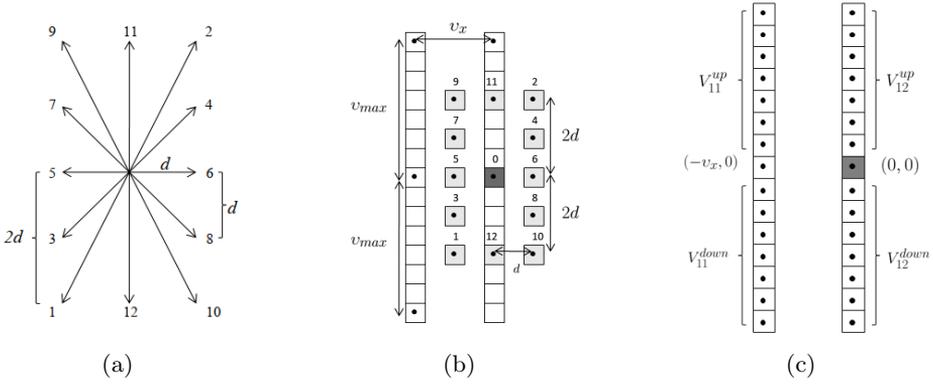


Рис. 2.

Частицы воздуха движутся с постоянной горизонтальной скоростью v_x , однако при обтекании крыла возникает скорость по оси Oy , причем $|v_y| \leq v_{max}$, $v_{max} \in \mathbb{Z}_+$, $v_{max} = w + 1$, где w — целая часть сверху максимальной ширины крыла по оси Oy . Параметр d выбран так, что $d < v_x$ и $2d < v_{max}$.

Введем множество векторов $V_0 = \{v_0 = (0, 0), v_1 = (-d, 2d), v_2 = (d, -2d), v_3 = (-d, d), v_4 = (d, -d), v_5 = (-d, 0), v_6 = (d, 0), v_7 = (-d, -d), v_8 = (d, d), v_9 = (-d, -2d), v_{10} = (d, 2d), v_{11} = (0, -2d), v_{12} = (0, 2d)\}$, изображенных на Рис. 2(a).

Определим шаблона соседства V автомата W^α . Удобно взять шаблон, представленный на Рис. 2(b), состоящий из $p = 4v_{max} + 12$ векторов с целыми координатами. Разделим шаблон соседства V на два пересекающихся шаблона V_0 и V_1 , где $V_1 = V_{11}^{up} \cup V_{12}^{up} \cup V_{11}^{down} \cup V_{12}^{down} \cup \{(-v_x, 0)\}$, $V_{11}^{up} = \{(-v_x, -1), \dots, (-v_x, -v_{max})\}$, $V_{12}^{up} = \{(0, -1), \dots, (0, -v_{max})\}$, $V_{11}^{down} = \{(-v_x, 1), \dots, (-v_x, v_{max})\}$, $V_{12}^{down} = \{(0, 1), \dots, (0, v_{max})\}$. Шаблон V_1 изображен на Рис. 2(c).

Противоположным вектором к (x, y) будет называть вектор $(-x, -y)$. Векторы из V_0 занумерованы так, что противоположными будут векторы v_{2k+1} и v_{2k+2} , $k = \overline{0, 5}$.

Приступим к описанию множества состояний S автомата W^α . Состояние автомата W^α — это тройка $q^\alpha(t) = (q_0^\alpha(t), q_1^\alpha(t), q_2^\alpha(t))$, $q_i^\alpha \in \{0, 1\}$, $i = 0, 1, 2$, где $q_0^\alpha(t)$ показывает активность в момент времени t (отсутствие ($q_0^\alpha = 0$) или наличие ($q_0^\alpha = 1$) в узле α частицы воздуха), $q_1^\alpha(t)$ — индикатор того, что ячейка находится внутри крыла в момент времени t ($q_1^\alpha = 0$ — вне крыла, $q_1^\alpha = 1$ — в крыле), а $q_2^\alpha(t)$ указывает на тип движения в момент времени t (движение горизонтальное с постоянной скоростью v_x ($q_2^\alpha = 0$) или происходит обтекание крыла ($q_2^\alpha = 1$)). Отметим, что не все комбинации q_i^α , $i = 0, 1, 2$ нам подходят, а только $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, т.к. не может быть, что авто-

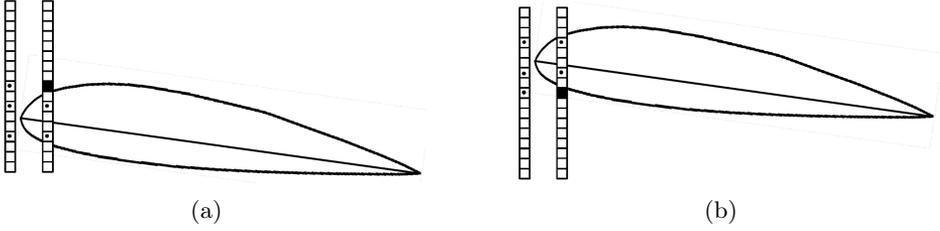


Рис. 3.

мат не активен, но обтекает крыло $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, а также активный автомат не может находиться в крыле $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$. Таким образом, $S = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$, $s_0 = (0, 0, 0)$ — состояние покоя.

Следующий шаг — описание функции переходов для автомата W^α .

Определение местоположения. Пусть на вход в момент времени t поступает число $x(t) = b$, $b \in E_{13}$, которое определяет вектор сдвига крыла v_b . Тогда

$$q_1^\alpha(t+1) = \begin{cases} q_1^\alpha(t), & \text{если } b = 0; \\ q_1^{\alpha+v_{b+1}}(t), & \text{если } b \text{ — нечетное}; \\ q_1^{\alpha+v_{b-1}}(t), & \text{если } b \text{ — четное}. \end{cases}$$

Если $q_1^\alpha(t+1) = 1$, т.е. автомат W^α в следующий момент времени будет находиться в крыле, тогда $q_0^\alpha(t+1) = q_2^\alpha(t+1) = 0$, так как среди возможных состояний существует только одно с $q_1^\alpha(t+1) = 1$.

Определение активности и типа движения. Будем определять $q_0^\alpha(t+1)$ и $q_2^\alpha(t+1)$ при условии, что $q_1^\alpha(t+1) = 0$.

