

Московский Государственный Университет  
имени М.В. Ломоносова  
Российская Академия Наук  
Международная Академия Технологических Наук  
Российская Академия Естественных Наук

# **Интеллектуальные Системы.**

## **Теория и приложения**

**ТОМ 26 ВЫПУСК 3 \* 2022**

**МОСКВА**

**Главный редактор:** д.ф.-м.н., профессор Э.Э. Гасанов

**Редакционная коллегия:**

д.ф.-м.н., проф. А. Е. Андреев	(зам. главного редактора)
к.ф.-м.н., с.н.с. А.В. Галащенко	(зам. главного редактора)
к.ф.-м.н., доц. А. С. Строгалов	(зам. главного редактора)
к.ф.-м.н., м.н.с. В. В. Осокин	(ответственный секретарь)

д.ф.-м.н, проф. В.В.Александров, д.ф.-м.н, проф. С.В.Алешин, д.ф.-м.н, проф. Д.Н.Бабин, проф. К.Вашик, проф. Я.Деметрович, академик РАН, д.ф.-м.н, проф. Ю.Л.Ершов, проф. Г.Килибарда, д.ф.-м.н, проф. В.Н.Козлов, д.ф.-м.н, проф. А.В.Михалев, к.ф.-м.н, в.н.с. В.А.Носов, д.ф.-м.н, проф. А.С.Подколзин, д.ф.-м.н, проф. Ю.П.Пытьев, д.т.н, проф. А.П.Рыжов, академик РАН, д.т.н, проф. А.С.Сигов, проф. Б.Тальхайм, проф. Ш.Ушчумлич, д.ф.-м.н, доц. А.А.Часовских, д.ф.-м.н, проф. А.В.Чечкин, к.ф.-м.н. Р.Шчепанович.

**Секретарь редакции:** И. О. Бергер, Е. В. Кузнецова

В журнале «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» публикуются научные достижения в области теории и приложений интеллектуальных систем, новых информационных технологий и компьютерных наук.

Издание журнала осуществляется под эгидой МГУ имени М. В. Ломоносова, Научного Совета по комплексной проблеме «Кибернетика» РАН, Отделения «Математическое моделирование технологических процессов» МАТН, Секции «Информатики и кибернетики» РАЕН.

Учредитель журнала: ООО «Интеллектуальные системы».

Журнал входит в список изданий, включенных ВАК РФ в реестр публикаций материалов по кандидатским и докторским диссертациям по математике и механике.

Спонсором издания является:

**ООО «Два Облака»**

Разработка корпоративных информационных систем  
<http://www.dvaoblaka.ru>

Индекс подписки на журнал: 64559 в каталоге НТИ «Роспечать».

Адрес редакции: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, д. 1, механико-математический факультет, комн. 12-01.

Адрес издателя: 115230, Россия, Москва, Хлебозаводский проезд, д. 7, стр. 9, офис 9. Тел. +7 (495) 939-46-37, e-mail: [mail@intsysjournal.org](mailto:mail@intsysjournal.org)

\*) Прежнее название журнала: «Интеллектуальные системы».

© ООО «Интеллектуальные системы», 2022.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### **Часть 1. Общие проблемы теории интеллектуальных систем**

*Козлов В.Н.* Об определении понятия визуального образа ..... 5

### **Часть 2. Специальные вопросы теории интеллектуальных систем**

*Гордеева А.С.* Моделирование аэродинамики крыла клеточными автоматами  
23

*Ханкин А.В.* О сокращении нелинейной глубины многомерных сверточных  
нейронных схем ..... 47

*Цзян Л., Цуй Ч., Ван Ц.* Остаточная сеть с рекуррентными структурами .64

### **Часть 3. Математические модели**

*Алешин С.В.* О континуальных структурах классов конечных автоматов . 75

*Быстрыгова А.В.* Запросы на сравнение в задаче точной расшифровки за-  
мкнутых классов Поста ..... 88

*Ефимов А.А.* Оценки энергопотребления для класса объемных схем с близ-  
кими выходами ..... 109

*Медведев А.А.* Поиск семейства простых циклов в орграфе с полустепеня-  
ми вершин, не превосходящими 2 ..... 151

**Часть 1.**  
**Общие проблемы теории**  
**интеллектуальных систем**

# Об определении понятия визуального образа

В. Н. Козлов<sup>1</sup>

Работа относится к области теоретических аспектов распознавания визуальных образов. Изображения трактуются как конечные множества точек в евклидовых пространствах разной размерности. Так действительно можно представлять реальные изображения. Формального определения визуального образа пока нет. В статье делается первое приближение к этому определению.

**Ключевые слова:** распознавание образов, визуальные образы, изображения.

Изображением называем конечное (непустое) множество точек в евклидовых пространствах разной размерности. В частности, двумерное изображение — конечное множество точек на плоскости. Обосновываем это тем, что любую фигуру можно «аппроксимировать» конечным множеством точек (рис. 1), которые уже сами по себе делают фигуру вполне узнаваемой. Если точек много, то такая совокупность точек практически неотличима от исходной фигуры. Так же можно представлять и полутоновые, черно-бело-серые изображения, при этом разная плотность точек в разных частях изображения дает разные оттенки «серого цвета». Как известно, цветное изображение можно представлять как наложение трех монохроматических (аналогов черно-бело-серых) изображений. Это означает, что совокупностями точек можно представлять и цветные изображения. Трехмерные изображения — точки в трехмерном евклидовом пространстве. Соотнесение между трехмерным изображением и двумерными, являющимися его проекциями, приводит к задачам восстановления тел по плоским проекциям и смежным задачам в приложениях. Наконец, трехмерный мир в динамике можно рассматривать как четырехмерное изображение (последовательность трехмерных сцен).

Далее рассматриваются двумерные изображения, но сказанное несложно обобщается и на случаи большей размерности.

Среда  $S$  у нас — произвольное изображение, состоящее из  $N$  ( $N \geq 1$ ) точек. Частью среды называем любое непустое подмножество ее точек. Частей среды —  $(2^N - 1)$ . Множество частей (т.е. изображений) обозначим через  $S^+$ . Образ из  $S$  будем трактовать как некоторую группу изображений из  $S^+$ , т.е. задавать его перечислением всех возможных приме-

---

<sup>1</sup>Козлов Вадим Никитович — профессор каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vnkozlov@mail.ru.

Kozlov Vadim Nikitovich — professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

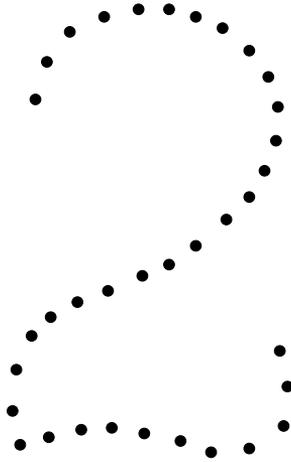


Рис. 1.

ров изображений образа в данной среде  $S$ . Обозначим множество всех возможных групп через  $S^*$ . Разумеется, далеко не все из этих групп — образы в содержательном понимании. Тем самым, задача состоит в том, чтобы «ужать» множество  $S^*$  до совокупности групп таких, которые уже можно с приемлемой степенью убедительности трактовать как образы. В этом и состоит подход к определению понятия образа в данной работе.

Приближений к понятию образа предполагается несколько, в этой статье описано одно (первое приближение).

Введем сквозной для последующего изложения пример: представим для наглядности среду  $S$  как «хаос» на плоскости разных фигур — цифр, букв и пр. — разных по размерам, ориентации, пересекающихся, имеющих общие части и пр. Тогда среди групп множества  $S^*$  будут как «осмысленные», т. е. группы например «двоек», или «троек», так и «бесмысленные» — сочетания одновременно и «двоек», и «троек», их частей, и многого другого. Вот эти бессмысленные сочетания и надо отсеять, основываясь на некоторых далее вводимых принципах.

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые понятия и ранее опубликованные результаты [1, 2, 3]. Содержательный смысл их в том, чтобы доказательным образом обеспечить наложение одного изображения на другое аффинными преобразованиями так, чтобы различие между изображениями было бы минимальным из возможных.

Пусть изображение  $A$  состоит из точек  $a_1, \dots, a_n$ , изображение  $B$  — из точек  $b_1, \dots, b_n$ ,  $\psi$  — одно из возможных взаимно однозначных соответствий между точками изображений  $A$  и  $B$ , которым точке  $a_i$  из  $A$  сопоставляется точка  $b_{\psi(i)}$  из  $B$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Обозначим через  $B^*$  мно-

жество всех изображений, получаемых из  $B$  аффинными преобразованиями. Полагаем, что на  $B'$  из  $B^*$  сохраняется нумерация, порожденная изображением  $B$ , т.е. через  $b'_i$  на  $B'$  обозначается точка, в которую переходит при соответствующем преобразовании точка  $b_i$  из  $B$ . Точки  $a_i$  и  $b'_{\psi(i)}$  называем соответствующими, соответствующими называем и отрезки  $(a_i a_j)$  и  $(b'_{\psi(i)} b'_{\psi(j)})$ .

Зададимся некоторым положительным числом  $\epsilon$ . Обозначим через  $\{B\}^\epsilon$  множество всех таких изображений  $B'$  из  $B^*$ , для которых длина каждого отрезка  $(b_i b'_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) не больше  $\epsilon$ . Преобразования, переводящие изображения из  $\{B\}^\epsilon$  друг в друга, назовем  $\epsilon$ -аффинными. Содержательно их можно трактовать как ограниченные, локальные аффинные преобразования для  $B$ .

Дадим важное определение искомого (или оптимального) взаиморасположения: через  $l_A(B')$  обозначим длину наибольшего из отрезков  $(a_i b'_{\psi(i)})$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Рассмотрим  $B_0$  — некоторое изображение из  $B^*$ , и  $\psi_0$  — одно из взаимно однозначных соответствий между точками изображений  $A$  и  $B$ . Пусть существует такое  $\epsilon_1$ , что для всех  $B'$  из  $\{B_0\}^{\epsilon_1}$  и при всех биекциях  $\psi$  минимум величин  $l_A(B')$  достигается на изображении  $B_0$  и при биекции  $\psi_0$ . Пусть существует такое  $\epsilon_2$ , что для всякой пары изображений  $(A', B'_0)$ , получаемой  $\epsilon_2$ -аффинными преобразованиями пары  $(A, B_0)$  как целого, выполняется аналогичное свойство: для всех  $B''$  из  $\{B'_0\}^{\epsilon_1}$  и при всех биекциях  $\psi$  минимум величин  $l_{A'}(B'')$  достигается на изображении  $B'_0$  и при биекции  $\psi_0$ . Тогда  $B_0$  называем искомым для изображения  $A$  (и взаиморасположение  $A$  и  $B_0$  искомым), биекцию  $\psi_0$  — искомым соответствием между точками в  $A$  и  $B$ .

Что есть в содержательной интерпретации искомое (оптимальное) расположение изображения  $B$  на  $A$ , например, в случае, если  $A$  «эталонное» изображение «двойки», а  $B$  — тоже «двойка», но несколько искаженная по форме? Тогда  $B_0$  — расположенная аффинными преобразованиями на  $A$  искаженная «двойка», причем расположенная так, чтобы, несмотря на исходные искажения, максимально повторять своей формой форму неискаженной  $A$ , при этом — безотносительно к размерам, ориентациям и сжатиям-растяжениям исходной фигуры  $B$ . Параметр  $l_A(B')$  и служит мерой несовпадения форм фигур. Для двух двоек он, предполагается, будет существенно меньше, чем, скажем, для «двойки» и «четверки».

Ясно, что перебором оптимальное взаиморасположение двух фигур не найти — перебор будет бесконечным.

Из полученных ранее результатов [1] следуют некоторые необходимые условия, которым должны удовлетворять изображения в паре  $(A, B_0)$ . Они коротко состоят в следующем. Пусть биекцией  $\psi$  точке  $a_i$

из  $A$  сопоставляется точка  $b'_{\psi(i)}$  из  $B$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Возьмем на плоскости произвольную точку  $O$  и параллельными переносами отрезка  $(a_i, b'_{\psi(i)})$  совместим точку  $a_i$  с точкой  $O$ . Точку, в которую перейдет при этом  $b'_{\psi(i)}$ , обозначим через  $c_{i\psi(i)}$  и назовем порожденной парой соответствующих точек  $a_i$  и  $b'_{\psi(i)}$ . Изображение из точек  $O$  и  $c_{i\psi(i)}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) называем характеристическим,  $O$  — центр характеристического изображения,  $c_{i\psi(i)}$  — точки ядра.

Окружность наименьшего по радиусу круга, включающего все точки ядра, называем ключевой. Доказано [1], что для пары  $(A, B_0)$  центр характеристического изображения с необходимостью должен совпадать с центром ключевой окружности.

Назовем изображение  $B'$  из  $B^*$  согласованным с  $A$ , если существуют в  $B'$  два непараллельных отрезка  $(b'_1b'_2)$  и  $(b'_3b'_4)$ , равные, параллельные и однонаправленные с соответствующими отрезками  $(a_1a_2)$  и  $(a_3a_4)$  в  $A$ . Параллельные отрезки, например,  $(a_1a_2)$  и  $(b'_1b'_2)$  называем однонаправленными, если, при условии, что в  $(a_1a_2)$  слева направо сначала идет точка  $a_1$ , а затем  $a_2$ , то и в отрезке  $(b'_1b'_2)$  слева направо сначала идет точка  $b'_1$ , затем  $b'_2$ .

Доказано [1], что если  $B_0$  искомое изображение для  $A$ , то  $B_0$  согласовано с  $A$ .

Итак, имеем теперь два необходимых условия для пары  $(A, B_0)$ : искомое изображение  $B_0$  должно быть согласовано с  $A$ , и центр характеристического изображения пары  $(A, B_0)$  должен совпадать с центром ключевой окружности. Сочетание этих двух условий позволяет вычлени из  $B^*$  конечное подмножество изображений, среди которых только и может находиться искомое изображение  $B_0$ . Здесь существенна именно конечность, поскольку этим потенциально бесконечный перебор при поиске  $B_0$  сводится к конечному.

Отметим, что в частном случае  $A$  может быть, конечно, и аффинно эквивалентным с  $B$ , и тогда искомое взаиморасположение для них состоит в том, что они просто совпадают.

Дано изображение  $X$ . Обозначим через  $W(X)$  выпуклую оболочку для  $X$ . Известно [4, 5], что для выпуклого множества  $W(X)$  существует единственный наименьший по площади эллипс, его вмещающий. Центр этого эллипса назовем центром изображения  $X$ , а длину большей оси — размером. Множество всех частей изображения  $X$  обозначим через  $X^+$ .

Два изображения  $A$  и  $C$  называем непересекающимися, если  $W(A)$  и  $W(C)$  не имеют общих точек. Рассматриваем покрытие  $P_X$  (такое всегда есть) изображения  $X$  непересекающимися частями из  $X^+$ . Части называем также кусками изображения  $X$ . Размером покрытия называем размер

наибольшего куска в нем. Ясно, что возможных покрытий — конечное множество.

Уместно сделать следующее пояснение к дальнейшему. Построение модели — это всегда нечто такое, что первоначально возникает главным образом на основе интуиции, правдоподобных рассуждений. А уже затем на этой первоначальной основе строится совокупность определений (формальных, или, для начала, полужформальных), позволяющих проводить доказательные рассуждения, т.е. получать утверждения (теоремы) о свойствах модели. Эвристика, в немалой степени присутствующая в распознающих системах — это тоже правдоподобные рассуждения. Но она только ими и ограничивается, не переходя к доказательным построениям.

Далее представлены два пункта содержательных соображений, на которых в значительной мере далее строится модель.

О понятии остова для отдельного изображения и для группы изображений. Предположим в качестве гипотезы, что для группы похожих изображений во всех них есть нечто общее, объединяющее эти изображения, и что мы назовем их остовом. Опишем возникновение этого понятия на содержательном уровне в нескольких приближениях, начиная с простого и довольно очевидного.

Представим «двойку» в виде совокупности точек с кругами (рис. 2). Это основа, базовое изображение  $A$ . Трактуете его так: исходная совокупность точек разбита на куски, причем такие, что тот единственный и наименьший по площади эллипс, который вмещает кусок, есть круг, причем все круги — одного радиуса, и их центры и образуют «двойку», которую мы видим на рисунке. Это несколько искусственный пример, потому что если реальную «двойку» разбить на куски, то минимальные по площади эллипсы этих кусков вовсе не обязательно будут именно кругами. Круги могут — немного — пересекаться. Вписанные же в круги куски (они на рисунке не представлены), как и следует из определений выше, пересекаться не могут. Предполагается, что при фиксированном радиусе количество кругов наименьшее из возможных.

Заменяем теперь содержащееся в каждом круге множество точек (на рис. 2, напомним, они не показаны) на другое, но с тем же условием: выпуклая оболочка на этом множестве порождает кусок, вписанный в круг, причем центр куска совпадает с центром круга, куски из разных кругов, естественно, не пересекаются. Это второе изображение, ясно, отличается от первого. Аналогично можно породить целый класс изображений, обозначим их  $A_1, \dots, A_k$  (потенциально бесконечный), они разные (и разнообразные), поскольку в круги можно «вставлять» разные изображения, даже, например, те же «двойки», только маленькие по размерам. Изображение из центров кругов для каждого из изображений можно на-

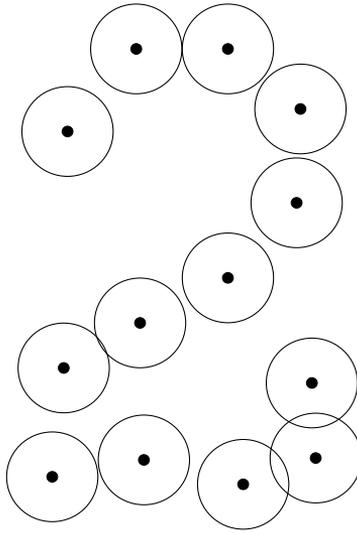


Рис. 2.

звать остовом, он общий для всех изображений класса, и, полагая для наглядности на данном этапе, присутствует явно в виде точек в каждом изображении, хотя в более общем случае точки остовов можно считать особыми, вспомогательными точками, не обязательно совпадающими с какими-то собственно точками изображений. Весь класс порожденных таким образом изображений можно рассматривать как определяющий преобразования для этих конкретных изображений более широкие, чем аффинные преобразования: каждая точка в пределах круга может быть преобразована в любую другую точку, но в пределах того же круга. Если в остове  $m$  точек, то его можно рассматривать как приближение  $m$ -го уровня для изображений класса (соответственно называть  $m$ -остовом). Остов есть «выжимка» из каждого такого изображения, и эта выжимка у них одинаковая (точнее: остовы аффинно эквивалентны, в таком представлении, как на рис. 2, просто совпадают). Полагаем, что описанные изображения класса можно, с некоторой степенью убедительности, считать относящимися к одному образу. Сразу отметим, что если в исходном изображении  $n$  точек, то можно потенциально рассматривать классы изображений, порождаемых уровнями, начиная от 1 и до  $n$ , причем изображения  $n$ -го уровня будут уже просто попарно аффинно эквивалентными.

Описанное было первым приближением. В следующем приближении можно расширить класс изображений  $m$ -го уровня, считая, что в любой из кругов базового изображения (рис. 2) может помещаться любое

множество точек, не обязательно с центром именно в центре круга, но, конечно, внутри круга и без пересечений с другими кусками того же изображения. Если исходный рис. 2 рассматривать как футляр, то такие новые изображения можно трактовать как наполнение футляра, и точки наполнения, по сути, ограничены только тем условием, что они находятся внутри кругов. Полагаем, однако, что если есть набор кусков  $A$  с  $m$ -остовом  $a$  (базовое изображение, рис. 2), и набор кусков  $B$  с  $m$ -остовом  $b$ , то  $a$  и  $b$  находятся в искомом взаиморасположении, то есть точки изображений  $a$  и  $b$  максимально «придвинуты» друг к другу (в предыдущем, более частном случае, эти остовы просто совпадали). Этим исключается, например, такой случай, когда точки из  $a$  и  $b$  не совпадают, но только потому, что сдвинуты по отношению друг к другу параллельным переносом.

Итак, куски изображения  $B$  из наполнения у нас уже не обязательно равновелики по размерам (ранее равновеликость имела место по причине вписанности кусков в круги одинакового радиуса на рис. 2). Но для кусков исходного изображения  $A$  это условие пока сохраняется. Равновеликость важна, ибо в противном случае разбиение трудно считать представляющим форму исходного изображения. Отойти от условия равенства по размерам кусков (для  $A$ ), сохраняя смысл равновеликости, можно так: пусть разбиение на куски с центрами  $a_1, \dots, a_m$  таково, что существует  $R$  такое, что каждый кусок находится внутри круга радиуса  $R$  (и с центрами в  $a_1, \dots, a_m$ ), и круги эти не пересекаются (это условие далее уточняется). Смысл изменения в том, что теперь неважно, какого размера собственно кусок исходного разбиения (он может быть даже точкой), но кусок находится внутри круга, одинакового по радиусу с другими кругами, и эти круги не пересекаются. Такой набор кругов с центрами в точках остова называем также футляром (порожденным данным изображением). Уточним условия на радиус кругов и возможное их пересечение. Полагаем, что ни один круг не включает центр другого круга в качестве внутренней точки (т.е. максимальный радиус равен минимальному расстоянию между точками остова). Содержательный смысл этого условия (ограничения) очевиден. (Пример: пусть точка  $a$  — центр первого круга, и этот круг включает точку  $b$  — центр второго круга. Тогда  $a$  можно преобразовать в точку  $b$ , и затем в любую точку второго круга, в том числе, и за пределами первого круга, что, по смыслу, не допустимо). Круги могут соприкасаться, и даже пересекаться, но к внутренним точкам круга (усеченного) относим только большую часть круга по соответствующую сторону от отрезка — границы пересечения. Точки наполнения футляра — только внутренние точки (возможно усеченных) кругов.

Как совместить привязку футляров к конкретным изображениям в

среде с тем, что мы декларируем рассмотрение с точностью до аффинных преобразований.

Мы намереваемся рассматривать изображения при распознавании с точностью до аффинных преобразований, т.е. безотносительно к параллельным переносам, преобразованиям симметрии, вращениям, изменениям в размерах, сжатиям, растяжениям и любым их комбинациям. Это в какой-то мере соответствует тому, что мы рассматриваем именно форму фигур, если говорить о фигурах, а не какие-то не имеющие отношения к форме обстоятельства, связанные с внешними системами координат [1]. Вместе с тем известно, что в целом аффинные преобразования не сохраняют форму фигур: чрезмерными сжатиями или растяжениями можно сделать фигуру неузнаваемой в сравнении с оригиналом. Тем самым, эта чрезмерность должна быть ограничена. Но чем и как, в каких пределах, и чем эти пределы должны определяться?