- 1) Существуют векторы $\alpha_i = (0, i)$, $i = \overline{1, j}$, $1 < j < v_{max}$, т.ч. $\alpha_i \in V_{12}^{down}$, указывающие на автоматы, которые находятся в крыле в момент времени t . Векторы из V_{11}^{down} указывают на автоматы, находящиеся вне крыла в момент времени t . Ситуация представлена на Рис. 3(а)
 - а) Среди автоматов, на которые указывают векторы $(-v_x, i) \in V_{11}^{down}$, существует активный. Пусть таким является автомат, на который указывает вектор $(-v_x, k)$, $k \in [1, v_{max}]$. Шаблон соседства V_1 выбран так, что в данном случае существует вектор из V_{12}^{down} с минимальной координатой по оси Oy , т.ч. автомат, на который этот вектор указывает, находится вне крыла в момент времени t . Пусть этот вектор имеет координаты $(0, m)$, где $k < m \leq v_{max}$.
 - Если $k \leq m - k$, т.е. расстояние до верхней границы крыла меньше или равно расстоянию до нижней границы, то автомат W^α в следующий момент времени будет находиться

- в состоянии $q^\alpha(t+1) = (1, 0, 1)$ (в этом случае начинается обтекание по верхней границе).
- Если $k > m - k$, т.е. расстояние до верхней границы крыла больше, чем расстояние до нижней границы. В этом случае автомат W^α в следующий момент времени будет находиться в том состоянии, в котором автомат, на который указывает вектор $(-v_x, 0)$, находился в момент времени t .
- б) Среди автоматов, на которые указывают векторы $(-v_x, i) \in V_{11}^{down}$, не существует активных. В этом случае автомат W^α в следующий момент времени будет находиться в том состоянии, в котором автомат, на который указывает вектор $(-v_x, 0)$, находился в момент времени t .
- 2) Существуют векторы $\alpha_i = (0, -i)$, $i = \overline{1, j}$, $1 < j < v_{max}$, т.ч. $\alpha_i \in V_{12}^{up}$, указывающие на автоматы, которые находятся в крыле в момент времени t . Векторы из V_{11}^{up} указывают на автоматы, находящиеся вне крыла в момент времени t . Ситуация представлена на Рис. 3(б).
- а) Среди автоматов, на которые указывают векторы $(-v_x, -i) \in V_{11}^{up}$, существует активный. Пусть таким является автомат, на который указывает вектор $(-v_x, -k)$, $k \in [1, v_{max})$. Шаблон соседства V_1 выбран так, что в данном случае существует вектор из V_{12}^{up} с максимальной координатой по оси Oy , т.ч. автомат, на который этот вектор указывает, находится вне крыла в момент времени t . Пусть этот вектор имеет координаты $(0, -m)$, где $k < m \leq v_{max}$.
- Если $k < m - k$, т.е. расстояние до нижней границы крыла меньше расстояния до верхней границы, то автомат W^α в следующий момент времени будет находиться в состоянии $q^\alpha(t+1) = (1, 0, 1)$ (в этом случае начинается обтекание по нижней границе).
 - Если $k \geq m - k$, т.е. расстояние до нижней границы крыла больше или равно расстоянию до верхней границы. В этом случае автомат W^α в следующий момент времени будет находиться в том состоянии, в котором автомат, на который указывает вектор $(-v_x, 0)$, находился в момент времени t .
- б) Среди автоматов, на которые указывают векторы $(-v_x, -i) \in V_{11}^{up}$, не существует активных. В этом случае автомат W^α в следующий момент времени будет находиться в том состоянии, в

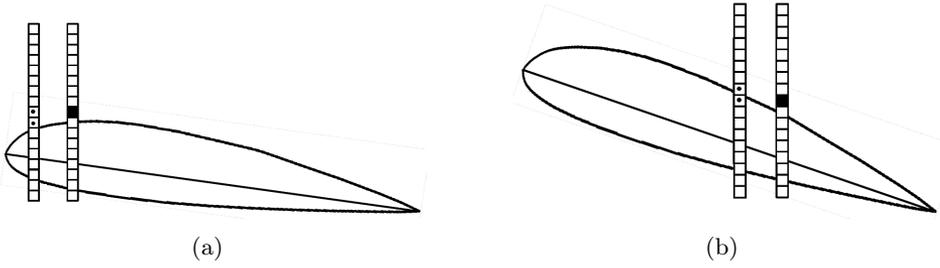


Рис. 4.

котором автомат, на который указывает вектор $(-v_x, 0)$, находился в момент времени t .

3) Автомат, на который указывает вектор $(0, 1) \in V_{11}^{down}$, находится в крыле, а автоматы, на которые указывают векторы $(-v_x, 0)$ и $(-v_x, 1) \in V_{11}^{down}$, находятся вне крыла. Ситуация представлена на Рис. 4(a).

а) Автомат, на который указывает вектор $(-v_x, 1)$ из V_{11}^{down} , не активен в момент времени t , т.е. $q_0(t) = 0$. В этом случае автомат W^α в следующий момент времени будет находиться в том состоянии, в котором автомат, на который указывает вектор $(-v_x, 0)$, находился в момент времени t .

б) Автомат, на который указывает вектор $(-v_x, 1)$ из V_{11}^{down} , активен в момент времени t , т.е. $q_0(t) = 1$. В этом случае автомат W^α в следующий момент времени будет находиться в состоянии $q^\alpha(t+1) = (1, 0, 1)$.

4) Автоматы, на которые указывают векторы $(0, 1) \in V_{12}^{down}$ и $(-v_x, 0)$, находятся в крыле. А автомат, на который указывает вектор $(-v_x, -1) \in V_{11}^{up}$, находится вне крыла. Ситуация представлена на Рис. 4(b).

а) Автомат, на который указывает вектор $(-v_x, -1)$ из V_{11}^{up} , находится в состоянии $(1, 0, 1)$ в момент времени t (т.е. обтекает крыло). В этом случае автомат W^α в следующий момент времени будет находиться в состоянии $q^\alpha(t+1) = (1, 0, 1)$.

б) Автомат, на который указывает вектор $(-v_x, -1)$ из V_{11}^{up} , не обтекает крыло, т.е. $q_2(t) = 0$. В этом случае автомат W в следующий момент времени будет находиться в состоянии $q^\alpha(t+1) = (0, 0, 0)$.