Содержательные рассмотрения выше были явно привязаны к «месту», т.е. к конкретному изображению, которое мы называли базовым. Конкретными были и размеры кусков, и радиусы кругов. Как это совместить с рассмотрением с точностью до аффинных преобразований?

Положим в нашей среде  $S$  есть группа  $G$  изображений «двойки», безусловно вложимых аффинными преобразованиями в футляр  $A$  на рис. 2, но разные по размерам, положению на плоскости, с локальными изменениями, и пр., в том числе, для примера, может присутствовать и изображение  $X$ , аффинно эквивалентное с изображением из центров кругов на рис. 2, однако сжатое к некоторой прямой с таким коэффициентом, что все его точки выстроились практически в одну прямую. Ясно, что узнать в этом множестве точек  $X$  остов из рис. 2 невозможно, хотя они и аффинно эквивалентны. Так вот в наших модельных построениях должно быть учтено, с одной стороны, то, что этот  $X$  с остовом на рис. 2 аффинно «совпадают», с другой — то, что уж примером формы «двойки»  $X$  явно служить не может.

Изображения группы  $G$  — это конкретные наборы точек в разных частях среды  $S$ . С содержательной точки зрения они в разной степени соответствуют тому, чтобы называться типичной двойкой, эталоном. Мы должны выделить изображение, наиболее достойное того, чтобы считаться эталоном в группе, причем, напомним, безотносительно к размерам, ориентации и пр., к сжатию-растяжению в определенных пределах, причем эти пределы должны возникать «внутри» модели, а не задаваться извне.

Мы будем пробовать на роль эталона группы поочередно все изображения. Возьмем, для начала, изображение  $A$  на рис. 2. Положим, к виду рис. 2 оно приводится разбиением исходного множества точек на  $m$  равновеликих кусков, где  $m$  — число кругов на изображении рис. 2,

и центры кусков — точки изображения рис. 2. Изображение из центров кусков обозначим через  $a^+$ . Далее для произвольного изображения  $A'$  из группы  $G$  осуществляем все возможные его разбиения на  $m$  кусков (вообще говоря, уже не заботясь о равновеликости), строим (для каждого разбиения) точечное изображение  $a^{+'}$  из центров этих кусков, и укладываем аффинными преобразованиями изображение  $a^{+'}$  на изображение  $a^+$ . Если укладка (искомое взаиморасположение) такова, что при этом и каждый соответствующий кусок оказывается внутри соответствующего круга, то изображение  $A'$  называем приемлемым для эталона  $A$  (при уровне дробности  $m$  эталона). Поочередно проверяем на приемлемость все изображения группы, и поочередно при каждом изображении, рассматриваемым в качестве эталона. Если приемлемости нет в каждом из этих рассмотрений, то уровень  $m$  дробности называем не адекватным группе.

Наибольший уровень адекватности группы называем ее дробностью, он и служит основной характеристикой «однородности» группы, близости по форме составляющих ее изображений. Чем ближе по форме изображения, тем, полагаем, больше дробность. Предельный случай — когда все изображения аффинно эквивалентны — даст максимально возможную в этом случае дробность, равную числу точек в каждом изображении. Минимальная дробность, и она есть всегда, для любой группы, равна единице. Разнородность изображений в группе понижает дробность: ясно, что если, например, в группу «двоек» добавить «четверку», то дробность понизится.

Нетрудно видеть, что в этих построениях хоть и используются в целом аффинные преобразования, но они все же ограничены, в известной степени, примерами, т.е. изображениями группы  $G$ . И это разумно, ибо возможных аффинно преобразованных изображений континуум (их можно назвать своеобразными «фантазиями»), но их приемлемость мы связываем с конечным «опорным» множеством, т.е. множеством конкретных примеров из данной среды  $S$ , с изображениями группы  $G$  (это есть представленная нам «реальность», в отличие от фантазий).

Перейдем к относительно более формальным построениям. Рассмотрим построение на основе произвольного изображения  $A$  того, что назовем футляром. Зададимся некоторым  $m$  из промежутка от 1 до  $n$  ( $n$  — число точек в  $A$ ). Рассмотрим покрытие  $A'$  изображения  $A$  непересекающимися кусками  $A_1, \dots, A_m$  (таких разбиений — конечное множество). Центры кусков обозначим через  $a_1, \dots, a_m$ , в целом они составляют изображение  $a^+$ , его называем остовом ( $m$ -остовом). Пусть  $R$  — наименьшее расстояние между точками  $a_1, \dots, a_m$ , полагаем каждую из этих точек центром круга радиуса  $R$ , и каждую из точек куска  $A_i$  ближе к  $a_i$ , чем к другим центрам. Последнее значит, что если круги пересекаются (по

отрезку прямой), то кусок должен быть внутри усеченного круга. Если  $R$  меньше половины размера покрытия, то разбиение  $A'$  называем неправильным. Далее, когда имеются ввиду футляры, рассматриваем только правильные разбиения для  $A$ .

Футляр есть пара  $\langle \text{изображение } A, \text{ остов } O \rangle$ . Этой пары достаточно, чтобы по ней на изображении  $A$  построить систему кругов радиуса  $R$  с центрами в точках из  $O$ , определить границы-отрезки пересечения кругов (если пересечения есть), куски изображения  $A$  в каждом из кругов.

Пример (вырожденный): изображение  $A$  состоит из точек  $a_1, \dots, a_n$ , рассматриваем разбиение на  $n$  кусков, т.е. каждый кусок — точка,  $R$  равен минимальному расстоянию между точками.

Итак, построен  $m$ -футляр изображения  $A$ . Если такой футляр не единственный, то каждый рассматривается независимо.

Пусть теперь  $B'$  есть одно из возможных разбиений изображения  $B$  на  $m$  непересекающихся кусков (не обязательно правильное), с центрами  $b_1, \dots, b_m$  (обозначение в целом:  $b^+$ ). Если мы теперь аффинными преобразованиями трансформируем изображение  $B'$  вместе с точками  $b_1, \dots, b_m$ , то новые положения точек  $b_1, \dots, b_m$  будут по-прежнему центрами преобразованных кусков. Это следует из теоремы 1.

**Теорема 1.** Пусть дано изображение  $X$  из точек  $x_1, \dots, x_n$  и точка  $y$  — его центр. Пусть изображение  $X'$  из точек  $x'_1, \dots, x'_n$  есть аффинно преобразованное изображение  $X$ , и точка  $y'$  — его центр. Тогда изображения из точек  $x_1, \dots, x_n, y$  и точек  $x'_1, \dots, x'_n, y'$  аффинно эквивалентны.

*Доказательство.* Утверждение означает, что при аффинных преобразованиях изображения  $X$  из точек  $x_1, \dots, x_n, y$  в изображение  $X'$  из точек  $x'_1, \dots, x'_n, y'$  центр  $y$  изображения  $X$  переводится в центр  $y'$  изображения  $X'$ . Действительно, допустим, что центр преобразованного изображения  $X'$  есть точка  $y''$ , отличная от  $y'$ . Точка  $y$  есть центр эллипса  $E$  минимального по площади, в который вписано изображение  $X$ , т.е. если обозначить площадь эллипса через  $P(E)$ , площадь выпуклой оболочки изображения  $X$  через  $P(X)$ , то отношение  $P(E)/P(X)$  минимальное из возможных. Такой эллипс согласно [5] существует и единственен. Аналогично точка  $y''$  есть центр наименьшего по площади эллипса  $E''$  для изображения  $X'$ . При аффинном преобразовании эллипс  $E$  преобразуется в эллипс  $E'$  с центром в  $y'$ . Поскольку  $y'$  и  $y''$  предполагаются разными, то и эллипсы  $E'$  и  $E''$  тоже разные. Но при аффинном преобразовании отношение  $P(E)/P(X)$  сохранится равным  $P(E')/P(X')$ , а это значит, что эллипс  $E'$  тоже минимален по площади для  $X'$  и единственен — пришли к противоречию. Итак,  $E'$  и  $E''$  должны совпадать, а, значит, совпадают и  $y''$  с  $y'$ . Теорема доказана.

□

Определим понятие вместимости для  $B'$  в  $m$ -футляре изображения  $A$ . Расположим изображение  $b^+$  на изображении  $O$  искомым образом. Это преобразует и изображение  $B'$  в целом. Если при этом каждый кусок изображения  $B'$  окажется внутри соответствующего круга (возможно, усеченного) футляра изображения  $A$ , то говорим, что данное  $m$ -разбиение изображения  $B$  вместимо в этот футляр. Изображение  $B$  называем  $m$ -вместимым в изображение  $A$ , если хотя бы одно из его  $m$ -разбиений вместимо в хотя бы один из  $m$ -футляров изображения  $A$ .

Понятие дробности для группы. Пусть группа  $G$  из  $S^*$  состоит из изображений  $A_1, \dots, A_k$ , и пусть  $u$  — наименьшее число точек в изображениях группы. Зададимся некоторым  $m$  из промежутка от 1 до  $u$  и пусть существует хотя бы одно из изображений группы такое, что все  $A_1, \dots, A_k$   $m$ -вместимы в некоторый футляр этого изображения. Тогда группу называем  $m$ -совместимой. Наибольшее значение  $m$ , для которого группа  $m$ -совместима, обозначаем через  $M$  и называем дробностью группы. Те из изображений группы,  $M$ -футляры которых вмещают все изображения группы, называем ее эталонами. Теперь каждая группа из  $S^*$  снабжена характеризующим ее параметром — дробностью, набором эталонов, и, будем полагать,  $M$ -футлярами на эталонах.

Пусть  $G_1$  и  $G_2$  — группы из  $S^*$  с одинаковой дробностью, и пусть множество изображений  $G_2$  есть подмножество (собственное) для группы  $G_1$ . Тогда говорим, что группа  $G_1$  полнее группы  $G_2$ . Группу называем полной, если нет группы полнее, чем она. Таким образом, здесь понятие полной группы основывается на задании группы перечислением входящих в нее изображений.

Пусть  $G$  — группа,  $M'$  есть  $M$ -футляр одного из эталонов группы. По построению, все изображения группы вместимы в  $M'$ . Однако, в  $M'$  могут быть вместимы и другие изображения среды. Назовем совокупность всех вместимых в  $M'$  изображений максимальным наполнением футляра  $M'$ .

**Теорема 2.** *Если  $G$  — полная группа, то максимальное наполнение любого из  $M$ -футляров группы совпадает с группой. Однако если максимальное наполнение  $M$ -футляров группы совпадает с группой, то из этого не следует, что группа полная.*

*Доказательство.* Первое утверждение состоит в том, что если  $G$  — полная группа, то максимальное наполнение любого из футляров группы совпадает с группой. Действительно, пусть это не так, и существует изображение  $X$ , которое не входит в  $G$ , но принадлежит максимальному наполнению одного из футляров  $M'$ . Но тогда расширенная группа  $G$  с

присоединенным изображением  $X$  будет  $M$ -совместимой группой, что противоречит исходной полноте группы  $G$ .

Вторая часть теоремы утверждает, что обратное неверно, т.е. если максимальное наполнение футляров группы совпадает с группой, то из этого не следует, что группа полная. Докажем это построением примера. Рассмотрим класс  $g$  некоторых аффинно эквивалентных изображений из  $S^*$ , причем всех таких изображений. Пусть  $x$  — одно из этих изображений, причем на основе этого изображения строится футляр группы. Полагаем, в  $x$  содержится  $m$  точек (по меньшей мере четыре), все они — точки остова, и две из них,  $a_1$  и  $a_2$ , наиболее близко расположенные, определяют величину  $R$  футляра, равную некоторой величине эpsilon. Если эpsilon достаточно близок к нулю, то в этот футляр вместятся изображения группы  $g$  и только они, то есть максимальное наполнение футляра совпадает с группой. Построим на основе изображения  $x$  изображение  $x'$ , совпадающее с  $x$ , за исключением точек  $a_1$  и  $a_2$ , замененных на точки соответственно  $a'_1$  и  $a'_2$ , расположенные на продолжении отрезка  $(a_1 a_2)$  и симметрично относительно середины этого отрезка. Все точки изображения  $x'$  считаем точками футляра, точки  $a'_1$  и  $a'_2$  — наиболее близкими друг к другу, и величину  $R$  футляра полагаем равной четырем эpsilon. При достаточно малом эpsilon в футляр на изображении  $x'$  будут вмещаться все изображения группы  $g$  и только они. Однако изображение  $x'$  в футляр на  $x$  вместиться, по построению, не может. Группа  $G$ , состоящая из изображений группы  $g$  и присоединенного изображения  $x'$ , тем самым,  $m$ -совместима, значит группа  $g$  не полная, что и доказывает утверждение. □

Итак, ранее для полной группы было возможно ее задание, как и для всех групп, перечислением всех входящих в группу изображений. Не очень удобный способ, если изображений много. Однако теперь для полной группы возможно ее задание каким-либо футляром эталона группы, и указанием, что группу составляют все вместимые в этот футляр изображения.

Множество всех полных групп обозначаем через  $S^{**}$  и называем множеством образов первого рода. Возможность задавать образ первого рода через посредство футляра эталона можно считать способом компактного описания образа. Итак, перейдя от  $S^*$  к  $S^{**}$  мы сократили («ужа-ли») множество групп, потенциально рассматриваемых как образы, причем, скорее всего, существенно. Однако доказательно оценить разницу по мощности множеств  $S^*$  и  $S^{**}$  будет, возможно, нетривиальной задачей.

Как можно содержательно трактовать описанное выше, т.е. наличие полной группы  $G$  и ее подгрупп, неполных, но максимальное наполне-

ние которых совпадает с  $G$ ? Задание примеров изображений группами (множество  $S^*$ ) означает, что эти подгруппы могут быть разными: где-то примеров больше, где-то меньше, причем для одного и того же образа. В среде, в разных ее частях, может быть много разных примеров одной и той же фигуры (возможно, с вариациями в контурах). Скажем, некто познакомился с изображением «двойки» на сравнительно небольшом множестве примеров (т.е. это одна из возможных групп в  $S^*$ ). Он «выработал» футляр для этой группы и это позволит ему при появлении неизвестного изображения определить, вместилимо оно в этот футляр или нет, то есть распознать изображение. Другой субъект «выработает» схожий футляр (иными словами, схожее понятие «двойки») на другом множестве ее примеров (другая группа), но в целом, возможно, изображения первой группы вместилимы в футляр второй и наоборот, что и означает, что их можно объединить в одну группу. В целом это представляет в модели то содержательно очевидное обстоятельство, что одному и тому же образу можно «обучиться» на разных примерах и из разных частей среды.

О распознавании применительно к образам первого рода. Пусть задано в среде  $S$  некоторое изображение  $X$ , трактуемое как неизвестное, и его нужно отнести к образам в  $S^{**}$ , т.е. выяснить, в каких полных группах это изображение содержится. Это, по сути, аналог (несколько расширенный) традиционной постановки задачи распознавания.

Представим образы (группы из  $S^{**}$ ) вершинами ярусного графа с номерами ярусов от 1 до  $N$ . Это значит, что каждой вершине приписана группа как таковая, а также футляры эталонов групп (т.е. группа задана обоими способами: и перечислением входящих в нее изображений, и футляром). На ярусе с номером  $i$  располагаются все вершины с дробностью  $i$ . Из вершины  $X$  яруса  $i$  идет ребро в вершину  $Y$  яруса  $j$ , где  $i < j$ , если группы  $X$  и  $Y$  имеют непустое пересечение, и нет группы  $Z$  из яруса с номером  $k$ , где  $i < k < j$ , такой, что  $Z$  имеет непустые пересечения и с  $X$ , и с  $Y$ . Вершины  $X$  и  $Y$  называем смежными, причем  $X$  — предковая вершина,  $Y$  — потомковая.

Начинаем проверку принадлежности распознаваемого изображения  $X$  образам с яруса 1. На этом ярусе образ только один, и любой  $X$  ему всегда принадлежит. Далее действуем в рамках индуктивной процедуры: если выяснили, что  $X$  принадлежит вершинам (образам)  $X_1, \dots, X_k$  на ярусе с номером  $i$ , то в качестве следующего шага надо проверить на принадлежность к ним только те образы на ярусах с большими номерами, которые являются потомковыми по отношению к вершинам  $X_1, \dots, X_k$ . Каждая вершина на ярусном графе задана двойкой, во-первых, как группа изображений, во-вторых, футляром какого-либо эталона группы. Для проверки принадлежности  $X$  образу надо либо выяснить принадлеж-

ность  $X$  группе, либо выяснить вместимость  $X$  в группу с использованием футляра. Принадлежность группе означает проверку на аффинное совпадение со всеми изображениями группы, т.е. перебор. Если в группе большое число (скажем, многие миллионы) изображений, то это процесс затратный и небыстрый. Рациональнее определять вместимость. При этом, однако, при проверке на вместимость  $X$  в некоторый футляр, надо определять искомое взаиморасположение остова, полученного при разбиении изображения  $X$  на куски, с остовом футляра образа, а это, в общем случае, перебор  $n!$  вариантов биекций остовов (что тоже немало), где  $n$  — число точек в каждом из них.

Сократим перебор. Здесь мы можем опереться на теорему 3, которая будет доказана ниже. Содержательный смысл состоит в том, чтобы, при движении по ярусам графа, распознавание, уже осуществленное для образа из яруса с меньшим номером, использовать для уменьшения перебора при выяснении принадлежности изображения образу на ярусе с большим номером.

Пусть для группы  $A$  яруса  $i$  существует футляр  $F^i(A)$  с остовом  $O^i$  (точки  $o_1, \dots, o_i$ ), и пусть для изображения  $a$  из  $A$  его разбиение  $a_1, \dots, a_i$  — из числа вместимых в футляр  $F^i(A)$ , причем с соответствием куска  $a_k$  точке  $o_{\varphi_1(k)}$  ( $k = 1, \dots, i$ ). Тогда точки изображения  $a$  из куска  $a_k$  считаем соответствующими точке  $o_{\varphi_1(k)}$  остова  $O^i$ .

Пусть для группы  $B$  яруса  $j$  ( $i < j$ ), смежной с группой  $A$ , существует футляр  $F^j(B)$  с остовом  $O^j$  (точки  $o'_1, \dots, o'_j$ ), и пусть для изображения  $a$  из  $B$  его разбиение  $a_1, \dots, a_j$  — из числа вместимых в футляр  $F^j(B)$ , причем с соответствием куска  $a_t$  точке  $o'_{\varphi_2(t)}$  ( $t = 1, \dots, j$ ). Тогда точки изображения  $a$  из куска  $a_t$  считаем соответствующими точке  $o'_{\varphi_2(t)}$  остова  $O^j$ .

Точку  $o_{\varphi_1(k)}$  остова  $O^i$  называем соответствующей точке  $o'_{\varphi_2(t)}$  остова  $O^j$  (и наоборот), если  $a_k$  и  $a_t$  имеют непустое пересечение. Этим определено соответствие  $\psi$  между точками остовов  $O^i$  и  $O^j$ . Оно, естественно, не взаимно однозначное. Рассматриваем все такие соответствия, порождаемые всеми изображениями, общими для  $A$  и  $B$  и всеми их разбиениями, в их искомым взаиморасположениях с остовами всех футляров (эталонных) для  $A$  и  $B$ , множество этих соответствий обозначаем через  $\psi(O^i, O^j)$ . Множество  $\psi(O^i, O^j)$  считаем нагрузкой ребра между смежными вершинами  $A$  и  $B$ .

Содержательный смысл множества  $\psi(O^i, O^j)$  состоит в следующем. Вершины  $A$  и  $B$  на графе смежные. Значит, группы  $A$  и  $B$  имеют общие элементы, или, что практически то же самое, есть изображения, вместимые одновременно и в  $A$ , и в  $B$ . Пусть  $x$  — такое изображение. Пусть  $x$  с разбиением  $x_1, \dots, x_i$  вменяется в футляр  $F^i(A)$  с остовом  $O^i$  из то-

чек  $o_1, \dots, o_i$  с соответствием куска  $x_k$  точке  $o_{\varphi_1(k)}$  ( $k = 1, \dots, i$ ). Пусть теперь  $x$  с разбиением  $x'_1, \dots, x'_j$  вмещается в футляр  $F^j(B)$  с остовом  $O^j$  из точек  $o'_1, \dots, o'_j$  с соответствием куска  $x'_t$  точке  $o'_{\varphi_2(t)}$  ( $t = 1, \dots, j$ ). Задаем соответствие между разбиениями  $x_1, \dots, x_i$  и  $x'_1, \dots, x'_j$  условием:  $x_k$  соответствует  $x'_t$  (и наоборот), если  $x_k$  и  $x'_t$  имеют непустое пересечение. Это, очевидно, дает и соответствие  $\psi$  между точками остовов  $O^i$  и  $O^j$ . Соответствие  $\psi$  по построению принадлежит  $\psi(O^i, O^j)$ . Это, однако, не значит, что если, например, мы возьмем другие вменяемые разбиения  $x_1, \dots, x_i$  и  $x'_1, \dots, x'_j$ , то  $\psi$  будет другим. При разных разбиениях и разных футлярах группы порождаемые ими соответствия могут совпадать или не совпадать. Но  $\psi(O^i, O^j)$  — это множество всех возможных соответствий, которые порождаются (реализуются) в рамках описанного. Можно предположить, что число так реализуемых соответствий в общем случае не слишком большое (в сравнении с числом всех возможных соответствий).

Пусть теперь  $Z$  — изображение, вменяемое в  $A$ , и не обязательно вменяемое в  $B$ . Это значит,  $Z$  вменяемо в группу  $A$ , т.е. что для группы  $A$  яруса  $i$ , для футляра  $F^i(A)$  с остовом  $O^i$  (точки  $o_1, \dots, o_i$ ), и для изображения  $Z$  его разбиение  $z_1, \dots, z_i$  — из числа вменяемых в футляр  $F^i(A)$ , причем с соответствием куска  $z_k$  точке  $o_{\varphi_1(k)}$  ( $k = 1, \dots, i$ ). Тогда точки изображения  $Z$  из куска  $z_k$  считаем соответствующими точке  $o_{\varphi_1(k)}$  остова  $O^i$ .

Пусть для изображения  $Z$  из  $B$  его разбиение  $z'_1, \dots, z'_j$  соотнесено с футляром  $F^j(B)$ , причем с соответствием куска  $z'_t$  точке  $o'_{\varphi_2(t)}$  ( $t = 1, \dots, j$ ). Подчеркнем, что нам не известно, вменяемо ли  $Z$  в  $B$  при соответствии  $\varphi_2(t)$ . Пусть теперь некоторое соответствие  $\psi'$  между точками остовов футляров  $O^i$  и  $O^j$  задано тем условием, что  $z_k$  и  $z'_t$  имеют непустое пересечение: в этом случае точку  $o_{\varphi_1(k)}$  полагаем соответствующей точке  $o'_{\varphi_2(t)}$  (и наоборот). Если  $\psi'$  принадлежит  $\psi(O^i, O^j)$ , то  $\varphi_2(t)$  называем потенциально приемлемым соответствием между точками остова  $O^j$  и кусками разбиения изображения  $Z$ . Обозначаем через  $\{\varphi_2(t)\}$  множество всех потенциально приемлемых соответствий, полученных при всех имеющихся разбиениях  $z_1, \dots, z_i$ , соответствиях  $\varphi_1(k)$ , всех разбиениях  $z'_1, \dots, z'_j$ , и всех  $\varphi_2(t)$ .

**Теорема 3.** *Если  $Z$  вменяемо в  $B$ , то существует его разбиение  $z'_1, \dots, z'_j$  с соответствием  $\varphi_2(t)$  кусков этого разбиения точкам остова  $O^j$  футляра образа  $B$  такое, что соответствие  $\varphi_2(t)$  принадлежит  $\{\varphi_2(t)\}$ .*

*Доказательство.* Доказательство следует из представленных выше построений, из которых явствует, что соответствие  $\varphi_2(t)$ , при котором изображение  $Z$  вменяемо в  $B$ , является с необходимостью потенциально приемлемым.

Таким образом, при выяснении вопроса о вместимости изображения  $Z$  в  $B$  нет нужды перебирать все возможные биективные соответствия между кусками разбиения  $z'_1, \dots, z'_j$  и точками остова  $O^j$  (их потенциально ( $j!$ )), достаточно ограничиться множеством  $\{\varphi_2(t)\}$  потенциально приемлемых соответствий.

Отметим, что имеется упрощенная демонстрационная реализация алгоритма распознавания в виде компьютерной программы. □

## Список литературы

- [1] Козлов В. Н., *Введение в математическую теорию зрительного восприятия*, М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007.
- [2] Козлов В. Н., “О зрительном образе, математических подходах к определению этого понятия и о распознавании изображений”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **39**:11 (1999), 1929–1946.
- [3] Kozlov V. N., “Visual Pattern and Geometric Transformation of Images”, *Pattern Recognition and Image Analysis*, **10**:3 (2000), 321–342.
- [4] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В., *Теорема Хелли и ее применения*, М.: Издательство «Мир», 1968.
- [5] Загускин В. Л., “Об описанных и вписанных эллипсоидах экстремального объема”, *Успехи математических наук*, **13**:6 (1958), 89–93.

### On the definition of the concept of a visual image Kozlov V.N.

The work belongs to the field of theoretical aspects of visual image recognition. The images are treated as finite sets of points in Euclidean spaces of various dimensions. This is how real images can actually be represented. There is no formal definition of a visual image yet. The article makes a first approximation to this definition.

*Keywords:* image recognition, visual images.

## References

- [1] Kozlov V. N., *Vvedenie v matematicheskuyu teoriyu zritel'nogo vospriyatiya [Introduction to the mathematical theory of visual*

*perception*], Publishing House of the Center for Applied Research at the Faculty of Mechanics and Mathematics of Moscow State University, Moscow, 2007 (in Russian).

- [2] Kozlov V. N., “O zritel'nom obraze, matematicheskikh podkhodakh k opredeleniyu ehtogo ponyatiya i o raspoznavanii izobrazhenii [On the visual image, mathematical approaches to the members of this concept and on image recognition]”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **39**:11 (1999), 1929–1946 (in Russian).
- [3] Kozlov V. N., “Visual Pattern and Geometric Transformation of Images”, *Pattern Recognition and Image Analysis*, **10**:3 (2000), 321–342.
- [4] Danzer L., Grunbaum B., Klee V., *Helly's theorem and its relatives*, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1963.
- [5] Zaguskin V. L., “Ob opisannykh i vpisannykh ehllipsoidakh ehkstremal'nogo ob"ema [On circumscribed and inscribed ellipsoids of extremal volume]”, *Russian Mathematical Surveys*, **13**:6 (1958), 89–93 (in Russian).

**Часть 2.**  
**Специальные вопросы теории**  
**интеллектуальных систем**

# Моделирование аэродинамики крыла клеточными автоматами

Гордеева А. С.<sup>1</sup>

В работе исследуется задача моделирования движения полёта крыла в воздушном потоке. Для этой цели использованы клеточные автоматы, имитирующие движение воздуха, а также автомат, моделирующий крыло. Крыло имеет некоторую несимметричную форму. Клеточные автоматы изображают прямолинейное движение частиц, но при столкновении с крылом обтекают его, причем скорость частиц, движущихся по более длинной стороне крыла, больше скорости частиц с другой стороны. Из-за этого возникает подъемная сила. Автомат, моделирующий крыло, видит клеточные автоматы из некоторой окрестности и высчитывает их скорость, на основе этого вычисляется вектор подъемной силы. В результате чего крыло меняет свои координаты.

Найдена явная формула для вычисления скоростей в общем случае, достаточных для того, чтобы крыло поднималось. Также представлено доказательство утверждения для упрощенного профиля крыла. Приведен пример, демонстрирующий, что скорость, вычисленная по явной формуле, убывает при малом увеличении угла атаки.

**Ключевые слова:** автоматное моделирование аэродинамики крыла, однородная структура со входами, клеточный автомат, подъемная сила.

## 1. Введение

Задача моделирования потоков жидкости или газа может быть реализована как с помощью представления процессов в виде дифференциальных уравнений в частных производных (традиционный подход), так и на основе клеточно—автоматного моделирования. Клеточные автоматы обладают рядом возможностей, позволяющих предположить, что они могут быть полезными для моделирования движения жидкости и газа.

---

<sup>1</sup>Гордеева Ангелина Сергеевна — студент каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: gordeeva\_angelina@mail.ru

Gordeeva Angelina Sergeevna — student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

КА—моделирование потоков жидкости составляет собственное направление в газовой динамике, которое получило название Gas—Lattice [3, 4], что на русский язык переводится как “решеточный газ”. Это направление объединяет целую группу моделей, в основе которой лежит понятие классического КА. Принципы построения клеточно-автоматных моделей исходят из общих законов физики, действующих в некотором “дискретном мире”, стилизованном под молекулярную динамику. Газ представлен некоторыми гипотетическими частицами, движущимися в свободном пространстве и сталкивающимися друг с другом. Главное условие, которому должна удовлетворять функция переходов: обеспечение выполнения законов сохранения массы и импульса. Кроме этого, на КА—модель газовой динамики накладывается требование обеспечения изотропии процесса. В теории КА газовой динамики условия изотропии определяются как тензоры отображения дискретного пространства КА в декартову решетку.

Первая КА—модель газовой динамики получила название “НРР—газ” по первым буквам ее трех авторов (Hardy, Pazzis, Peaumeau) [5]. НРР—газ очень простая модель, удовлетворяющая требованиям сохранения массы и импульса, поскольку суммарная масса и скорости не изменяются функциями переходов. Условие изотропии удовлетворяется для тензоров до третьего ранга. Недостатком модели является тот факт, что она имеет “лишние” законы сохранения — суммарная масса и импульс сохраняются вдоль каждой оси пространства по отдельности. Именно этот недостаток является причиной того, что НРР—газ не получил распространения как модель потока жидкости.

Поиск КА—моделей, удовлетворяющих всем условиям изотропии, привел к появлению КА с гексагональной структурой клеточного пространства, который получил название ГНР—модели (по именам авторов Frish, Hasslacher, Pomeau) [6]. Гексагональная структура клеточного массива определяет число соседей каждой клетки, равное 6. Вычислительные эксперименты над ГНР—моделью показали очень близкое сходство с результатами решения уравнения Навье—Стокса при числах Рейнольдса  $Re < 100$ . Важнейшим научным результатом исследования этой модели стало строгое доказательство того, что она аппроксимирует уравнение Навье—Стокса со вторым порядком точности.

В настоящее время известно и изучено достаточно много КА, эволюция которых имитирует простые физические, химические, биологические и др. явления. Однако обычно возникают задачи моделирования сложных процессов, состоящих из нескольких более простых. При этом составные части сложного явления могут быть заданы различными КА.

У нас именно такой тип задачи. Имеется клеточно—автоматная модель движения воздушного потока. Если поместить в этот поток крыло,

то в модели необходимо учитывать его влияние. Возникает задача “сложения” двух процессов.

Частицы воздуха представлены однородной структурой со входами, они видят крыло и меняют свои законы движения рядом с ним. В свою очередь, крыло функционирует как единый автомат, который отличается от клеточных автоматов, помещенных в каждый узел решетки однородной структуры, и играет роль вычислителя. Крыло вырабатывает входы для остальных автоматов, производя расчёт по специальным формулам, поскольку мы хотим получить упрощенную модель, которая отражает только главные аспекты поднятия крыла. Работа посвящена моделированию такого процесса и изучению его свойств.

Автором не было найдено опубликованных работ по клеточно-автоматному моделированию аэродинамики крыла. Однако существует множество работ по численному моделированию обтекания крыла, например [8, 7, 9].

Автор выражает благодарность профессору Э.Э. Гасанову за постановку задачи и помощь в работе.

## 2. Основные понятия и формулировка результата

Введем основные определения: однородная структура со входами, подъемная сила.

*Однородная структура со входами (сокращенно ОСВ)*  $A$  определяется как набор  $(\mathbb{Z}^k, W, V)$ , где  $\mathbb{Z}^k$  — множество  $k$ -мерных векторов с целыми координатами, задающие узлы  $k$ -мерной целочисленной решетки;  $W$  — конечный автомат, помещенный в каждый узел решетки, у которого  $n$  входных каналов,  $l$  состояний, при этом в момент времени  $t+1$  состояние автомата полагается равным:

$$s(t+1) = \varphi(x(t), s(t)), \quad \varphi : (E_m)^n \times S \rightarrow S \quad (1)$$

(здесь  $E_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ ,  $S$  — множество состояний автомата  $W$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $s$  — вход и состояние автомата  $W$ );  $V = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ , где  $\alpha_i \in \mathbb{Z}^k$ ,  $i = \overline{1, p}$  — шаблон соседства: каждый вектор  $\alpha_i \in V$  для автомата с координатами  $\alpha$  определяет автомат с координатами  $\alpha + \alpha_i$ .

Автомат  $W$  называем *порождающим ОСВ автоматом*; функцию  $\varphi$  — *локальной функцией переходов*. Векторы из  $\mathbb{Z}^k$  с целочисленными координатами называем *узлами*, а узлы с помещенными в них автоматами — *ячейками ОСВВ*. Автомат  $W$ , помещенный в узел  $\alpha$ , будет обозначать через  $W^\alpha$ .

Функционирование ОСВ происходит в дискретные моменты времени  $t = 1, 2, 3, \dots$ . Для формального описания глобального функциониро-

вания ОСВ  $A = (\mathbb{Z}^k, W, V)$  введем следующие определения. *Пространством входов*  $B(X)$  ОСВ  $A$  называем множество функций следующего вида  $X : N \times \mathbb{Z}^k \rightarrow (E_m)^n$ , при этом  $X_t(\alpha)$  означает вход ячейки  $\alpha$  в момент времени  $t$ . *Пространством состояний*  $B(\Sigma)$  ОСВ  $A$  называем множество функций  $\Sigma : N \times \mathbb{Z}^k \rightarrow S$ .

Пусть  $\Sigma_1 = f$  — начальное состояние ОСВ  $A$ . Тогда функционирование однородной структуры со входами определяется в соответствии с (1) рекуррентными соотношениями:

$$\begin{cases} \Sigma_1 = f, \\ \Sigma_{t+1}(\alpha) = \varphi(X_t(\alpha), \Sigma_t(\alpha), \Sigma_t(\alpha + \alpha_1), \dots, \Sigma_t(\alpha + \alpha_p)), \end{cases} \quad (2)$$

где  $X$  и  $\Sigma$  — вход и состояние ОСВ.

Система (2) определяет глобальное тактовое функционирование ОСВ:

$$\begin{cases} \Sigma_1 = f, \\ \Sigma_{t+1} = \Phi(X_t, \Sigma_t), \end{cases}$$

где  $\Phi$  — функция переходов ОСВ.

Как правило, на функционирование ОСВ накладывают ограничения: для некоторого выделенного состояния  $s_0 \in S$  локальная функция переходов удовлетворяет условию  $\varphi(0, s_0) = s_0$ ; начальные состояния ОСВ рассматриваются только такие, для которых лишь конечное число ячеек находятся в состояниях, отличных от состояния  $s_0$  (выделенное состояние  $s_0$  есть состояние покоя).

*Подъёмная сила* — составляющая полной аэродинамической силы, перпендикулярная вектору скорости движения тела в потоке жидкости или газа, возникающая в результате несимметричности обтекания тела потоком.

*Полная аэродинамическая сила* — это интеграл от давления вокруг контура профиля крыла. Справедлива формула

$$F + P = \oint_{\partial\Omega} p n d\Omega,$$

где  $F$  — подъёмная сила,  $P$  — тяга,  $\partial\Omega$  — граница профиля,  $p$  — величина давления,  $n$  — нормаль к профилю.

*Величина подъёмной силы* определяется по формуле:

$$F = \frac{1}{2} c_y \rho v^2 S,$$

где  $F$  — подъёмная сила,  $c_y$  — коэффициент подъёмной силы, зависящий от угла атаки,  $\rho$  — плотность воздуха на высоте полёта ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ),  $v$  — скорость набегающего потока ( $\text{m}/\text{s}$ ),  $S$  — площадь проекции крыла на горизонтальную плоскость ( $\text{m}^2$ ).

*Закон Бернулли* утверждает, что

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + p = const,$$

где  $\rho$  — плотность,  $v$  — скорость потока,  $h$  — высота,  $p$  — давление,  $g$  — ускорение свободного падения.

Рассмотрим процесс образования подъемной силы крыла. Профиль крыла делит поток воздуха на две части, которые объединяются за задней кромкой профиля. Верхняя часть профиля более выпуклая, чем нижняя. Поэтому, частицы воздуха, обтекающие верхнюю и нижнюю поверхности, проделывают различный путь. Над верхней поверхностью молекулы воздуха движутся быстрее и располагаются реже, чем внизу. Возникает разрежение (закон Бернулли гласит, что с увеличением скорости потока уменьшается его давление). Разница давлений между верхней и нижней поверхностями крыла приводит к появлению подъемной силы, толкающей крыло вверх. Величина подъемной силы сильно зависит от угла, под которым набегающий поток “ударяется” в крыло. Угол между набегающим потоком и хордой профиля называется углом атаки. При увеличении угла атаки, точка деления потока воздуха смещается на нижнюю поверхность профиля. Путь частиц по верхней поверхности увеличивается. Из-за этого возрастает разница давлений и увеличивается подъемная сила. Подобный рост подъемной силы возможен, пока угол атаки не достиг критического значения.

Далее сформулируем основные результаты данной работы:

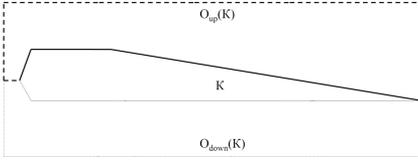
**Теорема 1.** Пусть задан контур крыла с углом атаки  $\alpha$  следующим образом:  $\{(l_1^{up}, \alpha_1), \dots, (l_p^{up}, \alpha_p), \dots, (l_1^{down}, \beta_1), \dots, (l_q^{down}, \beta_q)\}$ , где  $l_i^{up}, i = \overline{1, p}$  — длина  $i$ -го отрезка верхнего контура крыла,  $\alpha_i, i = \overline{1, p}$  — угол между  $i$ -ым отрезком верхнего контура крыла и горизонталью,  $l_i^{down}, i = \overline{1, q}$  — длина  $i$ -го отрезка нижнего контура крыла,  $\beta_i, i = \overline{1, q}$  — угол между  $i$ -ым отрезком нижнего контура крыла и горизонталью. Пусть  $v_0 = \sqrt{\frac{2mg}{L(A^2 - B^2)}}$ , при условии, что  $A > B$ , где

$$A = \frac{A_1}{A_2}, A_1 = \sum_{i=1}^{p_m} \left( \sum_{j=1}^{i-1} l_j^{up} \cdot \sin \alpha_j + \frac{1}{2} \cdot l_i^{up} \cdot \sin \alpha_i \right) \cdot l_i^{up} +$$

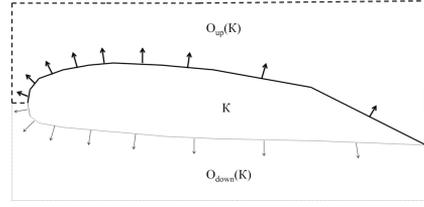
$$+ \sum_{i=p_m+1}^p \left( \sum_{j=1}^{p_m} l_j^{up} \cdot \sin \alpha_j \right) \cdot l_i^{up},$$

$$A_2 = \sum_{i=1}^{p_m} \left( \sum_{j=1}^{i-1} l_j^{up} \cdot \sin \alpha_j + \frac{1}{2} \cdot l_i^{up} \cdot \sin \alpha_i \right) \cdot l_i^{up} \cos \alpha_i +$$

$$+ \sum_{i=p_m+1}^p \left( \sum_{j=1}^{p_m} l_j^{up} \cdot \sin \alpha_j \right) \cdot l_i^{up} \cos \alpha_i,$$



(a) Упрощенный контур крыла



(b) Контур крыла

Рис. 1.

$$B = \frac{B_1}{B_2}, B_1 = \sum_{i=1}^q \left( \sum_{j=1}^{i-1} l_j^{down} \cdot \sin \beta_j + \frac{1}{2} \cdot l_i^{down} \cdot \sin \beta_i \right) \cdot l_i^{down},$$

$$B_2 = \sum_{i=1}^q \left( \sum_{j=1}^{i-1} l_j^{down} \cdot \sin \beta_j + \frac{1}{2} \cdot l_i^{down} \cdot \sin \beta_i \right) \cdot l_i^{down} \cos \beta_i,$$

$m$  — масса крыла,  $g$  — ускорение свободного падения,  $L = L(\alpha)$  — длина крыла по оси  $Ox$ ,  $p_m = p_m(\alpha)$  — номер определяющего отрезка верхнего контура крыла, а нижний контур крыла определяющего отрезка не имеет. Тогда при  $v_x > v_0$  крыло поднимается, иначе — падает.

Рассмотрим упрощенный контур крыла, изображенный на Рис. 1(а). Верхний контур состоит из трех отрезков, нижний — из двух.

**Теорема 2.** Пусть задан упрощенный контур крыла следующим образом:  $\{(l_1^{up}, \alpha_1), (l_2^{up}, \alpha_2), (l_3^{up}, \alpha_3), (l_1^{down}, \beta_1), (l_2^{down}, \beta_2)\}$ , для которого выполняется неравенство  $l^{up} > l^{down}$ , где  $l^{up} = l_1^{up} + l_2^{up} + l_3^{up}$ ,  $l^{down} = l_1^{down} + l_2^{down}$ . Положим  $\tilde{v} = (L + l_2^{down}) \sqrt{\frac{2mg}{L(A^2 - B^2)}}$ , где  $A = l^{up} + l_2^{up} + l_3^{up}$ ,  $B = l^{down} + l_2^{down}$ ,  $m$  — масса крыла,  $g$  — ускорение свободного падения,  $L$  — длина крыла по оси  $Ox$ . Тогда при  $v_x > \tilde{v}$  крыло поднимается, иначе — падает.

### 3. Моделирование воздушного потока

Приступим к описанию конкретной однородной структуры  $(\mathbb{Z}^2, W, V)$  с одним входом, с помощью которой мы будем моделировать движение воздушного потока. На вход автомата  $W$  поступает число от 0 до 12, которое вырабатывает автомат-крыло. Подробно этот процесс будет описан ниже. В данном разделе предполагается, что ось  $Ox$  направлена слева направо, а ось  $Oy$  сверху вниз.

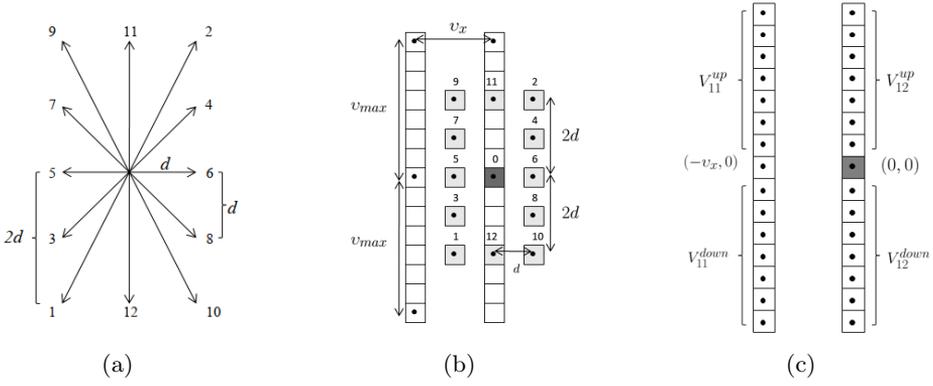


Рис. 2.

Частицы воздуха движутся с постоянной горизонтальной скоростью  $v_x$ , однако при обтекании крыла возникает скорость по оси  $Oy$ , причем  $|v_y| \leq v_{max}$ ,  $v_{max} \in \mathbb{Z}_+$ ,  $v_{max} = w + 1$ , где  $w$  — целая часть сверху максимальной ширины крыла по оси  $Oy$ . Параметр  $d$  выбран так, что  $d < v_x$  и  $2d < v_{max}$ .

Введем множество векторов  $V_0 = \{v_0 = (0, 0), v_1 = (-d, 2d), v_2 = (d, -2d), v_3 = (-d, d), v_4 = (d, -d), v_5 = (-d, 0), v_6 = (d, 0), v_7 = (-d, -d), v_8 = (d, d), v_9 = (-d, -2d), v_{10} = (d, 2d), v_{11} = (0, -2d), v_{12} = (0, 2d)\}$ , изображенных на Рис. 2(a).

Определим шаблона соседства  $V$  автомата  $W^\alpha$ . Удобно взять шаблон, представленный на Рис. 2(b), состоящий из  $p = 4v_{max} + 12$  векторов с целыми координатами. Разделим шаблон соседства  $V$  на два пересекающихся шаблона  $V_0$  и  $V_1$ , где  $V_1 = V_{11}^{up} \cup V_{12}^{up} \cup V_{11}^{down} \cup V_{12}^{down} \cup \{(-v_x, 0)\}$ ,  $V_{11}^{up} = \{(-v_x, -1), \dots, (-v_x, -v_{max})\}$ ,  $V_{12}^{up} = \{(0, -1), \dots, (0, -v_{max})\}$ ,  $V_{11}^{down} = \{(-v_x, 1), \dots, (-v_x, v_{max})\}$ ,  $V_{12}^{down} = \{(0, 1), \dots, (0, v_{max})\}$ . Шаблон  $V_1$  изображен на Рис. 2(c).

Противоположным вектором к  $(x, y)$  будет называть вектор  $(-x, -y)$ . Векторы из  $V_0$  занумерованы так, что противоположными будут векторы  $v_{2k+1}$  и  $v_{2k+2}$ ,  $k = \overline{0, 5}$ .