5) Автоматы, на которые указывают векторы $(-v_x, -1) \in V_{11}^{up}$ и $(-v_x, 0)$, находятся вне крыле. А автомат, на который указывает

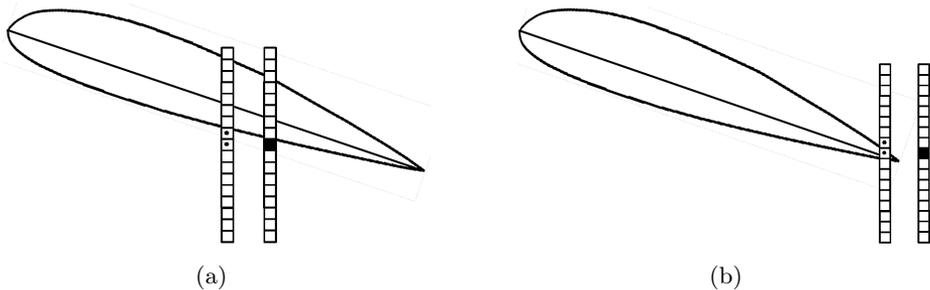


Рис. 5.

вектор $(0, -1) \in V_{12}^{up}$, находится в крыле. Ситуация представлена на Рис. 5(a).

- а) Автомат, на который указывает вектор $(-v_x, -1)$ из V_{11}^{up} , активен в момент времени t . В этом случае автомат W^α в следующий момент времени будет находиться в состоянии $q^\alpha(t+1) = (1, 0, 1)$.
 - б) Автомат, на который указывает вектор $(-v_x, -1)$ из V_{11}^{up} , не активен. В этом случае автомат W^α в следующий момент времени будет находиться в том состоянии, в котором автомат, на который указывает вектор $(-v_x, 0)$, находился в момент времени t .
- 6) Автомат, на который указывает вектор $(-v_x, 0)$, находятся в крыле. А автомат, на который указывает вектор $(-v_x, -1) \in V_{11}^{up}$, находится вне крыла. Ситуация представлена на Рис. 5(b).
- а) Автомат, на который указывает вектор $(-v_x, -1) \in V_{11}^{up}$, находится в состоянии $(1, 0, 1)$ в момент времени t (т.е. обтекает крыло). В этом случае автомат W^α в следующий момент времени будет находиться в состоянии $q^\alpha(t+1) = (1, 0, 0)$ (обтекание закончилось).
 - б) Автомат, на который указывает вектор $(-v_x, -1)$ из V_{11}^{up} , не обтекает крыло. В этом случае автомат W^α в следующий момент времени будет находиться в состоянии $q^\alpha(t+1) = (0, 0, 0)$.
- 7) Автоматы, на которые указывают векторы $(-v_x, -1) \in V_{11}^{up}$, $(-v_x, 0)$, $(0, -1) \in V_{12}^{up}$ и $(0, 1) \in V_{12}^{down}$, находятся вне крыла. При этом вектор $(-v_x, -2) \in V_{11}^{up}$ указывает на автомат, который находится в крыле. Ситуация представлена на Рис. 6(a).
- а) Автомат, на который указывает вектор $(-v_x, -1)$ из V_{11}^{up} , находится в состоянии $(1, 0, 1)$ в момент времени t (т.е. обтекает

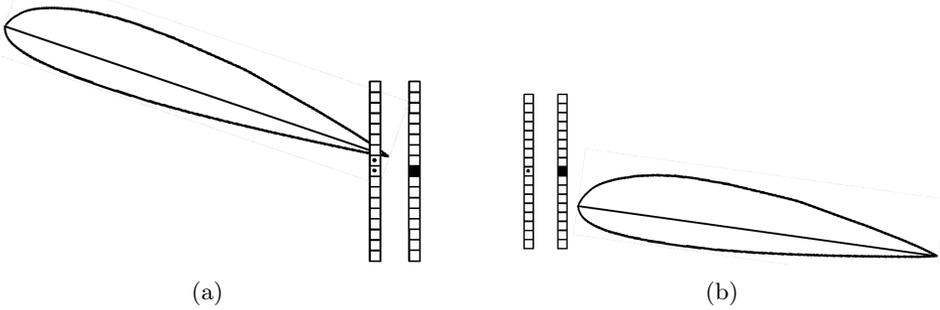


Рис. 6.

крыло). В этом случае автомат W^α в следующий момент времени будет находиться в состоянии $q^\alpha(t+1) = (1, 0, 0)$ (обтекание закончилось).

- б) Автомат, на который указывает вектор $(-v_x, -1)$ из V_{11}^{up} , не обтекает крыло. В этом случае автомат W^α в следующий момент времени будет находиться в том состоянии, в котором автомат, на который указывает вектор $(-v_x, 0)$, находился в момент времени t .
- 8) Случай отличается от рассмотренных выше. Векторы $(0, -1) \in V_{12}^{up}$ и $(0, 1) \in V_{12}^{down}$ указывают на автоматы, находящиеся вне крыла в момент времени t . В частности, все векторы из V_1 могут указывать на автоматы, находящиеся вне крыла в момент времени t . Движение прямолинейное. Автомат W^α в следующий момент времени будет находиться в том состоянии, в котором автомат, на который указывает вектор $(-v_x, 0)$, находился в момент времени t . Ситуация представлена на Рис. 6(b).

Мы разобрали все возможные случаи, тем самым определили функцию переходов. В свою очередь, этот шаг завершает описание однородной структуры с одним входом, моделирующей движение воздушного потока.

4. Автомат-вычислитель, моделирующий крыло

Контур крыла разделен на две части: верхний и нижний. Верхний контур состоит из p отрезков, нижний — из q отрезков, $p, q \in \mathbb{Z}$. Направления нормалей к отрезкам, составляющим контур крыла, выбраны так, как показано на Рис. 1(b). В данном разделе предполагается, что ось Ox направлена слева направо, а ось Oy сверху вниз.

Крыло функционирует как вычислитель, вырабатывающий входы для ОСВ. Расчет производится на основе только тех автоматов, которые

находятся в его окрестности $O(K) = O_{up}(K) \cup O_{down}(K)$. Окрестность $O(K)$ также изображена на Рис. 1(b).

Сконструируем функцию, определяющую поведение автомата с координатами (x, y) . Эту функцию проще всего записать в виде алгоритма с начальными данными: $step = 1$ (первый шаг), сила не действует $F_r = (f_x, f_y) = (0, 0)$. Будем считать, что мы находимся на шаге с номером $step$, $1 < step < T, T \in \mathbb{Z}$ – параметр моделирования.

Шаг 1. Считаем количество активных автоматов, находящихся в $O_{up}(K)$ и $O_{down}(K)$.

Шаг 2. Считаем средние скорости частиц v^{up} и v^{down} , находящихся в $O_{up}(K)$ и $O_{down}(K)$, причем скорость каждой частицы вычисляется по формуле: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где v_x – скорость по оси Ox , v_y – скорость по оси Oy .

Шаг 3. Считаем коэффициенты сил, которые действуют на отрезки верхнего и нижнего контуров крыла по формулам:

$$F_i^{up} = \frac{1}{2} (v^{up})^2 l_i^{up}, i = \overline{1, p}, \quad F_i^{down} = \frac{1}{2} (v^{down})^2 l_i^{down}, i = \overline{1, q},$$

где $l_i^{up}, i = \overline{1, p}$ – длина i -го отрезка верхнего контура, p – число отрезков, составляющих верхний контур крыла, $l_i^{down}, i = \overline{1, q}$ – длина i -го отрезка нижнего контура, q – число отрезков, составляющих нижний контур крыла.

Шаг 4. Определим вектор результирующей силы $F_r^{(step)} = (f_x^{(step)}, f_y^{(step)})$ на текущем шаге с номером $step$, компоненты которого находим по формулам:

$$f_x^{(step)} = \sum_{i=1}^p F_i^{up} \cdot (n^{up})_x^i + \sum_{i=1}^q F_i^{down} \cdot (n^{down})_x^i,$$

$$f_y^{(step)} = \sum_{i=1}^p F_i^{up} \cdot (n^{up})_y^i + \sum_{i=1}^q F_i^{down} \cdot (n^{down})_y^i,$$

где $n^i = \left(\frac{n_x^i}{\sqrt{(n_x^i)^2 + (n_y^i)^2}}, \frac{n_y^i}{\sqrt{(n_x^i)^2 + (n_y^i)^2}} \right)$ – единичная нормаль к отрезку контура крыла с номером i .

Шаг 5. Если $step \neq T$, то переходим к *Шагу 1*. Коэффициент $step$ увеличиваем на 1. Крыло выдает число $w = 0$. Если $step = T$, то находим усредненный вектор результирующей силы $F_r = (f_x, f_y)$, компоненты которого вычисляются по следующим формулам:

$$f_x = \frac{1}{step} \sum_{j=1}^{step} f_x^{(j)}, \quad f_y = \frac{1}{step} \sum_{j=1}^{step} f_y^{(j)}.$$

Шаг 6. Учитываем силу тяжести, направленную по оси Oy , и силу тяги, направленную по оси Ox , следующим образом: $f_x^- = c_1, f_y^+ = c_2$, где c_1, c_2 — заданные константы моделирования.

Шаг 7. Крыло выдает число $w \in E_{13}$, определяемое по вектору $F_r = (f_x, f_y)$ следующим образом:

$$w = \begin{cases} 1, & \text{если } f_x < 0, f_y > 0, \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \left| \frac{f_y}{f_x} \right| \leq \sqrt{3}; \\ 2, & \text{если } f_x > 0, f_y < 0, \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \left| \frac{f_y}{f_x} \right| \leq \sqrt{3}; \\ 3, & \text{если } f_x < 0, f_y > 0, 0 < \left| \frac{f_y}{f_x} \right| < \frac{\sqrt{3}}{3}; \\ 4, & \text{если } f_x > 0, f_y < 0, 0 < \left| \frac{f_y}{f_x} \right| < \frac{\sqrt{3}}{3}; \\ 5, & \text{если } f_x < 0, f_y = 0; \\ 6, & \text{если } f_x > 0, f_y = 0; \\ 7, & \text{если } f_x < 0, f_y < 0, 0 < \frac{f_y}{f_x} < \frac{\sqrt{3}}{3}; \\ 8, & \text{если } f_x > 0, f_y > 0, 0 < \frac{f_y}{f_x} < \frac{\sqrt{3}}{3}; \\ 9, & \text{если } f_x < 0, f_y < 0, \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{f_y}{f_x} \leq \sqrt{3}; \\ 10, & \text{если } f_x > 0, f_y > 0, \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{f_y}{f_x} \leq \sqrt{3}; \\ 11, & \text{если } f_y < 0, \left| \frac{f_y}{f_x} \right| > \sqrt{3}; \\ 12, & \text{если } f_y > 0, \left| \frac{f_y}{f_x} \right| > \sqrt{3}. \end{cases}$$

Шаг 8. Устанавливаем $step = 1$. Переходим к Шагу 1.

5. Вспомогательное вычисление

Для доказательства основных утверждений нам нужно знать количество частиц, движущихся с определенной скоростью. Через k_i обозначим число частиц, скорость которых равна $v_i = \frac{v_x}{\cos \alpha_i}$, где v_x — скорость частиц по оси Ox , α_i — угол между i -ым отрезком контура крыла и горизонталью. На Рис. 7 изображен фрагмент профиля крыла, для которого и произведем вычисления.

Поскольку поток набегает на крыло слева направо, при вычислении k_i нам понадобится интенсивность появления частиц в точке на левой границе, обозначим её через λ . Пусть t_i — время прохождения расстояния $l_i \cos \alpha_i$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник T_1 , гипотенуза которого равна l_1 — длина первого отрезка контура крыла, а катеты — $l_1 \cos \alpha_1$ и $l_1 \sin \alpha_1$ соответственно. Ясно, что k_1 равно произведению интенсивности на площадь треугольника, деленную на скорость по оси Ox , т.е.

$$\frac{\lambda \cdot \frac{1}{2} l_1 \sin \alpha_1 \cdot l_1 \cos \alpha_1}{v_x},$$

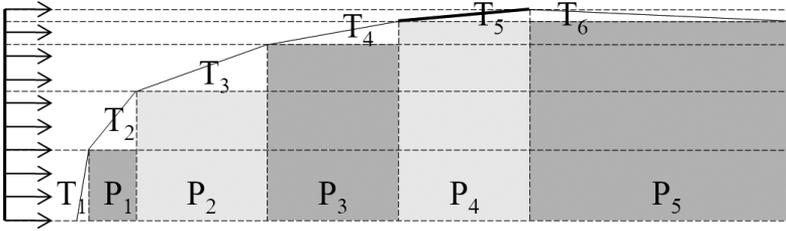


Рис. 7. Фрагмент профиля крыла.

что в общем виде можно записать так: $k_1 = \lambda \cdot \widehat{h}_1 \cdot t_1$, где $\widehat{h}_1 = \frac{1}{2}l_1 \sin \alpha_1$ — “высота”, находясь на которой частицы будут двигаться со скоростью v_1 , $t_1 = \frac{l_1 \cos \alpha_1}{v_x}$ — время прохождения расстояния $l_1 \cos \alpha_1$.