Приступим к описанию множества состояний  $S$  автомата  $W^\alpha$ . Состояние автомата  $W^\alpha$  — это тройка  $q^\alpha(t) = (q_0^\alpha(t), q_1^\alpha(t), q_2^\alpha(t))$ ,  $q_i^\alpha \in \{0, 1\}$ ,  $i = 0, 1, 2$ , где  $q_0^\alpha(t)$  показывает активность в момент времени  $t$  (отсутствие ( $q_0^\alpha = 0$ ) или наличие ( $q_0^\alpha = 1$ ) в узле  $\alpha$  частицы воздуха),  $q_1^\alpha(t)$  — индикатор того, что ячейка находится внутри крыла в момент времени  $t$  ( $q_1^\alpha = 0$  — вне крыла,  $q_1^\alpha = 1$  — в крыле), а  $q_2^\alpha(t)$  указывает на тип движения в момент времени  $t$  (движение горизонтальное с постоянной скоростью  $v_x$  ( $q_2^\alpha = 0$ ) или происходит обтекание крыла ( $q_2^\alpha = 1$ )). Отметим, что не все комбинации  $q_i^\alpha$ ,  $i = 0, 1, 2$  нам подходят, а только  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$ , т.к. не может быть, что авто-

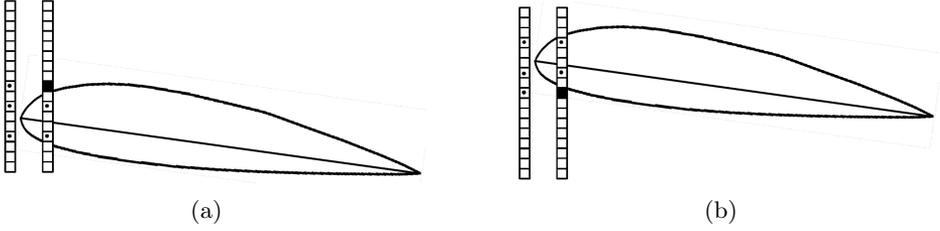


Рис. 3.

мат не активен, но обтекает крыло  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$ , а также активный автомат не может находиться в крыле  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 1)$ . Таким образом,  $S = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ ,  $s_0 = (0, 0, 0)$  — состояние покоя.

Следующий шаг — описание функции переходов для автомата  $W^\alpha$ .

*Определение местоположения.* Пусть на вход в момент времени  $t$  поступает число  $x(t) = b$ ,  $b \in E_{13}$ , которое определяет вектор сдвига крыла  $v_b$ . Тогда

$$q_1^\alpha(t+1) = \begin{cases} q_1^\alpha(t), & \text{если } b = 0; \\ q_1^{\alpha+v_{b+1}}(t), & \text{если } b \text{ — нечетное}; \\ q_1^{\alpha+v_{b-1}}(t), & \text{если } b \text{ — четное}. \end{cases}$$

Если  $q_1^\alpha(t+1) = 1$ , т.е. автомат  $W^\alpha$  в следующий момент времени будет находиться в крыле, тогда  $q_0^\alpha(t+1) = q_2^\alpha(t+1) = 0$ , так как среди возможных состояний существует только одно с  $q_1^\alpha(t+1) = 1$ .

*Определение активности и типа движения.* Будем определять  $q_0^\alpha(t+1)$  и  $q_2^\alpha(t+1)$  при условии, что  $q_1^\alpha(t+1) = 0$ .

- 1) Существуют векторы  $\alpha_i = (0, i)$ ,  $i = \overline{1, j}$ ,  $1 < j < v_{max}$ , т.ч.  $\alpha_i \in V_{12}^{down}$ , указывающие на автоматы, которые находятся в крыле в момент времени  $t$ . Векторы из  $V_{11}^{down}$  указывают на автоматы, находящиеся вне крыла в момент времени  $t$ . Ситуация представлена на Рис. 3(а)
  - а) Среди автоматов, на которые указывают векторы  $(-v_x, i) \in V_{11}^{down}$ , существует активный. Пусть таким является автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, k)$ ,  $k \in [1, v_{max}]$ . Шаблон соседства  $V_1$  выбран так, что в данном случае существует вектор из  $V_{12}^{down}$  с минимальной координатой по оси  $Oy$ , т.ч. автомат, на который этот вектор указывает, находится вне крыла в момент времени  $t$ . Пусть этот вектор имеет координаты  $(0, m)$ , где  $k < m \leq v_{max}$ .
    - Если  $k \leq m - k$ , т.е. расстояние до верхней границы крыла меньше или равно расстоянию до нижней границы, то автомат  $W^\alpha$  в следующий момент времени будет находиться

- в состоянии  $q^\alpha(t+1) = (1, 0, 1)$  (в этом случае начинается обтекание по верхней границе).
- Если  $k > m - k$ , т.е. расстояние до верхней границы крыла больше, чем расстояние до нижней границы. В этом случае автомат  $W^\alpha$  в следующий момент времени будет находиться в том состоянии, в котором автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, 0)$ , находился в момент времени  $t$ .
- б) Среди автоматов, на которые указывают векторы  $(-v_x, i) \in V_{11}^{down}$ , не существует активных. В этом случае автомат  $W^\alpha$  в следующий момент времени будет находиться в том состоянии, в котором автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, 0)$ , находился в момент времени  $t$ .
- 2) Существуют векторы  $\alpha_i = (0, -i)$ ,  $i = \overline{1, j}$ ,  $1 < j < v_{max}$ , т.ч.  $\alpha_i \in V_{12}^{up}$ , указывающие на автоматы, которые находятся в крыле в момент времени  $t$ . Векторы из  $V_{11}^{up}$  указывают на автоматы, находящиеся вне крыла в момент времени  $t$ . Ситуация представлена на Рис. 3(б).
- а) Среди автоматов, на которые указывают векторы  $(-v_x, -i) \in V_{11}^{up}$ , существует активный. Пусть таким является автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, -k)$ ,  $k \in [1, v_{max})$ . Шаблон соседства  $V_1$  выбран так, что в данном случае существует вектор из  $V_{12}^{up}$  с максимальной координатой по оси  $Oy$ , т.ч. автомат, на который этот вектор указывает, находится вне крыла в момент времени  $t$ . Пусть этот вектор имеет координаты  $(0, -m)$ , где  $k < m \leq v_{max}$ .
- Если  $k < m - k$ , т.е. расстояние до нижней границы крыла меньше расстояния до верхней границы, то автомат  $W^\alpha$  в следующий момент времени будет находиться в состоянии  $q^\alpha(t+1) = (1, 0, 1)$  (в этом случае начинается обтекание по нижней границе).
  - Если  $k \geq m - k$ , т.е. расстояние до нижней границы крыла больше или равно расстоянию до верхней границы. В этом случае автомат  $W^\alpha$  в следующий момент времени будет находиться в том состоянии, в котором автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, 0)$ , находился в момент времени  $t$ .
- б) Среди автоматов, на которые указывают векторы  $(-v_x, -i) \in V_{11}^{up}$ , не существует активных. В этом случае автомат  $W^\alpha$  в следующий момент времени будет находиться в том состоянии, в

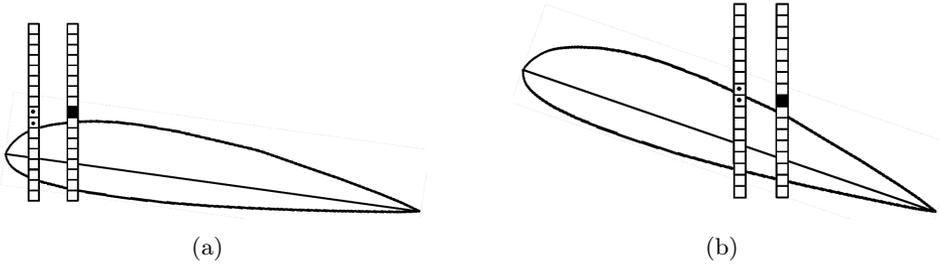


Рис. 4.

котором автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, 0)$ , находился в момент времени  $t$ .

3) Автомат, на который указывает вектор  $(0, 1) \in V_{11}^{down}$ , находится в крыле, а автоматы, на которые указывают векторы  $(-v_x, 0)$  и  $(-v_x, 1) \in V_{11}^{down}$ , находятся вне крыла. Ситуация представлена на Рис. 4(a).

а) Автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, 1)$  из  $V_{11}^{down}$ , не активен в момент времени  $t$ , т.е.  $q_0(t) = 0$ . В этом случае автомат  $W^\alpha$  в следующий момент времени будет находиться в том состоянии, в котором автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, 0)$ , находился в момент времени  $t$ .

б) Автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, 1)$  из  $V_{11}^{down}$ , активен в момент времени  $t$ , т.е.  $q_0(t) = 1$ . В этом случае автомат  $W^\alpha$  в следующий момент времени будет находиться в состоянии  $q^\alpha(t+1) = (1, 0, 1)$ .

4) Автоматы, на которые указывают векторы  $(0, 1) \in V_{12}^{down}$  и  $(-v_x, 0)$ , находятся в крыле. А автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, -1) \in V_{11}^{up}$ , находится вне крыла. Ситуация представлена на Рис. 4(b).

а) Автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, -1)$  из  $V_{11}^{up}$ , находится в состоянии  $(1, 0, 1)$  в момент времени  $t$  (т.е. обтекает крыло). В этом случае автомат  $W^\alpha$  в следующий момент времени будет находиться в состоянии  $q^\alpha(t+1) = (1, 0, 1)$ .

б) Автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, -1)$  из  $V_{11}^{up}$ , не обтекает крыло, т.е.  $q_2(t) = 0$ . В этом случае автомат  $W$  в следующий момент времени будет находиться в состоянии  $q^\alpha(t+1) = (0, 0, 0)$ .

5) Автоматы, на которые указывают векторы  $(-v_x, -1) \in V_{11}^{up}$  и  $(-v_x, 0)$ , находятся вне крыле. А автомат, на который указывает

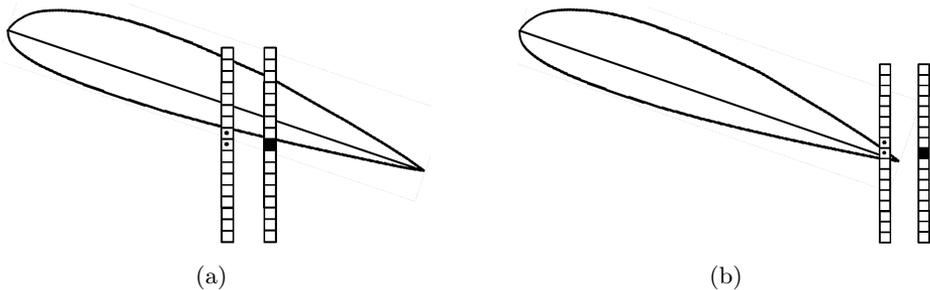


Рис. 5.

вектор  $(0, -1) \in V_{12}^{up}$ , находится в крыле. Ситуация представлена на Рис. 5(a).

- а) Автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, -1)$  из  $V_{11}^{up}$ , активен в момент времени  $t$ . В этом случае автомат  $W^\alpha$  в следующий момент времени будет находиться в состоянии  $q^\alpha(t+1) = (1, 0, 1)$ .
  - б) Автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, -1)$  из  $V_{11}^{up}$ , не активен. В этом случае автомат  $W^\alpha$  в следующий момент времени будет находиться в том состоянии, в котором автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, 0)$ , находился в момент времени  $t$ .
- 6) Автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, 0)$ , находятся в крыле. А автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, -1) \in V_{11}^{up}$ , находится вне крыла. Ситуация представлена на Рис. 5(b).
- а) Автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, -1) \in V_{11}^{up}$ , находится в состоянии  $(1, 0, 1)$  в момент времени  $t$  (т.е. обтекает крыло). В этом случае автомат  $W^\alpha$  в следующий момент времени будет находиться в состоянии  $q^\alpha(t+1) = (1, 0, 0)$  (обтекание закончилось).
  - б) Автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, -1)$  из  $V_{11}^{up}$ , не обтекает крыло. В этом случае автомат  $W^\alpha$  в следующий момент времени будет находиться в состоянии  $q^\alpha(t+1) = (0, 0, 0)$ .
- 7) Автоматы, на которые указывают векторы  $(-v_x, -1) \in V_{11}^{up}$ ,  $(-v_x, 0)$ ,  $(0, -1) \in V_{12}^{up}$  и  $(0, 1) \in V_{12}^{down}$ , находятся вне крыла. При этом вектор  $(-v_x, -2) \in V_{11}^{up}$  указывает на автомат, который находится в крыле. Ситуация представлена на Рис. 6(a).

- а) Автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, -1)$  из  $V_{11}^{up}$ , находится в состоянии  $(1, 0, 1)$  в момент времени  $t$  (т.е. обтекает

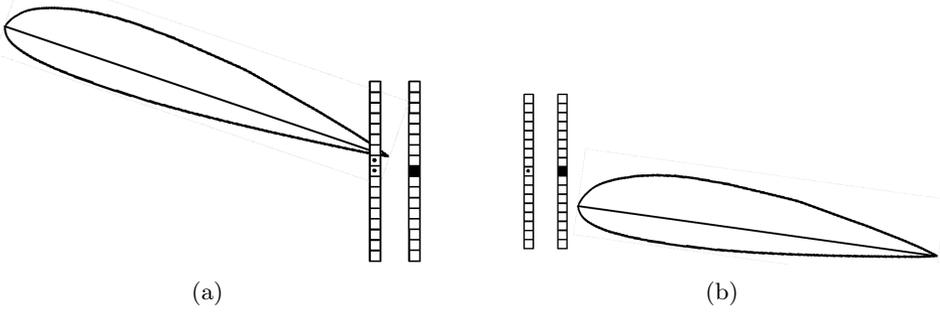


Рис. 6.

крыло). В этом случае автомат  $W^\alpha$  в следующий момент времени будет находиться в состоянии  $q^\alpha(t+1) = (1, 0, 0)$  (обтекание закончилось).

- б) Автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, -1)$  из  $V_{11}^{up}$ , обтекает крыло. В этом случае автомат  $W^\alpha$  в следующий момент времени будет находиться в том состоянии, в котором автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, 0)$ , находился в момент времени  $t$ .
- 8) Случай отличается от рассмотренных выше. Векторы  $(0, -1) \in V_{12}^{up}$  и  $(0, 1) \in V_{12}^{down}$  указывают на автоматы, находящиеся вне крыла в момент времени  $t$ . В частности, все векторы из  $V_1$  могут указывать на автоматы, находящиеся вне крыла в момент времени  $t$ . Движение прямолинейное. Автомат  $W^\alpha$  в следующий момент времени будет находиться в том состоянии, в котором автомат, на который указывает вектор  $(-v_x, 0)$ , находился в момент времени  $t$ . Ситуация представлена на Рис. 6(b).

Мы разобрали все возможные случаи, тем самым определили функцию переходов. В свою очередь, этот шаг завершает описание однородной структуры с одним входом, моделирующей движение воздушного потока.

#### 4. Автомат-вычислитель, моделирующий крыло

Контур крыла разделен на две части: верхний и нижний. Верхний контур состоит из  $p$  отрезков, нижний — из  $q$  отрезков,  $p, q \in \mathbb{Z}$ . Направления нормалей к отрезкам, составляющим контур крыла, выбраны так, как показано на Рис. 1(b). В данном разделе предполагается, что ось  $Ox$  направлена слева направо, а ось  $Oy$  сверху вниз.

Крыло функционирует как вычислитель, вырабатывающий входы для ОСВ. Расчет производится на основе только тех автоматов, которые

находятся в его окрестности  $O(K) = O_{up}(K) \cup O_{down}(K)$ . Окрестность  $O(K)$  также изображена на Рис. 1(b).

Сконструируем функцию, определяющую поведение автомата с координатами  $(x, y)$ . Эту функцию проще всего записать в виде алгоритма с начальными данными:  $step = 1$  (первый шаг), сила не действует  $F_r = (f_x, f_y) = (0, 0)$ . Будем считать, что мы находимся на шаге с номером  $step$ ,  $1 < step < T, T \in \mathbb{Z}$  – параметр моделирования.

*Шаг 1.* Считаем количество активных автоматов, находящихся в  $O_{up}(K)$  и  $O_{down}(K)$ .

*Шаг 2.* Считаем средние скорости частиц  $v^{up}$  и  $v^{down}$ , находящихся в  $O_{up}(K)$  и  $O_{down}(K)$ , причем скорость каждой частицы вычисляется по формуле:  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ , где  $v_x$  – скорость по оси  $Ox$ ,  $v_y$  – скорость по оси  $Oy$ .

*Шаг 3.* Считаем коэффициенты сил, которые действуют на отрезки верхнего и нижнего контуров крыла по формулам:

$$F_i^{up} = \frac{1}{2} (v^{up})^2 l_i^{up}, i = \overline{1, p}, \quad F_i^{down} = \frac{1}{2} (v^{down})^2 l_i^{down}, i = \overline{1, q},$$

где  $l_i^{up}, i = \overline{1, p}$  – длина  $i$ -го отрезка верхнего контура,  $p$  – число отрезков, составляющих верхний контур крыла,  $l_i^{down}, i = \overline{1, q}$  – длина  $i$ -го отрезка нижнего контура,  $q$  – число отрезков, составляющих нижний контур крыла.

*Шаг 4.* Определим вектор результирующей силы  $F_r^{(step)} = (f_x^{(step)}, f_y^{(step)})$  на текущем шаге с номером  $step$ , компоненты которого находим по формулам:

$$f_x^{(step)} = \sum_{i=1}^p F_i^{up} \cdot (n^{up})_x^i + \sum_{i=1}^q F_i^{down} \cdot (n^{down})_x^i,$$

$$f_y^{(step)} = \sum_{i=1}^p F_i^{up} \cdot (n^{up})_y^i + \sum_{i=1}^q F_i^{down} \cdot (n^{down})_y^i,$$

где  $n^i = \left( \frac{n_x^i}{\sqrt{(n_x^i)^2 + (n_y^i)^2}}, \frac{n_y^i}{\sqrt{(n_x^i)^2 + (n_y^i)^2}} \right)$  – единичная нормаль к отрезку контура крыла с номером  $i$ .

*Шаг 5.* Если  $step \neq T$ , то переходим к *Шагу 1*. Коэффициент  $step$  увеличиваем на 1. Крыло выдает число  $w = 0$ . Если  $step = T$ , то находим усредненный вектор результирующей силы  $F_r = (f_x, f_y)$ , компоненты которого вычисляются по следующим формулам:

$$f_x = \frac{1}{step} \sum_{j=1}^{step} f_x^{(j)}, \quad f_y = \frac{1}{step} \sum_{j=1}^{step} f_y^{(j)}.$$

*Шаг 6.* Учитываем силу тяжести, направленную по оси  $Oy$ , и силу тяги, направленную по оси  $Ox$ , следующим образом:  $f_x^- = c_1, f_y^+ = c_2$ , где  $c_1, c_2$  — заданные константы моделирования.

*Шаг 7.* Крыло выдает число  $w \in E_{13}$ , определяемое по вектору  $F_r = (f_x, f_y)$  следующим образом:

$$w = \begin{cases} 1, & \text{если } f_x < 0, f_y > 0, \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \left| \frac{f_y}{f_x} \right| \leq \sqrt{3}; \\ 2, & \text{если } f_x > 0, f_y < 0, \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \left| \frac{f_y}{f_x} \right| \leq \sqrt{3}; \\ 3, & \text{если } f_x < 0, f_y > 0, 0 < \left| \frac{f_y}{f_x} \right| < \frac{\sqrt{3}}{3}; \\ 4, & \text{если } f_x > 0, f_y < 0, 0 < \left| \frac{f_y}{f_x} \right| < \frac{\sqrt{3}}{3}; \\ 5, & \text{если } f_x < 0, f_y = 0; \\ 6, & \text{если } f_x > 0, f_y = 0; \\ 7, & \text{если } f_x < 0, f_y < 0, 0 < \frac{f_y}{f_x} < \frac{\sqrt{3}}{3}; \\ 8, & \text{если } f_x > 0, f_y > 0, 0 < \frac{f_y}{f_x} < \frac{\sqrt{3}}{3}; \\ 9, & \text{если } f_x < 0, f_y < 0, \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{f_y}{f_x} \leq \sqrt{3}; \\ 10, & \text{если } f_x > 0, f_y > 0, \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{f_y}{f_x} \leq \sqrt{3}; \\ 11, & \text{если } f_y < 0, \left| \frac{f_y}{f_x} \right| > \sqrt{3}; \\ 12, & \text{если } f_y > 0, \left| \frac{f_y}{f_x} \right| > \sqrt{3}. \end{cases}$$

*Шаг 8.* Устанавливаем  $step = 1$ . Переходим к Шагу 1.

## 5. Вспомогательное вычисление

Для доказательства основных утверждений нам нужно знать количество частиц, движущихся с определенной скоростью. Через  $k_i$  обозначим число частиц, скорость которых равна  $v_i = \frac{v_x}{\cos \alpha_i}$ , где  $v_x$  — скорость частиц по оси  $Ox$ ,  $\alpha_i$  — угол между  $i$ -ым отрезком контура крыла и горизонталью. На Рис. 7 изображен фрагмент профиля крыла, для которого и произведем вычисления.

Поскольку поток набегает на крыло слева направо, при вычислении  $k_i$  нам понадобится интенсивность появления частиц в точке на левой границе, обозначим её через  $\lambda$ . Пусть  $t_i$  — время прохождения расстояния  $l_i \cos \alpha_i$ .

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $T_1$ , гипотенуза которого равна  $l_1$  — длина первого отрезка контура крыла, а катеты —  $l_1 \cos \alpha_1$  и  $l_1 \sin \alpha_1$  соответственно. Ясно, что  $k_1$  равно произведению интенсивности на площадь треугольника, деленную на скорость по оси  $Ox$ , т.е.

$$\frac{\lambda \cdot \frac{1}{2} l_1 \sin \alpha_1 \cdot l_1 \cos \alpha_1}{v_x},$$

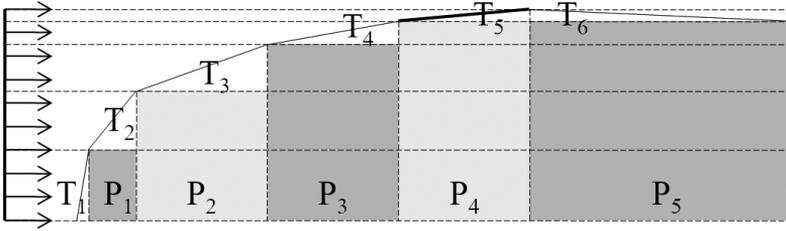


Рис. 7. Фрагмент профиля крыла.