Далее рассмотрим трапецию, состоящую из прямоугольника P_1 со сторонами $l_2 \cos \alpha_2$ и $l_1 \sin \alpha_1$ и прямоугольного треугольника T_2 , гипотенуза которого равна l_2 , а катеты — $l_2 \cos \alpha_2$ и $l_2 \sin \alpha_2$ соответственно. Ясно, что k_2 равно произведению интенсивности на площадь трапеции, деленную на скорость по оси Ox , т.е.

$$\frac{\lambda \cdot \frac{1}{2}(2l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2) \cdot l_2 \cos \alpha_2}{v_x},$$

что в общем виде можно записать так: $k_2 = \lambda \cdot \widehat{h}_2 \cdot t_2$, где $\widehat{h}_2 = l_1 \sin \alpha_1 + \frac{1}{2}l_2 \sin \alpha_2$ — “высота”, $t_2 = \frac{l_2 \cos \alpha_2}{v_x}$ — время.

Аналогично определяются k_3 , k_4 и k_5 . Для количества частиц, движущихся со скоростью v_5 , формула примет следующий вид: $k_5 = \lambda \cdot \widehat{h}_5 \cdot t_5$, где $\widehat{h}_5 = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 + l_3 \sin \alpha_3 + l_4 \sin \alpha_4 + \frac{1}{2}l_5 \sin \alpha_5$ — “высота”, $t_5 = \frac{l_5 \cos \alpha_5}{v_x}$ — время.

Заметим, что количество частиц k_6 будет определяться высотой $l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 + l_3 \sin \alpha_3 + l_4 \sin \alpha_4 + l_5 \sin \alpha_5$, поскольку обтекание крыла продолжат только те частицы, которые уже его начали, новых частиц не появится. Поэтому $\widehat{h}_6 = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 + l_3 \sin \alpha_3 + l_4 \sin \alpha_4 + l_5 \sin \alpha_5$. Исходя из этих соображений, $\widehat{h}_6 = \widehat{h}_i$, $i = \overline{7, p}$, где p — количество отрезков, составляющих контур крыла, для которого производится вычисление. Таким образом, k_i , $i = \overline{6, p}$ будут отличаться только временем прохождения пути $l_i \cos \alpha_i$. Учитывая эту особенность, в данном случае отрезок контура крыла с номером $i = 5$ будем называть *определяющим отрезком*.

6. Доказательство основных утверждений

Доказательство Теоремы 1. Для того чтобы крыло поднималось, необходимо выполнение неравенства $f_y - f_g > 0$, где f_y — компонента вектора результирующей силы $F_r = (f_x, f_y)$ по оси Oy , а f_g — сила тяжести.

$$\begin{aligned}
 f_y &= \sum_{i=1}^p F_i^{up} \cdot (n^{up})_y^i + \sum_{i=1}^q F_i^{down} \cdot (n^{down})_y^i = \\
 &= \frac{(v^{up})^2}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^p l_i^{up} \cdot (n^{up})_y^i}_{\text{длина крыла по } Ox} + \frac{(v^{down})^2}{2} \cdot (-1) \underbrace{\left(- \left(\sum_{i=1}^q l_i^{down} \cdot (n^{down})_y^i \right) \right)}_{\text{длина крыла по } Ox} = \\
 &= \frac{(v^{up})^2}{2} \cdot L + \frac{(v^{down})^2}{2} \cdot (-L) = \frac{L}{2} \cdot [(v^{up})^2 - (v^{down})^2],
 \end{aligned}$$

где L — длина крыла по оси Ox .

Таким образом, мы хотим показать, что

$$[(v^{up})^2 - (v^{down})^2] > \frac{2}{L} \cdot f_g \quad (3)$$

Через k_i^{up} обозначим количество частиц в $O_{up}(K)$, движущихся со скоростью $v_i^{up} = \frac{v_x}{\cos \alpha_i}$, где α_i — угол между i -ым отрезком верхнего контура крыла и горизонталью. Аналогично определим k_i^{down} как количество частиц в $O_{down}(K)$, движущихся со скоростью $v_i^{down} = \frac{v_x}{\cos \beta_i}$, где β_i — угол между i -ым отрезком нижнего контура крыла и горизонталью.

Тогда

$$(v^{up})^2 - (v^{down})^2 = \left(\frac{\sum_i k_i^{up} \cdot v_i^{up}}{\sum_i k_i^{up}} \right)^2 - \left(\frac{\sum_i k_i^{down} \cdot v_i^{down}}{\sum_i k_i^{down}} \right)^2$$

Соответственно неравенство (3), которое мы хотим доказать, примет вид:

$$\left(\frac{\sum_i k_i^{up} \cdot v_i^{up}}{\sum_i k_i^{up}} \right)^2 - \left(\frac{\sum_i k_i^{down} \cdot v_i^{down}}{\sum_i k_i^{down}} \right)^2 > \frac{2}{L} \cdot f_g \quad (4)$$

Обозначим через λ — интенсивность появления частиц в точке на левой границе, t_i^{up} — время прохождения расстояния $l_i^{up} \cos \alpha_i$. Аналогичным образом определим t_i^{down} .

Применяя результат вспомогательного вычисления, найдем

$$\widehat{h}_i^{up} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{i-1} l_j^{up} \cdot \sin \alpha_j + \frac{1}{2} \cdot l_i^{up} \cdot \sin \alpha_i, & \text{если } i = \overline{1, p_m}; \\ \sum_{j=1}^{p_m} l_j^{up} \cdot \sin \alpha_j, & \text{если } i = \overline{p_m + 1, p}. \end{cases}$$

А так как нижний контур крыла не имеет определяющего отрезка, то

$$\widehat{h}_i^{down} = \sum_{j=1}^{i-1} l_j^{down} \cdot \sin \beta_j + \frac{1}{2} \cdot l_i^{down} \cdot \sin \beta_i, \quad \text{если } i = \overline{1, q}$$

С учетом введенных обозначений справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_i k_i^{up} \cdot v_i^{up}}{\sum_i k_i^{up}} &= \left[k_i^{up} = \lambda \widehat{h}_i^{up} t_i^{up}; t_i^{up} = \frac{l_i^{up} \cos \alpha_i}{v_x}; v_i^{up} = \frac{v_x}{\cos \alpha_i} \right] = \\ &= v_x \left(\frac{\sum_i \widehat{h}_i^{up} \cdot l_i^{up}}{\sum_i \widehat{h}_i^{up} \cdot l_i^{up} \cdot \cos \alpha_i} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\sum_i k_i^{down} \cdot v_i^{down}}{\sum_i k_i^{down}} = v_x \left(\frac{\sum_i \widehat{h}_i^{down} \cdot l_i^{down}}{\sum_i \widehat{h}_i^{down} \cdot l_i^{down} \cdot \cos \beta_i} \right)$$

Неравенство (4) можно переписать следующим образом:

$$\left(\frac{\sum_i \widehat{h}_i^{up} \cdot l_i^{up}}{\sum_i \widehat{h}_i^{up} \cdot l_i^{up} \cdot \cos \alpha_i} \right)^2 - \left(\frac{\sum_i \widehat{h}_i^{down} \cdot l_i^{down}}{\sum_i \widehat{h}_i^{down} \cdot l_i^{down} \cdot \cos \beta_i} \right)^2 > \frac{2}{L} \cdot \frac{f_g}{(v_x)^2} \quad (5)$$

Заметим, что в левой части неравенства (5) стоит выражение $A^2 - B^2$, а по условию $A > B$, поэтому неравенство справедливо при $v_x > v_0$. Это означает, что $f_y - f_g > 0$ при выполнении данного условия, т.е. крыло поднимается, в противном случае – крыло падает.

Теорема 1 доказана.

Теорема 1 гласит, что если контур крыла удовлетворяет условию $A > B$, то мы можем явно посчитать необходимую скорость для поднятия крыла. Однако по условию $A > B$ нельзя представить контур, который ему удовлетворяет.

Доказательство Теоремы 2. В данном случае $\widehat{h}_i^{up}, i = \overline{1, 3}$ и $\widehat{h}_i^{down}, i = 1, 2$ определяются следующим образом:

$$\widehat{h}_i^{up} = \begin{cases} \frac{1}{2} h_1^{up} = \frac{1}{2} l_1^{up} \sin \alpha_1, & \text{если } i = 1; \\ h_1^{up} = l_1^{up} \sin \alpha_1, & \text{если } i = 2, 3. \end{cases}$$

$$\widehat{h_i^{down}} = \begin{cases} \frac{1}{2}h_1^{down} = \frac{1}{2}l_1^{down} \sin \beta_1, & \text{если } i = 1; \\ h_1^{down} = l_1^{down} \sin \beta_1, & \text{если } i = 2. \end{cases}$$

Мы хотим показать, что

$$\left(\frac{\sum_i \widehat{h_i^{up}} \cdot l_i^{up}}{\sum_i \widehat{h_i^{up}} \cdot l_i^{up} \cdot \cos \alpha_i} \right)^2 - \left(\frac{\sum_i \widehat{h_i^{down}} \cdot l_i^{down}}{\sum_i \widehat{h_i^{down}} \cdot l_i^{down} \cdot \cos \beta_i} \right)^2 > \frac{2}{L} \cdot \frac{f_g}{(v_x)^2}, \quad (6)$$

начиная с некоторого $v_x > \tilde{v}$.

Распишем числитель выражения, стоящего в первой скобке (6):

$$\begin{aligned} \sum_i \widehat{h_i^{up}} \cdot l_i^{up} &= \left(\frac{1}{2}l_1^{up} \sin \alpha_1 \right) \cdot l_1^{up} + (l_1^{up} \sin \alpha_1) \cdot (l_2^{up} + l_3^{up}) = \\ &= \frac{1}{2}l_1^{up} \sin \alpha_1 \cdot (l_1^{up} + 2l_2^{up} + 2l_3^{up}) \end{aligned}$$

Затем преобразуем знаменатель выражения, стоящего в первой скобке (6):

$$\sum_i \widehat{h_i^{up}} \cdot l_i^{up} \cdot \cos \alpha_i = \frac{1}{2}l_1^{up} \cdot \sin \alpha_1 \cdot (l_1^{up} \cdot \cos \alpha_1 + 2l_2^{up} + 2l_3^{up} \cdot \cos \alpha_3) \quad (7)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} l_1^{up} \cdot \cos \alpha_1 &= l_1^{down} \cdot \cos \beta_1 = L - l_2^{down}, \\ l_3^{up} \cdot \cos \alpha_3 &= l_2^{down} - l_2^{up}. \end{aligned}$$

Выражение (7) примет вид:

$$\begin{aligned} \sum_i \widehat{h_i^{up}} \cdot l_i^{up} \cdot \cos \alpha_i &= \frac{1}{2}l_1^{up} \cdot \sin \alpha_1 \cdot \left((L - l_2^{down}) + 2l_2^{up} + 2(l_2^{down} - l_2^{up}) \right) = \\ &= \frac{1}{2}l_1^{up} \cdot \sin \alpha_1 \cdot (L + l_2^{down}) \end{aligned}$$

Таким образом, видим, что

$$\left(\frac{\sum_i \widehat{h_i^{up}} \cdot l_i^{up}}{\sum_i \widehat{h_i^{up}} \cdot l_i^{up} \cdot \cos \alpha_i} \right)^2 = \left(\frac{l_1^{up} + 2l_2^{up} + 2l_3^{up}}{L + l_2^{down}} \right)^2$$

Теперь преобразуем выражение, стоящее во второй скобке (6). Его числитель равен

$$\begin{aligned} \sum_i \widehat{h_i^{down}} \cdot l_i^{down} &= \left(\frac{1}{2}l_1^{down} \sin \beta_1 \right) \cdot l_1^{down} + (l_1^{down} \sin \beta_1) \cdot l_2^{down} = \\ &= \frac{1}{2}l_1^{down} \sin \beta_1 \cdot (l_1^{down} + 2l_2^{down}) \end{aligned}$$

а знаменатель —

$$\sum_i \widehat{h_i^{down}} \cdot l_i^{down} \cdot \cos \beta_i = \frac{1}{2} l_1^{down} \cdot \sin \beta_1 \cdot (l_1^{down} \cdot \cos \beta_1 + 2l_2^{down}) \quad (8)$$

Заметим, что $l_1^{down} \cdot \cos \beta_1 = L - l_2^{down}$. Тогда (8) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \sum_i \widehat{h_i^{down}} \cdot l_i^{down} \cdot \cos \beta_i &= \frac{1}{2} l_1^{down} \cdot \sin \beta_1 \cdot ((L - l_2^{down}) + 2l_2^{down}) = \\ &= \frac{1}{2} l_1^{down} \cdot \sin \beta_1 \cdot (L + l_2^{down}) \end{aligned}$$

Итого,

$$\left(\frac{\sum_i \widehat{h_i^{down}} \cdot l_i^{down}}{\sum_i \widehat{h_i^{down}} \cdot l_i^{down} \cdot \cos \beta_i} \right)^2 = \left(\frac{l_1^{down} + 2l_2^{down}}{L + l_2^{down}} \right)^2$$

Таким образом, неравенство (6), которое мы хотим доказать, свелось к:

$$\left(\frac{l_1^{up} + 2l_2^{up} + 2l_3^{up}}{L + l_2^{down}} \right)^2 - \left(\frac{l_1^{down} + 2l_2^{down}}{L + l_2^{down}} \right)^2 > \frac{2}{L} \cdot \frac{f_g}{(v_x)^2}, \quad (9)$$

начиная с некоторого $v_x > \tilde{v}$.