что в общем виде можно записать так:  $k_1 = \lambda \cdot \widehat{h}_1 \cdot t_1$ , где  $\widehat{h}_1 = \frac{1}{2}l_1 \sin \alpha_1$  — “высота”, находясь на которой частицы будут двигаться со скоростью  $v_1$ ,  $t_1 = \frac{l_1 \cos \alpha_1}{v_x}$  — время прохождения расстояния  $l_1 \cos \alpha_1$ .

Далее рассмотрим трапецию, состоящую из прямоугольника  $P_1$  со сторонами  $l_2 \cos \alpha_2$  и  $l_1 \sin \alpha_1$  и прямоугольного треугольника  $T_2$ , гипотенуза которого равна  $l_2$ , а катеты —  $l_2 \cos \alpha_2$  и  $l_2 \sin \alpha_2$  соответственно. Ясно, что  $k_2$  равно произведению интенсивности на площадь трапеции, деленную на скорость по оси  $Ox$ , т.е.

$$\frac{\lambda \cdot \frac{1}{2}(2l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2) \cdot l_2 \cos \alpha_2}{v_x},$$

что в общем виде можно записать так:  $k_2 = \lambda \cdot \widehat{h}_2 \cdot t_2$ , где  $\widehat{h}_2 = l_1 \sin \alpha_1 + \frac{1}{2}l_2 \sin \alpha_2$  — “высота”,  $t_2 = \frac{l_2 \cos \alpha_2}{v_x}$  — время.

Аналогично определяются  $k_3$ ,  $k_4$  и  $k_5$ . Для количества частиц, движущихся со скоростью  $v_5$ , формула примет следующий вид:  $k_5 = \lambda \cdot \widehat{h}_5 \cdot t_5$ , где  $\widehat{h}_5 = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 + l_3 \sin \alpha_3 + l_4 \sin \alpha_4 + \frac{1}{2}l_5 \sin \alpha_5$  — “высота”,  $t_5 = \frac{l_5 \cos \alpha_5}{v_x}$  — время.

Заметим, что количество частиц  $k_6$  будет определяться высотой  $l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 + l_3 \sin \alpha_3 + l_4 \sin \alpha_4 + l_5 \sin \alpha_5$ , поскольку обтекание крыла продолжат только те частицы, которые уже его начали, новых частиц не появится. Поэтому  $\widehat{h}_6 = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 + l_3 \sin \alpha_3 + l_4 \sin \alpha_4 + l_5 \sin \alpha_5$ . Исходя из этих соображений,  $\widehat{h}_6 = \widehat{h}_i$ ,  $i = \overline{7, p}$ , где  $p$  — количество отрезков, составляющих контур крыла, для которого производится вычисление. Таким образом,  $k_i$ ,  $i = \overline{6, p}$  будут отличаться только временем прохождения пути  $l_i \cos \alpha_i$ . Учитывая эту особенность, в данном случае отрезок контура крыла с номером  $i = 5$  будем называть *определяющим отрезком*.

## 6. Доказательство основных утверждений

**Доказательство Теоремы 1.** Для того чтобы крыло поднималось, необходимо выполнение неравенства  $f_y - f_g > 0$ , где  $f_y$  — компонента вектора результирующей силы  $F_r = (f_x, f_y)$  по оси  $Oy$ , а  $f_g$  — сила тяжести.

$$\begin{aligned}
 f_y &= \sum_{i=1}^p F_i^{up} \cdot (n^{up})_y^i + \sum_{i=1}^q F_i^{down} \cdot (n^{down})_y^i = \\
 &= \frac{(v^{up})^2}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^p l_i^{up} \cdot (n^{up})_y^i}_{\text{длина крыла по } Ox} + \frac{(v^{down})^2}{2} \cdot (-1) \underbrace{\left( - \left( \sum_{i=1}^q l_i^{down} \cdot (n^{down})_y^i \right) \right)}_{\text{длина крыла по } Ox} = \\
 &= \frac{(v^{up})^2}{2} \cdot L + \frac{(v^{down})^2}{2} \cdot (-L) = \frac{L}{2} \cdot [(v^{up})^2 - (v^{down})^2],
 \end{aligned}$$

где  $L$  — длина крыла по оси  $Ox$ .

Таким образом, мы хотим показать, что

$$[(v^{up})^2 - (v^{down})^2] > \frac{2}{L} \cdot f_g \quad (3)$$

Через  $k_i^{up}$  обозначим количество частиц в  $O_{up}(K)$ , движущихся со скоростью  $v_i^{up} = \frac{v_x}{\cos \alpha_i}$ , где  $\alpha_i$  — угол между  $i$ -ым отрезком верхнего контура крыла и горизонталью. Аналогично определим  $k_i^{down}$  как количество частиц в  $O_{down}(K)$ , движущихся со скоростью  $v_i^{down} = \frac{v_x}{\cos \beta_i}$ , где  $\beta_i$  — угол между  $i$ -ым отрезком нижнего контура крыла и горизонталью.

Тогда

$$(v^{up})^2 - (v^{down})^2 = \left( \frac{\sum_i k_i^{up} \cdot v_i^{up}}{\sum_i k_i^{up}} \right)^2 - \left( \frac{\sum_i k_i^{down} \cdot v_i^{down}}{\sum_i k_i^{down}} \right)^2$$

Соответственно неравенство (3), которое мы хотим доказать, примет вид:

$$\left( \frac{\sum_i k_i^{up} \cdot v_i^{up}}{\sum_i k_i^{up}} \right)^2 - \left( \frac{\sum_i k_i^{down} \cdot v_i^{down}}{\sum_i k_i^{down}} \right)^2 > \frac{2}{L} \cdot f_g \quad (4)$$

Обозначим через  $\lambda$  — интенсивность появления частиц в точке на левой границе,  $t_i^{up}$  — время прохождения расстояния  $l_i^{up} \cos \alpha_i$ . Аналогичным образом определим  $t_i^{down}$ .

Применяя результат вспомогательного вычисления, найдем

$$\widehat{h}_i^{up} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{i-1} l_j^{up} \cdot \sin \alpha_j + \frac{1}{2} \cdot l_i^{up} \cdot \sin \alpha_i, & \text{если } i = \overline{1, p_m}; \\ \sum_{j=1}^{p_m} l_j^{up} \cdot \sin \alpha_j, & \text{если } i = \overline{p_m + 1, p}. \end{cases}$$

А так как нижний контур крыла не имеет определяющего отрезка, то

$$\widehat{h}_i^{down} = \sum_{j=1}^{i-1} l_j^{down} \cdot \sin \beta_j + \frac{1}{2} \cdot l_i^{down} \cdot \sin \beta_i, \quad \text{если } i = \overline{1, q}$$

С учетом введенных обозначений справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_i k_i^{up} \cdot v_i^{up}}{\sum_i k_i^{up}} &= \left[ k_i^{up} = \lambda \widehat{h}_i^{up} t_i^{up}; t_i^{up} = \frac{l_i^{up} \cos \alpha_i}{v_x}; v_i^{up} = \frac{v_x}{\cos \alpha_i} \right] = \\ &= v_x \left( \frac{\sum_i \widehat{h}_i^{up} \cdot l_i^{up}}{\sum_i \widehat{h}_i^{up} \cdot l_i^{up} \cdot \cos \alpha_i} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\sum_i k_i^{down} \cdot v_i^{down}}{\sum_i k_i^{down}} = v_x \left( \frac{\sum_i \widehat{h}_i^{down} \cdot l_i^{down}}{\sum_i \widehat{h}_i^{down} \cdot l_i^{down} \cdot \cos \beta_i} \right)$$

Неравенство (4) можно переписать следующим образом:

$$\left( \frac{\sum_i \widehat{h}_i^{up} \cdot l_i^{up}}{\sum_i \widehat{h}_i^{up} \cdot l_i^{up} \cdot \cos \alpha_i} \right)^2 - \left( \frac{\sum_i \widehat{h}_i^{down} \cdot l_i^{down}}{\sum_i \widehat{h}_i^{down} \cdot l_i^{down} \cdot \cos \beta_i} \right)^2 > \frac{2}{L} \cdot \frac{f_g}{(v_x)^2} \quad (5)$$

Заметим, что в левой части неравенства (5) стоит выражение  $A^2 - B^2$ , а по условию  $A > B$ , поэтому неравенство справедливо при  $v_x > v_0$ . Это означает, что  $f_y - f_g > 0$  при выполнении данного условия, т.е. крыло поднимается, в противном случае – крыло падает.

Теорема 1 доказана.

Теорема 1 гласит, что если контур крыла удовлетворяет условию  $A > B$ , то мы можем явно посчитать необходимую скорость для поднятия крыла. Однако по условию  $A > B$  нельзя представить контур, который ему удовлетворяет.

**Доказательство Теоремы 2.** В данном случае  $\widehat{h}_i^{up}, i = \overline{1, 3}$  и  $\widehat{h}_i^{down}, i = 1, 2$  определяются следующим образом:

$$\widehat{h}_i^{up} = \begin{cases} \frac{1}{2} h_1^{up} = \frac{1}{2} l_1^{up} \sin \alpha_1, & \text{если } i = 1; \\ h_1^{up} = l_1^{up} \sin \alpha_1, & \text{если } i = 2, 3. \end{cases}$$

$$\widehat{h_i^{down}} = \begin{cases} \frac{1}{2}h_1^{down} = \frac{1}{2}l_1^{down} \sin \beta_1, & \text{если } i = 1; \\ h_1^{down} = l_1^{down} \sin \beta_1, & \text{если } i = 2. \end{cases}$$

Мы хотим показать, что

$$\left( \frac{\sum_i \widehat{h_i^{up}} \cdot l_i^{up}}{\sum_i \widehat{h_i^{up}} \cdot l_i^{up} \cdot \cos \alpha_i} \right)^2 - \left( \frac{\sum_i \widehat{h_i^{down}} \cdot l_i^{down}}{\sum_i \widehat{h_i^{down}} \cdot l_i^{down} \cdot \cos \beta_i} \right)^2 > \frac{2}{L} \cdot \frac{f_g}{(v_x)^2}, \quad (6)$$

начиная с некоторого  $v_x > \tilde{v}$ .

Распишем числитель выражения, стоящего в первой скобке (6):

$$\begin{aligned} \sum_i \widehat{h_i^{up}} \cdot l_i^{up} &= \left( \frac{1}{2}l_1^{up} \sin \alpha_1 \right) \cdot l_1^{up} + (l_1^{up} \sin \alpha_1) \cdot (l_2^{up} + l_3^{up}) = \\ &= \frac{1}{2}l_1^{up} \sin \alpha_1 \cdot (l_1^{up} + 2l_2^{up} + 2l_3^{up}) \end{aligned}$$

Затем преобразуем знаменатель выражения, стоящего в первой скобке (6):

$$\sum_i \widehat{h_i^{up}} \cdot l_i^{up} \cdot \cos \alpha_i = \frac{1}{2}l_1^{up} \cdot \sin \alpha_1 \cdot (l_1^{up} \cdot \cos \alpha_1 + 2l_2^{up} + 2l_3^{up} \cdot \cos \alpha_3) \quad (7)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} l_1^{up} \cdot \cos \alpha_1 &= l_1^{down} \cdot \cos \beta_1 = L - l_2^{down}, \\ l_3^{up} \cdot \cos \alpha_3 &= l_2^{down} - l_2^{up}. \end{aligned}$$

Выражение (7) примет вид:

$$\begin{aligned} \sum_i \widehat{h_i^{up}} \cdot l_i^{up} \cdot \cos \alpha_i &= \frac{1}{2}l_1^{up} \cdot \sin \alpha_1 \cdot \left( (L - l_2^{down}) + 2l_2^{up} + 2(l_2^{down} - l_2^{up}) \right) = \\ &= \frac{1}{2}l_1^{up} \cdot \sin \alpha_1 \cdot (L + l_2^{down}) \end{aligned}$$

Таким образом, видим, что

$$\left( \frac{\sum_i \widehat{h_i^{up}} \cdot l_i^{up}}{\sum_i \widehat{h_i^{up}} \cdot l_i^{up} \cdot \cos \alpha_i} \right)^2 = \left( \frac{l_1^{up} + 2l_2^{up} + 2l_3^{up}}{L + l_2^{down}} \right)^2$$

Теперь преобразуем выражение, стоящее во второй скобке (6). Его числитель равен

$$\begin{aligned} \sum_i \widehat{h_i^{down}} \cdot l_i^{down} &= \left( \frac{1}{2}l_1^{down} \sin \beta_1 \right) \cdot l_1^{down} + (l_1^{down} \sin \beta_1) \cdot l_2^{down} = \\ &= \frac{1}{2}l_1^{down} \sin \beta_1 \cdot (l_1^{down} + 2l_2^{down}) \end{aligned}$$

а знаменатель —

$$\sum_i \widehat{h_i^{down}} \cdot l_i^{down} \cdot \cos \beta_i = \frac{1}{2} l_1^{down} \cdot \sin \beta_1 \cdot \left( l_1^{down} \cdot \cos \beta_1 + 2l_2^{down} \right) \quad (8)$$

Заметим, что  $l_1^{down} \cdot \cos \beta_1 = L - l_2^{down}$ . Тогда (8) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \sum_i \widehat{h_i^{down}} \cdot l_i^{down} \cdot \cos \beta_i &= \frac{1}{2} l_1^{down} \cdot \sin \beta_1 \cdot \left( (L - l_2^{down}) + 2l_2^{down} \right) = \\ &= \frac{1}{2} l_1^{down} \cdot \sin \beta_1 \cdot \left( L + l_2^{down} \right) \end{aligned}$$

Итого,

$$\left( \frac{\sum_i \widehat{h_i^{down}} \cdot l_i^{down}}{\sum_i \widehat{h_i^{down}} \cdot l_i^{down} \cdot \cos \beta_i} \right)^2 = \left( \frac{l_1^{down} + 2l_2^{down}}{L + l_2^{down}} \right)^2$$

Таким образом, неравенство (6), которое мы хотим доказать, свелось к:

$$\left( \frac{l_1^{up} + 2l_2^{up} + 2l_3^{up}}{L + l_2^{down}} \right)^2 - \left( \frac{l_1^{down} + 2l_2^{down}}{L + l_2^{down}} \right)^2 > \frac{2}{L} \cdot \frac{f_g}{(v_x)^2}, \quad (9)$$

начиная с некоторого  $v_x > \tilde{v}$ .

Обозначим левую часть неравенства (9) через  $r$ . Покажем, что  $r > 0$ , а затем найдем  $v_x$ , при которой неравенство (9) имеет место.

$$r = \frac{(l_1^{up} + l_2^{up} + l_3^{up})^2 - (l_1^{down} + l_2^{down})^2}{(L + l_2^{down})^2}$$

Поскольку  $(L + l_2^{down})^2 > 0$ , нужно проверить, что  $(l_1^{up} + l_2^{up} + l_3^{up})^2 - (l_1^{down} + l_2^{down})^2 > 0$ , т.е.

$$((l_1^{up} - l_1^{down}) + (l_2^{up} + l_3^{up} - l_2^{down})) \cdot \underbrace{(l_1^{up} + l_2^{up} + l_3^{up} + l_1^{down} + l_2^{down})}_{> 0} > 0$$

$$((l_1^{up} - l_1^{down}) + (l_2^{up} + l_3^{up} - l_2^{down})) > 0 \quad (10)$$

Учитывая особенности формы крыла, знак разности  $l^{up} - l^{down}$  совпадает со знаком  $l_2^{up} + l_3^{up} - l_2^{down}$ , поэтому неравенство (10) будет выполнено, так как  $l^{up} > l^{down}$ . Окончательно получаем, что неравенство (9) имеет место при  $v_x > \tilde{v} = \sqrt{\frac{2mg}{Lr}}$ ,  $r = \frac{A^2 - B^2}{(L + l_2^{down})^2}$ .

Теорема 2 доказана.

## 7. Совпадение результатов компьютерного моделирования и теоретического расчёта

Чтобы соотнести результат теоретического расчёта с тем, что получается при моделировании, нужно установить соответствие единиц измерения. Теоретический расчёт проводится в следующих единицах измерения: см (сантиметр) — единицы измерения длины, с (секунда) — единица измерения времени, kg (килограмм) — единица измерения массы. При моделировании использованы  $\widehat{cm}$ ,  $\widehat{c}$ ,  $\widehat{kg}$  — единицы измерения длины, времени, массы соответственно.

Положим, что  $\frac{kg}{kg} = 40$  или  $\widehat{kg} = 0,025 kg$ . Ширина экрана, на котором происходит моделирование, равна  $1200 \widehat{cm}$ , что соответствует 30 см. Таким образом,  $\widehat{cm} = 0,025 cm$ . Движение частиц происходит в моменты времени  $t = 1, 2, \dots$ . Если замерить время между этими моментами, то получим 0,012 с. Тогда  $\widehat{c} = 0,012 c$ . Сила тяжести при моделировании измеряется в  $\left[ \frac{\widehat{cm} \cdot \widehat{kg}}{(\widehat{c})^2} \right]$ . Переведём ее в единицы измерения теоретического расчёта.

$$\left[ \frac{\widehat{cm} \cdot \widehat{kg}}{(\widehat{c})^2} \right] = \left[ \frac{0,025 cm \cdot 0,025 kg}{(0,012 c)^2} \right] \approx 4,34 \left[ \frac{cm \cdot kg}{c^2} \right]$$

В итоге мы выяснили, что моделированию движения с силой тяжести, равной  $1 \left[ \frac{\widehat{cm} \cdot \widehat{kg}}{(\widehat{c})^2} \right]$ , соответствует теоретический расчёт с  $f_g = 4,34 \left[ \frac{cm \cdot kg}{c^2} \right]$ .

Возьмем один из контуров крыльев того же вида, что представлено на Рис. 1(b), для которого производится моделирование. Для него выполнены все условия Теоремы 1, поэтому скорости, при которых крыло поднимается, считаются по доказанной в теореме формуле. Данные, представленные в таблице 1, показывают совпадение результатов, поскольку  $v_x$  при моделировании принимает только целые значения.

Моделирование	Теоретический расчёт
$\widehat{f}_g = 1 \left[ \frac{\widehat{cm} \cdot \widehat{kg}}{(\widehat{c})^2} \right]$ $v_x \geq 2 \left[ \frac{\widehat{cm}}{\widehat{c}} \right]$	$f_g = 4,34 \left[ \frac{cm \cdot kg}{c^2} \right]$ $v > 4,05 \left[ \frac{cm}{c} \right] = 4,05 \cdot 40 \cdot 0,012 \left[ \frac{\widehat{cm}}{\widehat{c}} \right] = 1,94 \left[ \frac{\widehat{cm}}{\widehat{c}} \right]$
$\widehat{f}_g = 2 \left[ \frac{\widehat{cm} \cdot \widehat{kg}}{(\widehat{c})^2} \right]$ $v_x \geq 3 \left[ \frac{\widehat{cm}}{\widehat{c}} \right]$	$f_g = 8,68 \left[ \frac{cm \cdot kg}{c^2} \right]$ $v > 5,73 \left[ \frac{cm}{c} \right] = 2,75 \left[ \frac{\widehat{cm}}{\widehat{c}} \right]$
$\widehat{f}_g = 3 \left[ \frac{\widehat{cm} \cdot \widehat{kg}}{(\widehat{c})^2} \right]$ $v_x \geq 4 \left[ \frac{\widehat{cm}}{\widehat{c}} \right]$	$f_g = 13,02 \left[ \frac{cm \cdot kg}{c^2} \right]$ $v > 7,02 \left[ \frac{cm}{c} \right] = 3,37 \left[ \frac{\widehat{cm}}{\widehat{c}} \right]$

Таблица 1.

## 8. Численное вычисление скоростей при увеличении угла атаки

В этом разделе посмотрим на поведение скорости  $v_0$  при незначительном увеличении угла атаки  $\alpha$ . На конкретном примере проверим гипотезу, что  $v_0(\alpha)$  является убывающей функцией от  $\alpha$ .

Рассмотрим контур крыла, изображенный на Рис. 1(b), угол атаки которого равен  $\alpha$ . Считаем, что выполнены все условия Теоремы 1,  $p_m$ ,  $1 \leq p_m \leq p$  — номер определяющего отрезка, где  $p$  — число отрезков, составляющих верхний контур крыла. Поэтому можем использовать доказанную в теореме формулу для вычисления скорости, достаточной для того, чтобы крыло поднималось.

Рассмотрим  $v_0$  как функцию аргумента  $\alpha$ . Будем придавать  $\alpha$  приращение  $\Delta\alpha$  так, чтобы отрезок с номером  $p_m$  оставался определяющим, и считать  $v_0(\alpha + \Delta\alpha)$ .

Возьмем контур крыла, для которого производится моделирование, при этом  $\cos\alpha \approx 0,99792$ ,  $p_m = 5$ ,  $p = 9$ ,  $q = 8$ . В данном случае, чтобы отрезок с номер  $p_m = 5$  оставался определяющим, нужно брать  $\Delta\alpha \in (0, \frac{\pi}{40}]$ . В таблице 2 представлено численное вычисление скоростей при увеличении угла атаки в единицах измерения теоретического расчёта.

Сила тяжести	Приращение угла атаки $\Delta\alpha$							
	0	$\frac{\pi}{100}$	$\frac{\pi}{90}$	$\frac{\pi}{80}$	$\frac{\pi}{70}$	$\frac{\pi}{60}$	$\frac{\pi}{50}$	$\frac{\pi}{40}$
$f_g = 4,34$	4,05	3,57	3,53	3,48	3,42	3,35	3,26	3,13
$f_g = 8,68$	5,73	5,05	4,99	4,92	4,84	4,74	4,61	4,43
$f_g = 13,02$	7,02	6,19	6,12	6,03	5,93	5,80	5,64	5,43

Таблица 2.

В таблице 3 представлено численное вычисление скоростей при увеличении угла атаки в единицах измерения, используемых при моделировании.

Сила тяжести	Приращение угла атаки $\Delta\alpha$							
	0	$\frac{\pi}{100}$	$\frac{\pi}{90}$	$\frac{\pi}{80}$	$\frac{\pi}{70}$	$\frac{\pi}{60}$	$\frac{\pi}{50}$	$\frac{\pi}{40}$
$f_g = 1$	1,94	1,71	1,69	1,67	1,64	1,61	1,56	1,50
$f_g = 2$	2,75	2,42	2,4	2,36	2,32	2,27	2,21	2,13
$f_g = 3$	3,37	2,97	2,94	2,89	2,85	2,78	2,71	2,61

Таблица 3.

Таким образом, на примере показано, что  $v_0(\alpha)$  является убывающей функцией при малом увеличении значения аргумента на  $\Delta\alpha \in (0, \frac{\pi}{40}]$ .