Обозначим левую часть неравенства (9) через r . Покажем, что $r > 0$, а затем найдем v_x , при которой неравенство (9) имеет место.

$$r = \frac{(l_1^{up} + l_2^{up} + l_3^{up})^2 - (l_1^{down} + l_2^{down})^2}{(L + l_2^{down})^2}$$

Поскольку $(L + l_2^{down})^2 > 0$, нужно проверить, что $(l_1^{up} + l_2^{up} + l_3^{up})^2 - (l_1^{down} + l_2^{down})^2 > 0$, т.е.

$$((l_1^{up} - l_1^{down}) + (l_2^{up} + l_3^{up} - l_2^{down})) \cdot \underbrace{(l_1^{up} + l_2^{up} + l_3^{up} + l_1^{down} + l_2^{down})}_{> 0} > 0$$

$$((l_1^{up} - l_1^{down}) + (l_2^{up} + l_3^{up} - l_2^{down})) > 0 \quad (10)$$

Учитывая особенности формы крыла, знак разности $l^{up} - l^{down}$ совпадает со знаком $l_2^{up} + l_3^{up} - l_2^{down}$, поэтому неравенство (10) будет выполнено, так как $l^{up} > l^{down}$. Окончательно получаем, что неравенство (9) имеет место при $v_x > \tilde{v} = \sqrt{\frac{2mg}{Lr}}$, $r = \frac{A^2 - B^2}{(L + l_2^{down})^2}$.

Теорема 2 доказана.

7. Совпадение результатов компьютерного моделирования и теоретического расчёта

Чтобы соотнести результат теоретического расчёта с тем, что получается при моделировании, нужно установить соответствие единиц измерения. Теоретический расчёт проводится в следующих единицах измерения: см (сантиметр) — единицы измерения длины, с (секунда) — единица измерения времени, kg (килограмм) — единица измерения массы. При моделировании использованы \widehat{cm} , \widehat{c} , \widehat{kg} — единицы измерения длины, времени, массы соответственно.

Положим, что $\frac{kg}{kg} = 40$ или $\widehat{kg} = 0,025 kg$. Ширина экрана, на котором происходит моделирование, равна $1200 \widehat{cm}$, что соответствует 30 см. Таким образом, $\widehat{cm} = 0,025 cm$. Движение частиц происходит в моменты времени $t = 1, 2, \dots$. Если замерить время между этими моментами, то получим 0,012 с. Тогда $\widehat{c} = 0,012 c$. Сила тяжести при моделировании измеряется в $\left[\frac{\widehat{cm} \cdot \widehat{kg}}{(\widehat{c})^2} \right]$. Переведём ее в единицы измерения теоретического расчёта.

$$\left[\frac{\widehat{cm} \cdot \widehat{kg}}{(\widehat{c})^2} \right] = \left[\frac{0,025 cm \cdot 0,025 kg}{(0,012 c)^2} \right] \approx 4,34 \left[\frac{cm \cdot kg}{c^2} \right]$$

В итоге мы выяснили, что моделированию движения с силой тяжести, равной $1 \left[\frac{\widehat{cm} \cdot \widehat{kg}}{(\widehat{c})^2} \right]$, соответствует теоретический расчёт с $f_g = 4,34 \left[\frac{cm \cdot kg}{c^2} \right]$.

Возьмем один из контуров крыльев того же вида, что представлено на Рис. 1(b), для которого производится моделирование. Для него выполнены все условия Теоремы 1, поэтому скорости, при которых крыло поднимается, считаются по доказанной в теореме формуле. Данные, представленные в таблице 1, показывают совпадение результатов, поскольку v_x при моделировании принимает только целые значения.

Моделирование	Теоретический расчёт
$\widehat{f}_g = 1 \left[\frac{\widehat{cm} \cdot \widehat{kg}}{(\widehat{c})^2} \right]$ $v_x \geq 2 \left[\frac{\widehat{cm}}{\widehat{c}} \right]$	$f_g = 4,34 \left[\frac{cm \cdot kg}{c^2} \right]$ $v > 4,05 \left[\frac{cm}{c} \right] = 4,05 \cdot 40 \cdot 0,012 \left[\frac{\widehat{cm}}{\widehat{c}} \right] = 1,94 \left[\frac{\widehat{cm}}{\widehat{c}} \right]$
$\widehat{f}_g = 2 \left[\frac{\widehat{cm} \cdot \widehat{kg}}{(\widehat{c})^2} \right]$ $v_x \geq 3 \left[\frac{\widehat{cm}}{\widehat{c}} \right]$	$f_g = 8,68 \left[\frac{cm \cdot kg}{c^2} \right]$ $v > 5,73 \left[\frac{cm}{c} \right] = 2,75 \left[\frac{\widehat{cm}}{\widehat{c}} \right]$
$\widehat{f}_g = 3 \left[\frac{\widehat{cm} \cdot \widehat{kg}}{(\widehat{c})^2} \right]$ $v_x \geq 4 \left[\frac{\widehat{cm}}{\widehat{c}} \right]$	$f_g = 13,02 \left[\frac{cm \cdot kg}{c^2} \right]$ $v > 7,02 \left[\frac{cm}{c} \right] = 3,37 \left[\frac{\widehat{cm}}{\widehat{c}} \right]$

Таблица 1.

8. Численное вычисление скоростей при увеличении угла атаки

В этом разделе посмотрим на поведение скорости v_0 при незначительном увеличении угла атаки α . На конкретном примере проверим гипотезу, что $v_0(\alpha)$ является убывающей функцией от α .

Рассмотрим контур крыла, изображенный на Рис. 1(b), угол атаки которого равен α . Считаем, что выполнены все условия Теоремы 1, p_m , $1 \leq p_m \leq p$ — номер определяющего отрезка, где p — число отрезков, составляющих верхний контур крыла. Поэтому можем использовать доказанную в теореме формулу для вычисления скорости, достаточной для того, чтобы крыло поднималось.

Рассмотрим v_0 как функцию аргумента α . Будем придавать α приращение $\Delta\alpha$ так, чтобы отрезок с номером p_m оставался определяющим, и считать $v_0(\alpha + \Delta\alpha)$.

Возьмем контур крыла, для которого производится моделирование, при этом $\cos\alpha \approx 0,99792$, $p_m = 5$, $p = 9$, $q = 8$. В данном случае, чтобы отрезок с номер $p_m = 5$ оставался определяющим, нужно брать $\Delta\alpha \in (0, \frac{\pi}{40}]$. В таблице 2 представлено численное вычисление скоростей при увеличении угла атаки в единицах измерения теоретического расчёта.

Сила тяжести	Приращение угла атаки $\Delta\alpha$							
	0	$\frac{\pi}{100}$	$\frac{\pi}{90}$	$\frac{\pi}{80}$	$\frac{\pi}{70}$	$\frac{\pi}{60}$	$\frac{\pi}{50}$	$\frac{\pi}{40}$
$f_g = 4,34$	4,05	3,57	3,53	3,48	3,42	3,35	3,26	3,13
$f_g = 8,68$	5,73	5,05	4,99	4,92	4,84	4,74	4,61	4,43
$f_g = 13,02$	7,02	6,19	6,12	6,03	5,93	5,80	5,64	5,43

Таблица 2.

В таблице 3 представлено численное вычисление скоростей при увеличении угла атаки в единицах измерения, используемых при моделировании.

Сила тяжести	Приращение угла атаки $\Delta\alpha$							
	0	$\frac{\pi}{100}$	$\frac{\pi}{90}$	$\frac{\pi}{80}$	$\frac{\pi}{70}$	$\frac{\pi}{60}$	$\frac{\pi}{50}$	$\frac{\pi}{40}$
$f_g = 1$	1,94	1,71	1,69	1,67	1,64	1,61	1,56	1,50
$f_g = 2$	2,75	2,42	2,4	2,36	2,32	2,27	2,21	2,13
$f_g = 3$	3,37	2,97	2,94	2,89	2,85	2,78	2,71	2,61

Таблица 3.

Таким образом, на примере показано, что $v_0(\alpha)$ является убывающей функцией при малом увеличении значения аргумента на $\Delta\alpha \in (0, \frac{\pi}{40}]$.

Список литературы

- [1] Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С, Болотов А.А., *Основы теории однородных структур.*, «Наука», Москва, 1990, 296 с.
- [2] Бандман О.Л., “Клеточно-автоматные модели пространственной динамики”, *Системная информатика*, 2006, № 10, 59–111
- [3] Frish U., Crutchfield J.P., Hasslacher B., Lallemand P. Rivet L.-P., “Lattice Gas hydrodynamics in two and three dimensions”, *Complex Systems*, **1** (1987), 649–707
- [4] Rothman В.Н., Zaleski S., *Lattice-Gas Cellular Automata. Simple Models of Complex Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, London, 1997.
- [5] Hardy J., Pomeau Y., de Pazzis O., “Time evolution of a two-dimensional model system”, *Journal of Math. Physics*, **14** (1973), 1746–1759.
- [6] Frish U., Hasslacher B., Pomeau Y., “Lattice-gas Automata for Navier-Stokes equation”, *Physical Review Letter*, **56** (1986), 1505–1508.
- [7] Кравец А.С., *Характеристики авиационных профилей*, «Оборонгиз», Москва, 1939, 332 с.
- [8] Печенюк А.В., “Численное моделирование обтекания крыла конечного размаха с аэродинамическим профилем НАСА-2406 потоком несжимаемой жидкости при малых числах Маха”, *ООО «Digital Marine Technology»*
- [9] Бобарика И. О., Гусев И.Н., “Повышение адекватности численного моделирования аэродинамики элементов летательных аппаратов потоком несжимаемой жидкости при малых числах Маха”, *Вестник ИрГТУ*, 2014

Modeling wing aerodynamics with cellular automata Gordeeva A.S.

The paper explores the problem of modeling the motion of a wing in an air flow. For this purpose, we use cellular automata modeling the movement of the air and cellular automaton modeling the wing. The wing has some asymmetrical shape. Cellular automata represent linear motion of particles, but they bypass the wing upon collision with it; moreover, the velocity of

particles moving along the longer side of the wing is greater than the velocity of particles on the other side. This leads to appearance of a lifting force. The automaton modelling the wing sees cellular automata from some neighbourhood and calculates the velocity of particles. Based on this, the lift vector is calculated. As a result, the wing changes its coordinates.

An explicit formula for calculating velocities in the general case, enough for the wing to lift, was found. A proof of the statement for the simplified wing profile was also presented. An example showing that the velocity calculated by the explicit formula decreases with a small increase in the angle of attack was given.

Keywords: automaton modelling of wing aerodynamics, homogeneous structures with inputs, cellular automaton, lifting force.

References

- [1] Kudryavtsev V. B., Podkolzin A. S., Bolotov A. A., *Fundamentals of the Theory of Homogeneous Structures*, «Nauka», Moscow, 1990 (in Russian), 296 c.
- [2] Bandman O. L., “Cellular automata models of spatial dynamics”, *System Informatics*, 2006, № 10, 59–111 (in Russian)
- [3] Frish U., Crutchfield J.P., Hasslacher B., Lallemand P. Rivet L.-P., “Lattice Gas hydrodynamics in two and three dimensions”, *Complex Systems*, **1** (1987), 649–707
- [4] Rothman B.H., Zaleski S., *Lattice-Gas Cellular Automata. Simple Models of Complex Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, London, 1997.
- [5] Hardy J., Pomeau Y., de Pazzis O., “Time evolution of a two-dimensional model system”, *Journal of Math. Physics*, **14** (1973), 1746–1759.
- [6] Frish U., Hasslacher B., Pomeau Y., “Lattice-gas Automata for Navier-Stokes equation”, *Physical Review Letter*, **56** (1986), 1505–1508.
- [7] Kravets A.S., *Aviation profiles characteristics*, Oborongiz, Moscow, 1939 (in Russian), 332 c.
- [8] Pechenyuk A.V., “Numerical simulation of the flow around a finite-span wing with an aerodynamic profile of NACA-2406 by an incompressible fluid flow at low Mach numbers”, *OOO «Digital Marine Technology»* (in Russian)

- [9] Bobarika I. O., Gusev I. N., “Improving the adequacy of numerical modeling of the aerodynamics of aircraft elements by an incompressible fluid flow at low Mach numbers.”, *Bulletin of IrST*, 2014 (in Russian)