## Список литературы

- [1] Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С, Болотов А.А., *Основы теории однородных структур.*, «Наука», Москва, 1990, 296 с.
- [2] Бандман О.Л., “Клеточно-автоматные модели пространственной динамики”, *Системная информатика*, 2006, № 10, 59–111
- [3] Frish U., Crutchfield J.P., Hasslacher B., Lallemand P. Rivet L.-P., “Lattice Gas hydrodynamics in two and three dimensions”, *Complex Systems*, **1** (1987), 649–707
- [4] Rothman В.Н., Zaleski S., *Lattice-Gas Cellular Automata. Simple Models of Complex Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, London, 1997.
- [5] Hardy J., Pomeau Y., de Pazzis O., “Time evolution of a two-dimensional model system”, *Journal of Math. Physics*, **14** (1973), 1746–1759.
- [6] Frish U., Hasslacher B., Pomeau Y., “Lattice-gas Automata for Navier-Stokes equation”, *Physical Review Letter*, **56** (1986), 1505–1508.
- [7] Кравец А.С., *Характеристики авиационных профилей*, «Оборонгиз», Москва, 1939, 332 с.
- [8] Печенюк А.В., “Численное моделирование обтекания крыла конечного размаха с аэродинамическим профилем НАСА-2406 потоком несжимаемой жидкости при малых числах Маха”, *ООО «Digital Marine Technology»*
- [9] Бобарика И. О., Гусев И.Н., “Повышение адекватности численного моделирования аэродинамики элементов летательных аппаратов потоком несжимаемой жидкости при малых числах Маха”, *Вестник ИрГТУ*, 2014

### **Modeling wing aerodynamics with cellular automata Gordeeva A.S.**

The paper explores the problem of modeling the motion of a wing in an air flow. For this purpose, we use cellular automata modeling the movement of the air and cellular automaton modeling the wing. The wing has some asymmetrical shape. Cellular automata represent linear motion of particles, but they bypass the wing upon collision with it; moreover, the velocity of

particles moving along the longer side of the wing is greater than the velocity of particles on the other side. This leads to appearance of a lifting force. The automaton modelling the wing sees cellular automata from some neighbourhood and calculates the velocity of particles. Based on this, the lift vector is calculated. As a result, the wing changes its coordinates.

An explicit formula for calculating velocities in the general case, enough for the wing to lift, was found. A proof of the statement for the simplified wing profile was also presented. An example showing that the velocity calculated by the explicit formula decreases with a small increase in the angle of attack was given.

*Keywords:* automaton modelling of wing aerodynamics, homogeneous structures with inputs, cellular automaton, lifting force.

## References

- [1] Kudryavtsev V. B., Podkolzin A. S., Bolotov A. A., *Fundamentals of the Theory of Homogeneous Structures*, «Nauka», Moscow, 1990 (in Russian), 296 c.
- [2] Bandman O. L., “Cellular automata models of spatial dynamics”, *System Informatics*, 2006, № 10, 59–111 (in Russian)
- [3] Frish U., Crutchfield J.P., Hasslacher B., Lallemand P. Rivet L.-P., “Lattice Gas hydrodynamics in two and three dimensions”, *Complex Systems*, **1** (1987), 649–707
- [4] Rothman B.H., Zaleski S., *Lattice-Gas Cellular Automata. Simple Models of Complex Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, London, 1997.
- [5] Hardy J., Pomeau Y., de Pazzis O., “Time evolution of a two-dimensional model system”, *Journal of Math. Physics*, **14** (1973), 1746–1759.
- [6] Frish U., Hasslacher B., Pomeau Y., “Lattice-gas Automata for Navier-Stokes equation”, *Physical Review Letter*, **56** (1986), 1505–1508.
- [7] Kravets A.S., *Aviation profiles characteristics*, Oborongiz, Moscow, 1939 (in Russian), 332 c.
- [8] Pechenyuk A.V., “Numerical simulation of the flow around a finite-span wing with an aerodynamic profile of NACA-2406 by an incompressible fluid flow at low Mach numbers”, *OOO «Digital Marine Technology»* (in Russian)

- [9] Bobarika I. O., Gusev I. N., “Improving the adequacy of numerical modeling of the aerodynamics of aircraft elements by an incompressible fluid flow at low Mach numbers.”, *Bulletin of IrST*, 2014 (in Russian)

# О сокращении нелинейной глубины многомерных сверточных нейронных схем

А. В. Хапкин<sup>1</sup>

В работе рассматриваются многомерные сверточные схемы в базисе Маккалока-Питтса. Показано, что рассматриваемые схемы могут быть реализованы схемой из априорной и динамической части, в которой вычисления в априорной части не зависят от входных данных. При этом априорная и динамическая части имеют нелинейную глубину, равную 2.

**Ключевые слова:** сверточная нейронная сеть, нейронная схема, нелинейная сложность, модель Маккалока-Питтса.

## 1. Введение.

Сверточная нейронная сеть - специальная архитектура нейронных сетей, предложенная Яном Лекуном в 1988 году [1]. Основная идея таких сетей - последовательное использование сверточных слоев и субдискретизирующих слоёв, что от слоя к слою позволяет переходить ко все более и более высоким абстракциям, при этом на последних слоях выделяются признаки очень высокого уровня. Сеть в процессе обучения самонастраивается и учится сама выбирать такие детали путем фильтра маловажных деталей и выделения существенных. Основными преимуществами сверточных нейронных сетей являются не очень большое количество настраиваемых параметров по сравнению с обычными полносвязными сетями, удобное распараллеливание вычислений, что позволяет использовать для вычисления графические процессоры, относительная устойчивость к повороту и сдвигу исходных данных. Сверточные сети активно применяются в задачах компьютерного зрения - распознавании образов, детекции объектов, также такие сети используются для распознавания речи, обработки аудиосигналов и анализа временных рядов.

Поэтому нужно уметь оптимизировать работу сверточных нейронных сетей, особенно важно уметь обходиться сетями с не очень большой нелинейной глубиной, так как в таком случае вытекает ряд преимуществ

---

<sup>1</sup>Хапкин Артем Владимирович — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: 9880817@mail.com.

Khapkin Artem Vladimirovich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

- это позволяет ускорять время работы сетей, делать сети более интерпретируемыми.

В данной работе рассматриваются сверточные одномерные нейронные схемы. ([2], [3]) в модели Маккалока-Питтса [4]. Выполняется разложение этих сетей на динамическую и априорную части, при этом вычисления априорной части не зависят от входных данных. Минимизируется нелинейная глубина каждой из этих частей.

## 2. Основные понятия, определения и текущие результаты.

Пусть  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  - алфавит входных переменных. Введем следующие функции:

1) постоянная функция  $g_c \equiv c, c \in \mathbb{R}$

2) сумматор  $\Sigma_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n, x_i \in \mathbb{R}$

3) усилитель  $f_\gamma(x) = \gamma x, \gamma, x \in \mathbb{R}$

4) функция Хевисайда,  $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

5) функция  $F(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, & x_2 \geq 0 \\ 0, & x_2 < 0 \end{cases}$

Множество таких функций обозначим за  $\Delta'$ .

По аналогии с автоматными схемами [5] определим схемы из функциональных элементов.

Каждой функции  $f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  можно сопоставить графический объект  $S$  с  $n$  входными стрелками и одной выходной стрелкой (коротко входы и выход  $S$ ). Входам объекта  $S$  приписаны слева направо переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Элементы из  $\Delta'$  изображаются следующим образом:

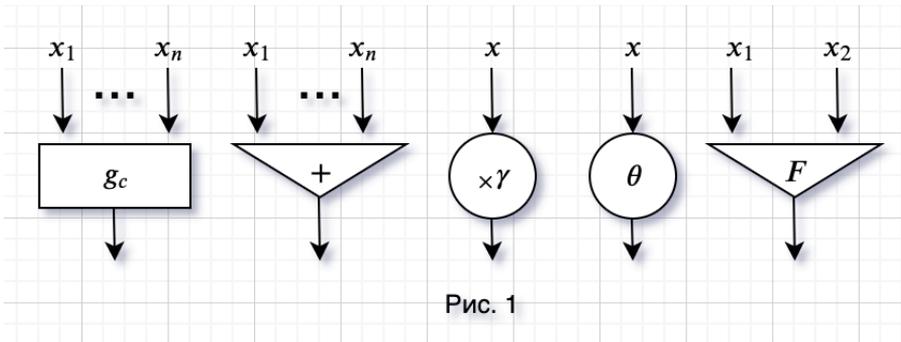


Рис. 1

Графический объект и соответствующая ему функция из  $\Delta'$  называются функциональными элементами. Теперь индуктивно определим нейронные схемы без памяти. Функциональные элементы из 1-5 - нейронные схемы без памяти. Используя операции суперпозиции [6], а именно операции добавления фиктивного входа, изъятие фиктивного входа, склеивание ходов, переименование ходов без склеивания и последовательное соединение над функциональными элементами, индуктивно определяются нейронные схемы без памяти.

Если функция  $F$  реализуется нейронной схемой  $S$ , то в этом случае будем использовать запись  $(S, F)$ . При этом элементы  $\theta$  и  $F$  называются нелинейными, остальные элементы называются линейными. Множество функций  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , реализуемых нейронными схемами без памяти, будем обозначать  $\mathbb{L}$ . В работе [6] показано, что множество  $\mathbb{L}$  совпадает с множеством кусочно-линейных функций  $PL$ .

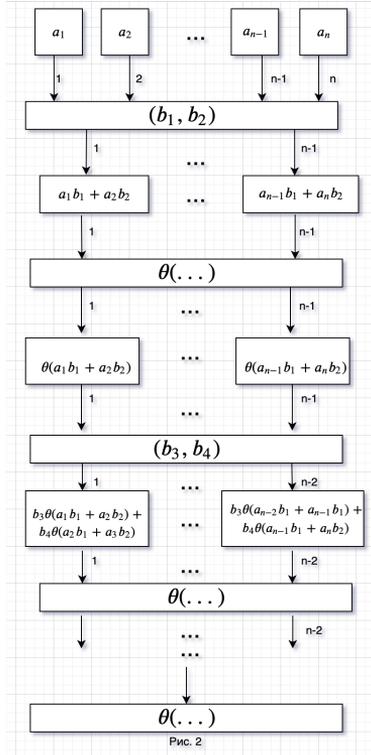
Число элементов в схеме называется сложностью нейронной схемы. Число нелинейных элементов в схеме называется нелинейной сложностью нейронной схемы.

Путем в нейронной схеме называется последовательность функциональных элементов

$G_1, G_2, \dots, G_k$ , где вход  $G_1$  является входом схемы, выход  $G_k$  является выходом схемы, и для любого  $i, i = 1 \dots k - 1$  выход  $G_i$  является входом  $G_{i+1}$ . Нелинейной длиной пути называется число нелинейных элементов, содержащихся в нем. Нелинейной глубиной нейронной схемы называется длина самого длинного пути в ней.

Две нейронные схемы эквивалентны, если они реализуют одну и ту же функцию. В работе [6] показано, что для любой нейронной схемы без памяти существует эквивалентная ей схема с нелинейной глубиной 2.

Напомним определение одномерной сверточной схемы в базисе Маккалока-Питтса, приведенное в работе [7]. Имеется схема с  $n$  входами и одним выходом, в котором последовательно применяются операции свертки и Хевисайда. Приведем ее изображение:



Такую схему назовем одномерной сверточной схемой в базисе Маккалока-Питтса.

Нетрудно видеть, что приведенная схема на рис.2 имеет нелинейную глубину  $n - 1$ . Распишем подробнее, что происходит в процессе вычисления схемы на рис.2.

1. Выходы первого сверточного слоя нейронной схемы (которые передаются на вход второму слою):

$$(\theta(a_1b_1 + a_2b_2), \dots, \theta(a_{n-1}b_1 + a_nb_2)) \quad (1)$$

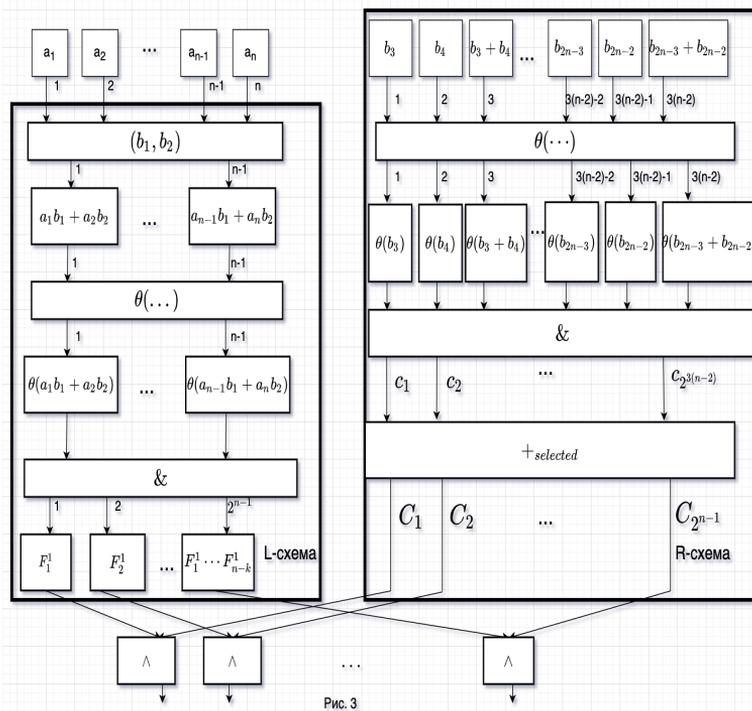
2. Выходы второго сверточного слоя нейронной схемы (которые передаются на вход третьему слою):

$$(\theta((b_3\theta(a_1b_1 + a_2b_2) + b_4\theta(a_2b_1 + a_3b_2)), \dots, \theta(b_3\theta(a_{n-2}b_1 + a_{n-1}b_2) + b_4\theta(a_{n-1}b_1 + a_nb_2))) \quad (2)$$

Далее идет третий сверточный слой с  $(b_5, b_6)$ , и так до конца до тех пор, пока у последнего сверточного слоя останется один выход.

Также напомним разложение, полученное в работе [7]. Если выразить результат вычисления схемы через  $F_i^1, i = 1 \dots n - 1$ , а конкретно то, что получается после первого сверточного слоя, то получится линейная комбинация слагаемых, при этом каждое слагаемое состоит из 2 множителей - первый множитель равен в  $F_i^1$  или их всевозможных произведений, а второе слагаемое является комбинацией сверток, кроме первой. Следовательно, каждый такой множитель можно посчитать отдельно, в дальнейшем изобразим такие схемы.

Под схемой  $\&$  подразумеваем получение всевозможных произведений (конъюнкций) из переданных в этот блок элементов, под схемой  $+_{selected}$  подразумевается получение определенных линейных комбинаций. Теперь изобразим, как выглядит вид такой схемы с нелинейной глубиной 2, на основе приведенных выше преобразований:



Здесь  $c_i$  - различные произведения операций Хевисайда на множестве

$(b_3, b_4, b_3 + b_4, b_5, \dots, b_{2n-3}, b_{2n-2}, b_{2n-3} + b_{2n-2})$ , а  $C_i$  - это определенные линейные комбинации таких операций Хевисайда, которые полу-

чаются при раскрытии нейронной схемы в явном виде. На выходах  $C_i$  схемы  $+_{selected}$  реализуется конъюнкция с  $i$  подмножеством из функций  $\{F_1, F_2, \dots, F_{n-1}\}$ .

$R$ -схемой назовем схему, реализующую комбинации сверток (априорная часть схемы, которая не зависит от исходных данных), а  $L$ -схемой назовем схему, реализующую преобразования с самими данными (динамическая часть схемы).  $LR$ -схемой назовем финальную комбинацию  $L$  и  $R$ -схемы, изображенную на рис.3.

По построению видно, нелинейная глубина  $R$ -схемы и  $L$ -схемы равна 2. Схема, изображенная на рис.3, имеет глубину 3, чтобы получить нелинейную глубину 2 после объединения  $R$  и  $L$ , нужно применить лемму 1.

Такой подход обладает интересным свойством - для новых данных нужно считать заново только преобразования из  $L$ -схемы, а преобразования  $R$ -схемы достаточно посчитать один раз, так как массивы сверток для разных массивов данных будет одинаков.

Также заметим, что полученную схему можно представить в другом виде - когда выходами  $L$ -схемы будут не  $F_i^1$  и их всевозможные произведения, а  $F_i^k$  и их всевозможные произведения, где  $1 < k < n$ , а выходами  $R$ -схемы будут комбинации из меньшего числа сверток.

Имеет место следующая теорема, полученная в [7].

**Теорема 1.** *Любая одномерная сверточная сеть в базисе Маккалока-Питтса представляется в виде схемы нелинейной глубины 3, изображенной на рисунке 3.*

Также выпишем верхнюю оценку на нелинейную сложность, полученную в работе [7] для одномерных сверточных схем в базисе Маккалока-Питтса:

**Теорема 2.** *Порядок роста нелинейной сложности  $LR$ -схемы с нелинейной глубиной 2 не превосходит  $n2^{3n}$ . При этом нелинейная сложность  $L$ -схемы не превосходит  $n2^n$ .*

### 3. Рассмотрение двумерного случая.

Выше рассматривались только одномерные сверточные схемы, когда все операции изначально совершаются над одномерными массивами. Однако можно рассматривать и другие размерности, например размерность 2, когда изначально объектом выступают черно-белые изображения (матрицы). Более того, в практических задачах основную роль играют именно высокоразмерные объекты, а не одномерные.

Пусть имеются  $n \times n$  матрица  $A$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и последовательность из  $n - 1$  матриц (назовем эти матрицы ядрами):

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{13} & b_{14} \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}, \dots, B_{n-1} = \begin{pmatrix} b_{n-1,1} & b_{n-1,2} \\ b_{n-1,3} & b_{n-1,4} \end{pmatrix}$$

По аналогии с одномерными сверточными схемами последовательно применяются операции свертки и Хевисайда, обобщим эти операции для двумерного случая. В этой схеме последовательно применяются операции свертки к каждому  $2 \times 2$  матрице окну  $A$  (применяются 4 операции усилителя и затем одна операция сумматора между ними) и последующем применении функции Хевисайда к получившемуся результату. К полученному выходу повторяем такую же последовательность операций. Последовательное применение операций свертки и функции Хевисайда будем называть одним сверточным слоем нейронной схемы. Приведенная схема содержит  $n - 1$  сверточных слоев.

Дадим более формальное определение. Для начала определим двумерную свертку. Пусть есть  $n \times n$  матрица  $A$ ,  $2 \times 2$  матрица, и  $n - 1 \times n - 1$  матрица  $C$ , элементы все матриц изображены на рисунке. Тогда операцией  $conv B$  будем называть нейронную схему, на вход которой подается матрица  $A$ , а на выходе получается матрица  $C$ .

$$C = \begin{pmatrix} \theta(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{12} + b_{13}a_{21} + b_{14}a_{22}) & \cdots & \theta(b_{11}a_{1,n-1} + b_{12}a_{1n} + b_{13}a_{2,n-1} + b_{14}a_{2n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta(b_{11}a_{n-1,1} + b_{12}a_{n-1,2} + b_{13}a_{n,1} + b_{14}a_{n2}) & \cdots & \theta(b_{11}a_{n-1,n-1} + b_{12}a_{n-1,n} + b_{13}a_{n,n-1} + b_{14}a_{nn}) \end{pmatrix}$$

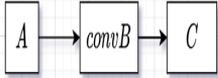
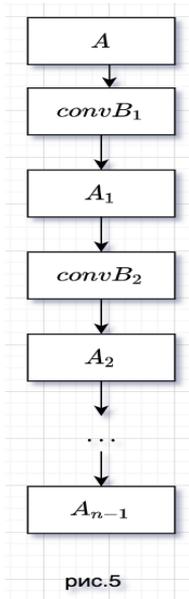
$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{13} & b_{14} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2,2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$


Рис. 4

Теперь дадим определение двумерной сверточной схемы в базисе Маккалока-Питтса. Будем обозначать матрицами  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  матрицы, которые получаются на соответствующем слое. На последнем слое, на месте  $A_{n-1}$ , будет матрица размерности 1.



Двумерной сверточной сетью в базисе Маккалока-Питтса назовем сеть, изображенную на рисунке 5.

В результате таких операций размер соответствующей матрицы на каждом последующем слое будет уменьшаться на 1, и в финале у схемы получится только один выход. Полученная нелинейная глубина такой

схемы будет равна  $n - 1$ , так как количество блоков с функцией Хевисайда здесь (длина пути) равно  $n - 1$ .

**Пример для  $n=3$ .** Рассмотрим пример с небольшой размерностью при  $n = 3$ , получится ровно 2 сверточных слоя. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{13} & b_{14} \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}$$

Выходом первого сверточного слоя будет:

$$\begin{pmatrix} \theta(a_{11}b_{11} + \dots + a_{14}b_{14}) & \theta(a_{12}b_{11} + \dots + a_{23}b_{14}) \\ \theta(a_{21}b_{11} + \dots + a_{32}b_{14}) & \theta(a_{22}b_{11} + \dots + a_{33}b_{14}) \end{pmatrix}$$

Выходом второго сверточного слоя будет 1 элемент (матрица размерности  $1 \times 1$ ):

$$\theta(b_{21}\theta(a_{11}b_{11} + \dots + a_{14}b_{14}) + b_{22}\theta(a_{12}b_{11} + \dots + a_{23}b_{14}) + b_{23}\theta(a_{21}b_{11} + \dots + a_{32}b_{14}) + b_{24}\theta(a_{22}b_{11} + \dots + a_{33}b_{14}))$$

Запишем результат такой схемы в другой форме. Пусть:  $F_{11}^1 = \theta(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} + a_{14}b_{14})$   
 $F_{12}^1 = \theta(a_{12}b_{11} + a_{13}b_{12} + a_{22}b_{13} + a_{23}b_{14})$   
 $F_{21}^1 = \theta(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} + a_{31}b_{13} + a_{32}b_{14})$   
 $F_{22}^1 = \theta(a_{22}b_{11} + a_{23}b_{12} + a_{32}b_{13} + a_{33}b_{14})$

Обозначим этот финальный элемент как  $F_1^2$ . Заметим, что  $F_1^2$  можно воспринимать как функциональный элемент, входами которого являются  $F_{11}^1, F_{12}^1, F_{21}^1, F_{22}^1$ . И поэтому его можно записать как  $F_1^2(F_{11}^1, F_{12}^1, F_{21}^1, F_{22}^1)$ .

Действительно, в явном виде выпишем всевозможные варианты:

$$\begin{aligned}
0000 : 0 &= K_{0000} \\
0001 : \theta(b_{24}) &= K_{0001} \\
0010 : \theta(b_{23}) &= K_{0010} \\
0011 : \theta(b_{24} + b_{23}) &= K_{0011} \\
0100 : \theta(b_{22}) &= K_{0100} \\
0101 : \theta(b_{22} + b_{24}) &= K_{0101} \\
0110 : \theta(b_{22} + b_{23}) &= K_{0110} \\
0111 : \theta(b_{22} + b_{23} + b_{24}) &= K_{0111} \\
1000 : \theta(b_{21}) &= K_{1000} \\
1001 : \theta(b_{21} + b_{24}) &= K_{1001} \\
1010 : \theta(b_{21} + b_{23}) &= K_{1010} \\
1011 : \theta(b_{21} + b_{23} + b_{24}) &= K_{1011} \\
1100 : \theta(b_{21} + b_{22}) &= K_{1100} \\
1101 : \theta(b_{21} + b_{22} + b_{24}) &= K_{1101} \\
1110 : \theta(b_{21} + b_{22} + b_{23}) &= K_{1110} \\
1111 : \theta(b_{21} + b_{22} + b_{23} + b_{24}) &= K_{1111}
\end{aligned}$$

Таким образом, финальный выход возможно представить в виде следующей суммы:

$$\begin{aligned}
F_1^2 &= \theta(b_{24})(1 - F_{11}^1)(1 - F_{12}^1)(1 - F_{21}^1)F_{22}^1 + \\
&\theta(b_{23})(1 - F_{11}^1)(1 - F_{12}^1)F_{21}^1(1 - F_{22}^1) + \\
&\theta(b_{23} + b_{24})(1 - F_{11}^1)(1 - F_{12}^1)F_{21}^1F_{22}^1 + \dots
\end{aligned}$$

**Случай произвольного  $n$ .** Пользуясь аналогичными рассуждениями, разберем случай двумерной сверточной сети в базисе Маккалока-Питтса для произвольного  $n$ . В явном виде выпишем рекуррентные преобразования схемы, которые сократят нелинейную глубину до 2.

Входной матрицей размерности  $(n \times n)$  будет:

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}$$

Сверточными матрицам будут:

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{13} & b_{14} \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}, \dots, B_{n-1} = \begin{pmatrix} b_{n-1,1} & b_{n-2,2} \\ b_{n-2,3} & b_{n-2,4} \end{pmatrix}$$

Выходом первого сверточного слоя будет матрица размерности  $(n - 1 \times n - 1)$ :

$$\begin{pmatrix} \theta(a_{11}b_{11} + \dots + a_{14}b_{14}) & \dots & \theta(a_{1,n-1}b_{11} \dots + a_{1n}b_{14}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta(a_{n-1,1}b_{11} + \dots + a_{n2}b_{14}) & \dots & \theta(a_{n-1,n-1}b_{11} \dots + a_{nn}b_{14}) \end{pmatrix}$$

Обозначим эти выходы за

$$\begin{pmatrix} F_{11}^1 & F_{12}^1 & \dots & F_{1,n-1}^1 \\ F_{21}^1 & F_{22}^1 & \dots & F_{2,n-1}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n-1,1}^1 & a_{n-1,2}^1 & \dots & F_{n-1,n-1}^1 \end{pmatrix}$$

Далее, по аналогии с одномерными сверточными схемами применяем операцию свертки и операцию Хевисайда, получаем

$$\begin{pmatrix} F_{11}^2 & F_{12}^2 & \dots & F_{1,n-2}^2 \\ F_{21}^2 & F_{22}^2 & \dots & F_{2,n-2}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n-2,1}^2 & F_{n-2,2}^2 & \dots & F_{n-2,n-2}^2 \end{pmatrix}$$

Далее последовательно применяются операции свертки и Хевисайда до тех пор, пока не достигнем последнего элемента. Матрицей  $2 \times 2$  предпоследнего выхода слоя будет

$$\begin{pmatrix} F_{11}^{n-2} & F_{12}^{n-2} \\ F_{21}^{n-2} & F_{22}^{n-2} \end{pmatrix}$$

А сам финальный выход обозначим за  $F_1^{n-1}$ .

По аналогии с одномерным случаем заметим, что  $F_1^{n-1}$  явно определяется через предпоследний слой, по той же формуле, которая была использована в примере 3:

$$\begin{aligned} F_1^{n-1} &= \theta(b_{n-2,4})(1 - F_{11}^{n-2})(1 - F_{12}^{n-2})(1 - F_{21}^{n-2})F_{22}^{n-2} + \\ &\dots \\ &+ \theta(b_{n-2,1} + b_{n-2,2} + b_{n-2,3} + b_{n-2,4})F_{11}^{n-2}F_{12}^{n-2}F_{21}^{n-2}F_{22}^{n-2} \end{aligned}$$

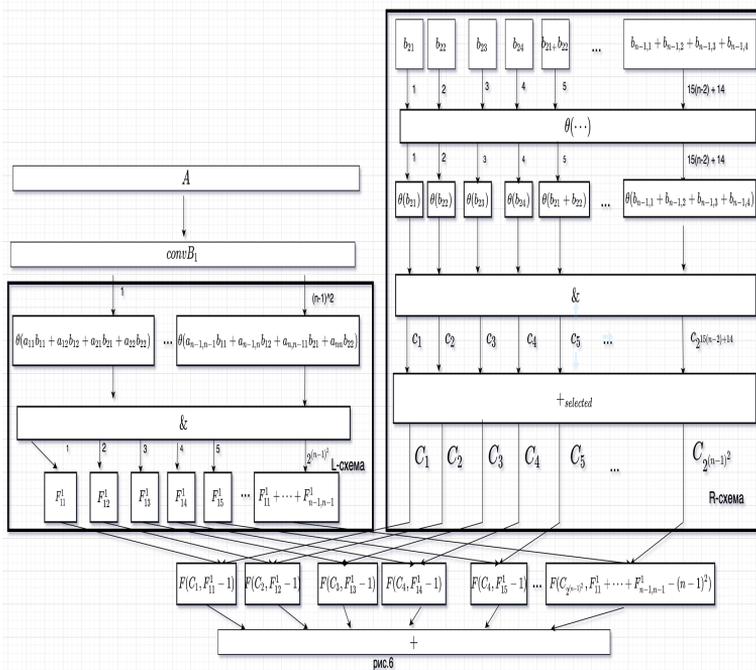
Также заметим, что по аналогии с одномерным случаем каждый из элементов  $F_{11}^{n-2} F_{12}^{n-2}, F_{21}^{n-2}, F_{22}^{n-2}$  представляется в виде такой же формулы как комбинации элементов из слоя  $n-3$ . а те в свою очередь как комбинации элементов из слоя  $n-4$ , и так до тех пор, пока не будут достигнуты элементы из первого слоя,  $F_{ij}^k$ .

Это значит, что элемент на слое  $k$  на месте в матрице  $i, j$  однозначно представляется как комбинация элементов предыдущего слоя по следующей формуле:

$$F_{ij}^k = \theta(b_{k-1,4})(1 - F_{ij}^{k-1})(1 - F_{i,j+1}^{k-1})(1 - F_{i+1,j}^{k-1})F_{i+1,j+1}^{k-1} + \dots + \theta(b_{k-1,1}) + \theta(b_{k-1,2}) + \theta(b_{k-1,3}) + \theta(b_{k-1,4})F_{ij}^{k-1}F_{i,j+1}^{k-1}F_{i+1,j}^{k-1}F_{i+1,j+1}^{k-1} +$$

После того, как будет достигнут первый слой, применяем лемму 1 и получаем нелинейную глубину 2.

Таким образом, исходная схема представляется в виде схемы, изображенной на рисунке 6 (все обозначения на этом рисунке такие же, как и в одномерном случае):



Имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.** Любая двумерная сверточная сеть в базисе Маккалока-Питтса представляется в виде схемы нелинейной глубины 3, изображенной на рисунке 6.

Заметим, что в конце, в отличие от одномерного случая, используются функции  $F$  и вместо всевозможных конъюнкций считаются всевозможные суммы. Нетрудно проверить, что такая схема эквивалентна схеме, когда считаются конъюнкции и дальше идет умножение число.

Действительно, рассмотрим к примеру самый последний элемент:  $F_{11}^1 \cdots F_{n-1, n-1}^1$  принимает значение один, а следовательно, после домножения на часть из правой схемы, значение  $C_{2^{(n-1)^2}}$  когда все элемента равны 1, и 0, если хотя бы один из них равен 0, значит достаточно, чтобы сумма  $F_{11}^1 + F_{n-1, n-1}^1 - (n-1)^2$ . Следовательно,  $F(C_{2^{(n-1)^2}}, F_{11}^1 + \cdots + F_{n-1, n-1}^1 - (n-1)^2)$  реализует именно это.

Теперь оценим нелинейную сложность построения такой схемы. Напомним, что нелинейной сложностью схемы называется количество нелинейных элементов в такой схеме. Для начала оценим нелинейную сложность L-схемы. Заметим, что с использованием функции  $F$  из первоначального базиса получилось сильно соркатить нелинейную сложность - теперь достаточно посчитать значение каждого  $F_{ij}^1$  на первом слое, а их всего  $(n-1)^2$ , так как сумматор не дает прироста к нелинейной сложности. Итого, нелинейная сложность  $L$  - не будет превосходить  $n^2$ .

Теперь посмотрим на нелинейную сложность R-схемы. В ней у нас имеется не более  $2^{15n}$  комбинаций с элементами, каждый из которых имеет длину, не более чем  $k*n$ , где  $k$  - это константа, которую в асимптотике можно отбросить. И так как линейные комбинации в такой схеме не будут давать прироста к нелинейной сложности, то сложность R-схемы не будет превышать  $n2^{15n}$ .

Видно, в чем основное отличие от одномерного случая - наибольший вклад в рост нелинейной сложности вносит L-схема из-за того, что количество различных элементов растет по порядку степени, а R-схема растет по линейному закону.

**Теорема 4.** Порядок роста нелинейной сложности LR-схемы с нелинейной глубиной 2 не превосходит  $n^2 2^{15n}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

## 4. Случай с произвольной размерностью $k$ , где $k > 2$ .

В современных задачах машинного обучения часто возникают ситуации, когда нужно работать с объектами большой размерностью - к примеру, цветные изображения (размерность 3) или видео (размерность 4). В общем случае такие объекты называются тензорами, их мы и будем рассматривать. Общий вид такой схемы изображен на рис. 5, при этом понятие свертки обобщается для случая с более высокой размерностью.

Пусть имеет тензор размерности  $k$ :  $A = \{a_{i_1, i_2, \dots, i_k} : i_1 \in \{1, \dots, n\}, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}\}$ , и точно также есть  $n - 1$  тензоров:

$$B_1 = \{b_{i_1, \dots, i_k}^1 : i_1 \in \{1, 2, \dots\}, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots\}\}$$

$$B_2 = \{b_{i_1, \dots, i_k}^2 : i_1 \in \{1, 2, \dots\}, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots\}\}$$

...

$$B_{n-1} = \{b_{i_1, \dots, i_k}^{n-1} : i_1 \in \{1, 2, \dots\}, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots\}\}$$

Далее к тензору  $A$  последовательно применяются сверточные операции с помощью тензоров  $B_i$  и операции Хевисайда до тех пор, пока не останется один выход финальной сверточной схемы.

Такую схему назовем  $k$ -мерной сверточной схемой в базисе Маккалока-Питтса.

### 4.1. Разложение такой схемы.

Заметим, что по построению  $k$ -мерная сверточная схема практически не отличается от построения одномерной и двумерной - добавляются лишь новые размерности.

Будем обозначать через  $F$ -нотацию выходы сверточных слоев. Например, за  $F_{i_1, i_2, \dots, i_k}^j$  будет обозначаться элемент, который будет стоять на  $i_1, i_2, \dots, i_k$  месте на слое  $j$ .

Для примера, распишем, что будет после первого слоя (операция свертки и операция Хевисайда) на произвольном месте  $i_1, i_2, \dots, i_k$ :

$$F_{i_1, i_2, \dots, i_k}^1 = \theta \left( \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=1}^2 \dots \sum_{i_k=1}^2 a_{i_1 i_2, \dots, i_k} * b_{i_1, i_2, \dots, i_k}^1 \right) \quad (3)$$

По аналогии, получаем все остальные элементы выхода первого слоя, и далее к ним применяются новые операции свертки и операция Хевисайда, до тех пор, пока не останется только один выход у последнего слоя, его, как и ранее, обозначим за  $F_1^{n-1}$ .

Далее, по аналогии с двумерным случаем, точно также расписываются рекуррентные соотношения, которые позволяют через  $F_{i_1, i_2, \dots, i_k}^1$  (выходы первого слоя) и последующие свертки, расписать, что получится у финального выхода, и схема получается такой же, как и на рисунке 6, с поправкой на размерность и на большее количество слагаемых в свертках.

## 4.2. Оценка сложности схем с размерностью $k > 2$

Также, по аналогии с двумерным случаем, нелинейная сложность полученной схемой будет определяться в основном R-схемой, и верна следующая теорема, которая является обобщением аналогичной теоремы для двумерного случая.

**Теорема 5.** *Порядок роста нелинейной сложности LR-схемы с нелинейной глубиной 2 не превосходит  $n2^{(2^k-1)n}$  при  $n \rightarrow \infty$ . При этом основной вклад вносит R-схема, порядок роста сложности L-схемы не превосходит  $n^k$ .*

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доценту кафедры МаТИС механико-математического факультета МГУ, к.ф.-м.н., Часовских Анатолию Александровичу, за помощь в проведении исследования и постановке задачи.

## Список литературы

- [1] Y. LeCun, B. Boser, J. S. Denker, D. Henderson, R. E. Howard, W. Hubbard, L. D. Jacke, *Backpropagation applied to Handwritten Zip Code Recognition, Neural Computation*, 1989.
- [2] *Автоматы. Сборник статей. Под ред. К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти. Пер. с англ. под ред. А. А. Ляпунова*, Изд. иностр. лит., 1956.
- [3] С. Хайкин, *Нейронные сети: полный курс, 2-е издание, Вильямс*, 2006.

- [4] W.S. McCulloch, W. Pitts, *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*, **5**, 1943.
- [5] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., *Введение в теорию автоматов*, «Наука», Москва, 1985, 320 pp.
- [6] Половников В.С., *Об оптимизации структурной реализации нейронных сетей*, МГУ, 2007
- [7] Хапкин А.В., *Об оптимизации структуры сверточных нейронных сетей*, МГУ, 2020

## **On reducing the nonlinear depth of multidimensional convolutional neural schemes**

**Khapkin A.V.**

The paper considers multidimensional convolutional schemes in the McCulloch-Pitts basis. It is shown that the considered schemes can be implemented by a scheme from the a priori and dynamic parts, in which the calculations in the a priori part are independent of the input data. In this case, the a priori and dynamic parts have a nonlinear depth equal to 2.

*Keywords:* convolutional neural network, neural scheme, nonlinear complexity, McCulloch-Pitts model.

## **References**

- [1] Y. LeCun, B. Boser, J. S. Denker, D. Henderson, R. E. Howard, W. Hubbard, L. D. Jacke, *Backpropagation applied to Handwritten Zip Code Recognition*, *Neural Computation*, 1989
- [2] *Automatic machines. Digest of articles. Ed. C.E. Shannon and J. McCarthy. Tr. from English ed. A. A. Lyapunova*, Publishing foreign literature, 1956
- [3] S. Hykin, *Neural Networks: The Complete Course, 2nd Edition*, Williams, 2006
- [4] W.S. McCulloch, W. Pitts, *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*, **5**, 1943
- [5] Kudryavtsev V.B., Aleshin S.V., Podkolzin A.S., *Introduction to automata theory*, «Наука», Moscow, 1985, 320 pp.

- [6] Polovnikov V.S., *On optimization of structured implementation of neural networks*, MSU, 2007
- [7] Khapkin A.V., *On optimizing the structure of convolutional neural networks*, MSU, 2020

# Остаточная сеть с рекуррентными структурами

Л. Цзян<sup>1</sup> Ч. Цуй<sup>2</sup> Ц. Ван<sup>3</sup>

Мы вводим рекуррентную структуру (пространственно) на остаточных сетях, с целью улучшить производительность сети при сохранении параметров. Также, мы исследуем поведение рекуррентных структур в остаточных сетях на основе римановых многообразий, вводя кривизну в качестве метрики для нейронных сетей. Кроме того, мы экспериментально подтверждаем, что усиление за счет рекуррентной структуры связано с кривизной, и демонстрируем универсальность рекуррентной структуры как метода повышения производительности сети.

**Ключевые слова:** нейронные сети, риманова геометрия, рекуррентные структуры, многообразие, трансформеры.

## 1. Введение

Глубокие искусственные нейронные сети часто мощнее неглубоких сетей. Но по мере увеличения глубины, количество параметров в них также стремительно растёт. Существует ли способ повысить качество предсказаний сети без увеличения параметров? Вдохновленные рекуррентными связями в головном мозге, некоторые работы, например [1, 2], вводят рекуррентные структуры в неглубокие нейронные сети, тем самым повышая эффективность их работы. Однако, данное направление пока не получило широкого развития, а сам принцип работы рекуррентных структур все ещё остается малоизученным.

Известно, что простое применение рекуррентной структуры увеличивает риск взрыва или исчезновения градиента [3]. Поэтому существует необходимость определения и анализа архитектур, подходящих для

---

<sup>1</sup>Цзян Лэй — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: kiwee@outlook.com

Jiang Lei — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

<sup>2</sup>Чжэньюй Цуй — аспирант каф. математической кибернетики ВМиК. ф-та МГУ, e-mail: ourobros1234@outlook.com

Cui Zhenyu — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of Mathematical Cybernetics.

<sup>3</sup>Ван Цзыци — аспирант каф. теории чисел мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: wangziqu101@outlook.com

Wang Ziqi — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Number Theory.

включения в них рекуррентных структур. Другой вопрос — какие изменения в сети происходят при включении рекуррентных структур в сеть и каковы соответствующие результаты таких изменений?

Отвечая на первый вопрос, мы обнаружили, что архитектура остаточных сетей (ResNet) [4] подходит для рекуррентных структур больше, чем традиционные нейронные сети. При обратном распространении ошибки градиент в остаточных сетях намного стабильнее градиента, наблюдаемого в обычных сетях [5, 6, 7]. Это значительно снижает риск взрыва или исчезновения градиента из-за рекуррентной структуры.

В отношении второго вопроса мы продолжаем работу [8], вводя риманову геометрию для объяснения работы рекуррентной структуры: рассматривая набор данных как кривую в высоко-размерном пространстве, процесс обучения нейронной сети можно рассматривать как процесс обучения представлению координат для этой кривой. Исходя из этого, мы оцениваем конечное представление координат путем изучения внешней кривизны кривой в выходном пространстве сети и обнаруживаем, что введение рекуррентной структуры позволяет сети научиться лучшему представлению координат. Мы подтвердили нашу теорию экспериментально и обнаружили, что изменение внешней кривизны положительно коррелирует с точностью классификации сети. Согласно нашим сведениям, в нашей работе риманова геометрия впервые вводится в интерпретируемость рекуррентной структуры.

## 2. Методология

Остаточные нейронные сети — одна из важнейших архитектур для глубокого обучения. Типичный остаточный модуль (residual module) состоит из остаточного соединения (residual connection) и пропускных соединений (shortcut connection). Остаточный модуль содержит ряд обучаемых весов, а пропускное соединение добавляет входные данные модуля непосредственно к выходным данным. Формализовать процесс можно следующим образом:

$$F^l(x^l) = x^l + f(\mathbf{W}^l x^l + \mathbf{b}^l),$$

где  $f(\mathbf{W}^l x^l + \mathbf{b}^l)$  указывает на остаточный модуль;  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{b}$  — весовая матрица и смещение;  $f(x)$  — нелинейная функция активации.

Процесс прямого распространения сигнала в остаточной сети выглядит следующим образом:

$$x^L = x_0 + \sum_{l=1}^L F^l(x^l).$$

## 2.1. В остаточной сети набор данных представлен как $\mathcal{C}^1$ -многообразиие

- 1) Предположим, что набор данных  $D$  представляет собой топологическое многообразие (хаусдорфово топологическое пространство, которое имеет счетную базу и локальное сходство с евклидовым пространством).
- 2) Входное пространство нейронной сети обозначим через  $Y^0$ , а выходное пространство каждого слоя  $L$ -слоистой нейронной сети обозначим через  $Y^1, \dots, Y^L$ , где  $Y^L$  — последнее выходное пространство нейронной сети. Предположим, что все эти пространства имеют одинаковую размерность, обозначаемую  $d$ . Здесь мы также предполагаем, что размерность набора данных равна  $d$ .
- 3) Отображение из набора данных во входное пространство нейронной сети обозначим через  $\varphi_0 : D \rightarrow Y^0$ . Затем, определим отображение  $\varphi_i : D \rightarrow Y^i$  из набора данных в каждое выходное пространство  $Y^i, i = 1, 2, \dots, L$  нейронной сети следующим образом:

$$\varphi_i := F^{i-1} \circ \dots \circ F^0 \circ \varphi_0, \quad i = 1, 2, \dots, L,$$

где функция  $F^i : Y^i \rightarrow Y^{i+1}, i = 0, 1, \dots, L$  является функцией преобразования координат. В остаточной сети такие преобразования принадлежат множеству непрерывно-дифференцируемых функций  $\mathcal{C}^1$ .

В остаточной сети набор данных обозначается как  $\mathcal{C}^1$ -многообразиие, а это значит, с точки зрения непрофессионала, что выходные пространства различных слоев нейронной сети можно трактовать как набор координат для точки из набора данных, то есть все выходные пространства нейронной сети представляет собой атлас этого многообразиие. А функция преобразования между слоями в остаточной сети — это функция преобразования координат между этими локальными системами координат.

Полагая, что процесс обучения нейронной сети — это нахождение набора данных в соответствующих локальных системах координат с помощью преобразований между этих системами, каждое такое преобразование задается соответствующими весами  $W$  и смещениями  $b$  слоя.

## 2.2. Процесс обучения нейронной сети с геометрической точки зрения

В задаче классификации нейронная сеть сближает удаленные точки во входных данных, принадлежащие к одному и тому же классу, и оттягивает соседние точки, принадлежащие к разным классам. Это явственно

отразится на выходных пространствах различных слоев нейронной сети, то есть, нейронная сеть может менять взаимное расположение точек в выходных пространствах различных слоев нейронной сети. Например, если две точки, находящиеся далеко друг от друга на прямой, принадлежат к одному и тому же классу, тогда нейронная сеть сблизит их с помощью изгиба этой прямой. Мы вводим понятие из римановой геометрии — кривизна, которая может измерять дисторсию окрестности точки в пространстве, благодаря чему мы можем исследовать поведение нейронных сетей, анализируя геометрические свойства входных данных в выходном пространстве различных слоев нейронной сети.

Из раздела 2.1 мы знаем, что набор данных можно понимать как  $C^1$ -многообразие, а каждое выходное пространство различных слоев нейронной сети представляет собой локальную систему координат этого многообразия. В данной задаче мы рассматриваем одномерное многообразие  $l^0(\theta)$  во входном пространстве, где  $\theta$  — скалярные координаты на этом многообразии. Обозначим данное многообразие в разных локальных системах координат (в выходных пространствах различных слоев нейронной сети) через  $l^i(\theta)$ , где  $i$  - индекс локальной системы координат (т.е. индекс выходного пространства различных слоев нейронной сети). Далее мы количественно анализируем геометрические свойства набора входных данных в выходном пространстве различных слоев нейронной сети, вычисляя внешнюю кривизну в данной точке на  $l^i(\theta)$ , и исследуем взаимосвязь между этим геометрическим свойством и точностью классификации нейронной сети. Теперь в каждой точке  $\theta$  имеет соприкасающуюся окружность, которая касается прямой в данной точке и порядок которой не ниже 2. Эта окружность является наилучшим приближением заданной кривой в окрестности данной точки. Пусть радиус окружности в данной точке равен  $R(\theta)$ , тогда внешняя кривизна  $k(\theta)$  определяется как  $k(\theta) = \frac{1}{R(\theta)}$  и зависит от вложения в выходных пространствах различных слоев нейронной сети (ее образа в локальных системах координат) и инвариантна относительно конкретной параметризации  $\theta$ . Пусть  $v^i(\theta) = \frac{\partial l^i(\theta)}{\partial \theta}$  и  $a^i(\theta) = \frac{\partial v^i(\theta)}{\partial \theta}$ , тогда точная формула для кривизны  $k^i(\theta)$  в  $i$ -м выходном пространстве различных слоев нейронной сети следующая:

$$k^i(\theta) = \frac{\sqrt{(v^i(\theta), v^i(\theta))(a^i(\theta), a^i(\theta)) - (v^i(\theta), a^i(\theta))^2}}{(v^i(\theta), v^i(\theta))^{\frac{3}{2}}}, \quad i = 0, \dots, L.$$

В своей задаче мы исследуем изменение кривизны  $k^i(\theta)$  кривой в выходном пространстве каждого из слоев нейронной сети  $Y^i$ ,  $i \in [1, L]$  при обучении сети.

### 2.3. Эксперимент

Мы утверждаем, что рекуррентная структура увеличивает способность сети преобразовывать входные данные и, таким образом, лучше подстраиваться под них. Сначала мы проверили нашу гипотезу на небольшой сети, и для этого вычислили кривизну точки на кривой. Мы изучили изменение кривизны трех остаточных сетей (неглубокой, рекуррентной и глубокой) в рамках небольшой задачи классификации, которая имеет два набора точек на плоскости. Задача состоит в том, чтобы разделить точки на две группы с помощью гиперплоскости. Каждый слой этих трех сетей состоит всего из двух нейронов: неглубокая состоит из 4 слоев, количество параметров - 24, глубокая содержит 13 слоев, количество параметров - 78, тогда как в рекуррентной сети у нас есть 1 слой с 13-ю рекуррентными шагами, а количество параметров - 6.

Изменение кривизны и оценка качества предсказаний сети показаны на рисунке 1 и в таблице 1 соответственно. Можно заметить, что внешняя кривизна увеличивается по мере увеличения количества слоев. Внешняя кривизна глубокой сети выше внешней кривизны однослойной рекуррентной сети, которая, в свою очередь, выше внешней кривизны неглубокой четырехслойной сети. Примечательно, что величина внешней кривизны положительно коррелирует с качеством классификации.

Координатное представление точек показано на рисунке 2. Мы видим, что, в сравнении с неглубокой сетью, рекуррентная преобразует координаты точек таким образом, чтобы их было легче разделить гиперплоскостями. В свою очередь это улучшает качество классификации точек.

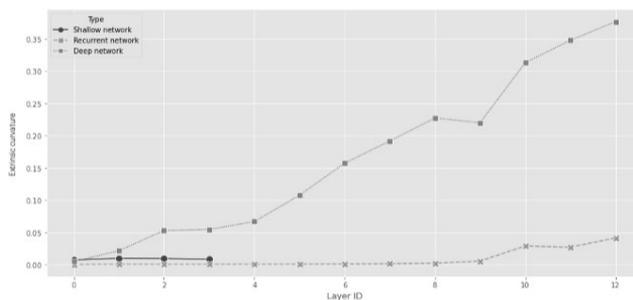


Рис. 1. Изменение внешней кривизны с увеличением количества слоев в обученной сети: глубокая сеть имеет более высокую внешнюю кривизну, нежели рекуррентная и неглубокая сети

Модель	Неглубокая	Рекуррентная	Глубокая
Потери/Точность	0.46/77%	<b>0.15/ 97%</b>	0.05/99%

Таблица 1. Потери и точность сети после обучения

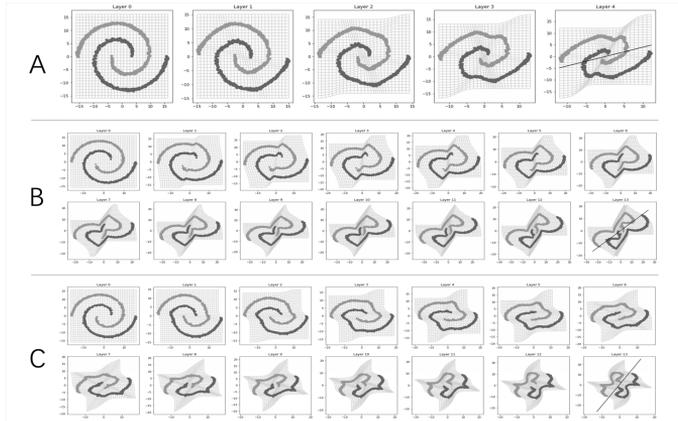


Рис. 2. Визуализация координатных представлений точек кривых, полученных для трех различных сетей: (A), (B), (C) — точки неглубокой, рекуррентной и глубокой сетей соответственно

### 3. Рекуррентные структуры на практике

Мы сравниваем изменение внешней кривизны в разных сетях на общем наборе данных. В качестве объекта исследования внешней кривизны мы выбрали Vision Transformer (ViT) [9, 10], натренированный на датасете ImageNet [11]. Далее мы используем четыре вариации ViT сети: (A) неглубокая ViT сеть, состоящая из трёх модулей трансформера; (B) рекуррентная ViT сеть, состоящая из трёх модулей трансформеров, с двух-, четырёх-, и снова двух-рекуррентными ступенями соответственно; (C) глубокая ViT, состоящая из семи трансформеров; (D) глубокая рекуррентная ViT, также состоящая из семи трансформеров, но с двумя рекуррентными ступенями в каждом трансформере. На рисунке 3 представлено изменение внешней кривизны трех сетей A, B, C. Подобные графики мы уже наблюдали в неглубоких сетях на рисунке 1. В таблице 2 представлено качество предсказаний всех четырех сетей ViT (A, B, C, D). Как можно заметить, для больших сетей внешняя кривизна также положительно коррелирует с оценкой качества сети.

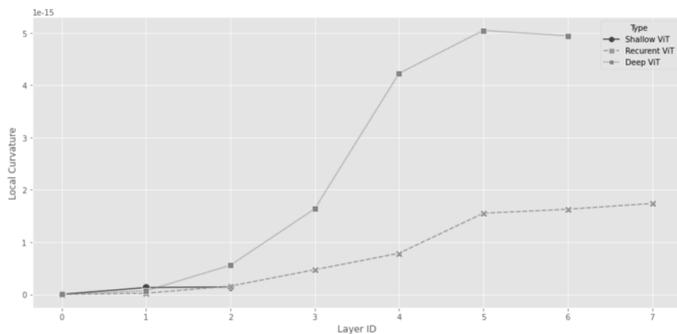


Рис. 3. Внешняя кривизна неглубокой, рекуррентной и глубокой сетей ViT

Модель	(A) 3-без	(B) 3-с	(C) 7-без	(D) 7-с
Точность	61.53	<b>67.16</b>	71.63	<b>74.57</b>

Таблица 2. Лучшая точность ViT (%) с рекуррентной структурой и без нее. Данные получены для датасета ImageNet

## 4. Заключение

Мы первыми вводим в рекуррентную структуру внешнюю кривизну как меру способности сети к преобразованию пространства данных, а также впервые вводим рекуррентную структуру в ViT, обнаруживая, что она может значительно улучшить точность классификации без дополнительных параметров. Мы демонстрируем, что с помощью рекуррентной структуры сети можно получить лучшие промежуточные представления, тем самым улучшая производительность сети. Данный факт подтверждается нами экспериментально.

## Список литературы

- [1] Lan, Zhenzhong and Chen, Mingda and Goodman, Sebastian and Gimpel, Kevin and Sharma, Piyush and Soricut, Radu, “Albert: A lite bert for self-supervised learning of language representations”, 2019.
- [2] Kubilius, Jonas and Schrimpf, Martin and Nayebi, Aran and Bear, Daniel and Yamins, Daniel LK and DiCarlo, James J, “CORnet: modeling the neural mechanisms of core object recognition”, 2018.

- [3] Pascanu, Razvan and Mikolov, Tomas and Bengio, Yoshua, “On the difficulty of training recurrent neural networks”, *International conference on machine learning*, 2013, 1310–1318.
- [4] He, Kaiming and Zhang, Xiangyu and Ren, Shaoqing and Sun, Jian, “Deep residual learning for image recognition”, *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, 2016, 770–778.
- [5] Zaeemzadeh, Alireza and Rahnavard, Nazanin and Shah, Mubarak, “Norm-preservation: Why residual networks can become extremely deep?”, *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, **43** (2020), 3980–3990.
- [6] Tarnowski, Wojciech and Warcho, Piotr and Jastrzebski, Stanislaw and Tabor, Jacek and Nowak, Maciej, “Dynamical isometry is achieved in residual networks in a universal way for any activation function”, *The 22nd International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*, 2019, 2221–2230.
- [7] Balduzzi, David and Frean, Marcus and Leary, Lennox and Lewis, JP and Ma, Kurt Wan-Duo and McWilliams, Brian, “The shattered gradients problem: If resnets are the answer, then what is the question?”, *International Conference on Machine Learning*, 2017, 342–350.
- [8] Hauser, Michael and Ray, Asok, “Principles of Riemannian geometry in neural networks”, *Advances in neural information processing system*, **30** (2017).
- [9] Dosovitskiy, Alexey and Beyer, Lucas and Kolesnikov, Alexander and Weissenborn, Dirk and Zhai, Xiaohua and Unterthiner, Thomas and Dehghani, Mostafa and Minderer, Matthias and Heigold, Georg and Gelly, Sylvain and others, “An image is worth 16x16 words: Transformers for image recognition at scale”, 2020.
- [10] Yuan, Li and Chen, Yunpeng and Wang, Tao and Yu, Weihao and Shi, Yujun and Jiang, Zi-Hang and Tay, Francis EH and Feng, Jiashi and Yan, Shuicheng, “Tokens-to-token vit: Training vision transformers from scratch on imagenet”, *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision*, 2021, 558–567.
- [11] Deng, Jia and Dong, Wei and Socher, Richard and Li, Li-Jia and Li, Kai and Fei-Fei, Li, “Imagenet: A large-scale hierarchical image database”, *2009 IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, 2009, 248–255.

## Residual network with recurrent structures

Jiang Lei, Cui Zhenyu, Wang Ziqi

We introduce a recurrent structure (spatially) on residual networks, which can improve the performance of the network while saving parameters. We investigate the behaviour of recurrent structures in residual networks based on Riemannian manifolds, introducing curvature as a metric for neural networks. We also experimentally verify that the gain due to the recurrent structure is related to the curvature, and demonstrate the generality of the recurrent structure as a method to improve the performance of the network.

**Keywords:** Neural Networks, Riemannian geometry, Recurrent structures, Manifold, Transformers.

## Список литературы

- [1] Lan, Zhenzhong and Chen, Mingda and Goodman, Sebastian and Gimpel, Kevin and Sharma, Piyush and Soricut, Radu, “Albert: A lite bert for self-supervised learning of language representations”, 2019.
- [2] Kubilius, Jonas and Schrimpf, Martin and Nayebi, Aran and Bear, Daniel and Yamins, Daniel LK and DiCarlo, James J, “CORnet: modeling the neural mechanisms of core object recognition”, 2018.
- [3] Pascanu, Razvan and Mikolov, Tomas and Bengio, Yoshua, “On the difficulty of training recurrent neural networks”, *International conference on machine learning*, 2013, 1310–1318.
- [4] He, Kaiming and Zhang, Xiangyu and Ren, Shaoqing and Sun, Jian, “Deep residual learning for image recognition”, *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, 2016, 770–778.
- [5] Zaeemzadeh, Alireza and Rahnavard, Nazanin and Shah, Mubarak, “Norm-preservation: Why residual networks can become extremely deep?”, *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, **43** (2020), 3980–3990.
- [6] Tarnowski, Wojciech and Warcho, Piotr and Jastrzebski, Stanislaw and Tabor, Jacek and Nowak, Maciej, “Dynamical isometry is achieved in residual networks in a universal way for any activation function”, *The 22nd International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*, 2019, 2221–2230.
- [7] Balduzzi, David and Frean, Marcus and Leary, Lennox and Lewis, JP and Ma, Kurt Wan-Duo and McWilliams, Brian, “The shattered

gradients problem: If resnets are the answer, then what is the question?”, *International Conference on Machine Learning*, 2017, 342–350.

- [8] Hauser, Michael and Ray, Asok, “Principles of Riemannian geometry in neural networks”, *Advances in neural information processing system*, **30** (2017).
- [9] Dosovitskiy, Alexey and Beyer, Lucas and Kolesnikov, Alexander and Weissenborn, Dirk and Zhai, Xiaohua and Unterthiner, Thomas and Dehghani, Mostafa and Minderer, Matthias and Heigold, Georg and Gelly, Sylvain and others, “An image is worth 16x16 words: Transformers for image recognition at scale”, 2020.
- [10] Yuan, Li and Chen, Yunpeng and Wang, Tao and Yu, Weihao and Shi, Yujun and Jiang, Zi-Hang and Tay, Francis EH and Feng, Jiashi and Yan, Shuicheng, “Tokens-to-token vit: Training vision transformers from scratch on imagenet”, *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision*, 2021, 558–567.
- [11] Deng, Jia and Dong, Wei and Socher, Richard and Li, Li-Jia and Li, Kai and Fei-Fei, Li, “Imagenet: A large-scale hierarchical image database”, *2009 IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, 2009, 248–255.

Часть 3.  
Математические модели

# О континуальных структурах классов конечных автоматов

С. В. Алешин<sup>1</sup>

Дается описание новых континуальных структур замкнутых классов автоматов.

**Ключевые слова:** континуальные структуры, замкнутые классы, автоматы.

Структуры замкнутых классов автоматных отображений привлекали внимание авторов с первых исследований по теории автоматов. Уже первые работы структурной теории автоматов, в частности, работы В. Б. Кудрявцева [1, 2], обнаружили континуальные семейства классов автоматов, связанные с решением задачи выразимости. Для функциональной системы автоматных отображений с операциями суперпозиции и обратной связи  $P$  им была доказана континуальность множества предполных (максимальных) классов. Его доказательство распространяется и на оператор замыкания относительно только операций суперпозиции. Однако, для этой функциональной системы сравнительно недавно Д. Н. Бабиным было доказано существование замкнутых классов, не содержащихся ни в каком предполном классе, что, конечно, создает принципиально новую ситуацию в проблематике функциональной полноты.

Другое континуальное семейство классов, предполных относительно суперпозиции и обратной связи, было обнаружено в работе [3]. Каждый из этих классов содержит множество  $K$  всех автоматных функций, в каждом состоянии у которых реализуются функции алгебры логики, существенно зависящие не более чем от одной переменной (в разных состояниях могут быть разные переменные).

Как известно, проблема полноты конечных систем автоматов из  $P$  алгоритмически неразрешима [4]. В отличие от этого, для систем функций из  $P$ , содержащих множество  $K$ , то есть имеющих вид  $KUS$ , где  $S$  — конечная система автоматов, существует алгоритм распознавания полноты таких систем [5].

Заметим также, что в  $P$  существует базис относительно операции суперпозиции [2], то есть неприводимая полная система автоматов, при

---

<sup>1</sup>Алешин Станислав Владимирович — доктор физ-мат наук, профессор, каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: stanislav.aleshin@rambler.ru.

Aleshin Stanislav Vladimirovich — Dr.Sc., Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

этом все элементы базиса, кроме автомата с одним состоянием, в котором вычисляется функция Шеффера, это автоматы из множества  $K$ .

Все сказанное привлекает внимание к множеству  $K$ , которое, как выяснилось, само обладает рядом свойств, подобных выше перечисленным свойствам класса всех автоматных функций  $P$ . Нетрудно видеть, что множество  $K$  замкнуто относительно операций суперпозиции и обратной связи, то есть является классом. Класс  $K$  является классом конечной глубины в  $P$  — достаточно добавить автомат без памяти, реализующий функцию Шеффера.

## 1. Класс $K$

Напомним стандартные определения. Через  $[\Pi]$  обозначим замыкание множества  $\Pi$  относительно операций суперпозиции и обратной связи. Множество  $\Pi$  замкнуто, если  $[\Pi] = \Pi$ . Множество  $\Pi$  называется предполным классом в  $K$ , если

- 1)  $\Pi \neq K$ ,
- 2) для любого автомата  $f \notin \Pi$  имеет место  $[\Pi \cup f] = K$ .

Предполный класс, очевидно, замкнут.

**Теорема 1.** *В  $K$  имеется континуум предполных классов.*

*Доказательство.* Доказательство, в основном, использует конструкцию, предложенную В. Б. Кудрявцевым в работе [1], которую он применил для теоремы о континуальности множества предполных в  $P$  классов. Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  — автоматная функция, а схема на рис. 1 вычисляет функцию  $W(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  такую, что при подстановке последовательности  $\gamma$  на место входной переменной  $x_{n+1}$  эта схема вычисляет автоматную функцию  $f$  :

$$f(x_1, \dots, x_n) = W(x_1, \dots, x_n, \gamma),$$

а при подстановке любой последовательности  $\beta \neq \gamma$  схема переключается в состояние, в котором вычисляется функция  $\varphi(x) = x$ . Заметим, что если о.-д. функция  $f(x_1, \dots, x_n)$ , используемая в этой схеме, принадлежит  $K$ , то есть в каждом состоянии реализуется функция алгебры логики не более чем одной переменной, то и функция принадлежит  $K$ . Поэтому эта конструкция может быть использована для класса  $K$ .

Как обычно, наряду с употреблением термина ограниченно-детерминированная функция (о.-д. функция) мы используем название «а-функция (автоматная функция)».

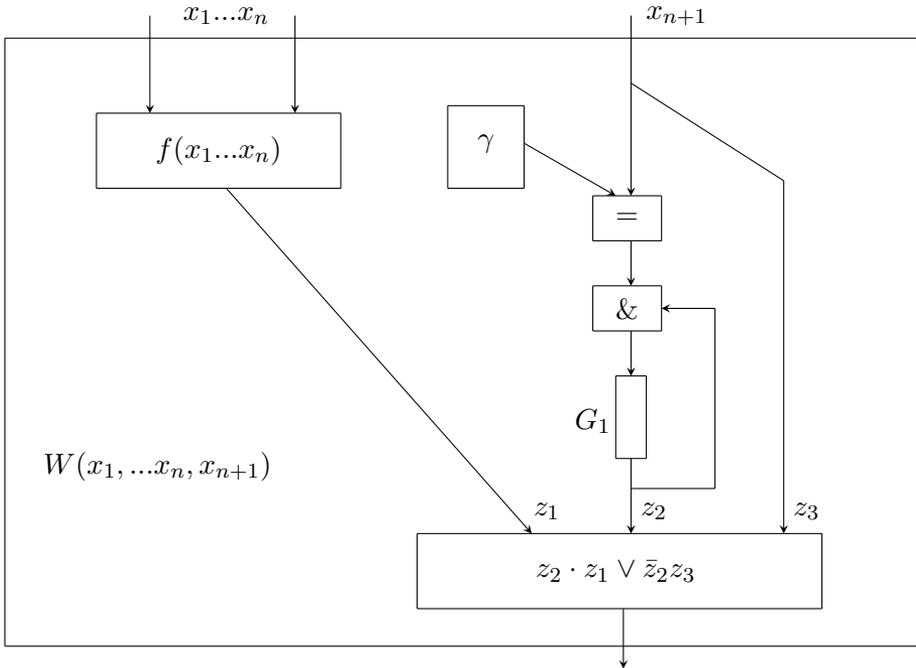


Рис. 1.

Пусть  $B$  — множество последовательностей из 0 и 1. Скажем, что а-функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  сохраняет  $B$ , если для любого набора  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  последовательностей из  $B$  значение  $f(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  принадлежит  $B$ .

Пусть  $\Gamma = \{\gamma_i \mid \gamma_i = \overbrace{0..0}^i 1 \overbrace{0..0}^i 1 \overbrace{0..0}^i 1 \dots, i = 1, 2, \dots\}$ . Для подмножества  $\Gamma' \subseteq \Gamma$  через  $] \Gamma' [$  обозначим множество последовательностей, отличающихся от последовательностей из  $\Gamma'$  в конечном числе разрядов. Очевидно, что если  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma, \Gamma_1 \neq \Gamma_2$ , то  $] \Gamma_1 [ \neq ] \Gamma_2 [$ .

Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется почти константной, если существует  $t_f$  и последовательность  $\beta = \beta(1)\beta(2)\dots$ , такие что для любого набора последовательностей  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , если  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \gamma(1)\gamma(2)\dots$ , то  $\gamma(t) = \beta(t)$  при  $t \geq t_f$ .

Скажем, что а-функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  имеет переменную  $x_i$ , обладающую  $F$ -свойством на множестве последовательностей  $B = ] \Gamma' [$ , если при подстановке на место переменной  $x_i$  последовательности  $\beta \in B$ ,  $\beta = \beta_1\beta_2\dots$  наступает момент  $t_\beta$ , в который автомат переходит в состояние, которое в дальнейшем не меняется, и в котором реализуется выходная функция  $x_i$ .

Пусть  $U(B)$ ,  $B = ]\Gamma'$ ,  $\Gamma' \subseteq \Gamma$  — множество а-функций, которое содержит

- а) любую почти константную функцию, сохраняющую  $B$ ,
- б) любую функцию, которая имеет переменную, обладающую  $F$ -свойством на  $B$ .

Нетрудно видеть, что  $U(B)$  замкнуто относительно операций суперпозиции и обратной связи.

Обозначим через  $R(\gamma, F)$  функцию от  $n+1$  переменных, вычисляемую схемой рис. 1.

$$R(\gamma, F) = W(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}).$$

Заметим, что если последовательность  $\gamma$  не содержится в множестве  $B$ , то для любой функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  имеет место  $R(\gamma, F) \in U(B)$ . Таким образом, если добавить к  $U(B)$  константную функцию  $\gamma$ , то замыкание  $[U(B) \cup \gamma] = K$ , так как для любой функции  $f$  подставляя  $\gamma$  на вход  $R(\gamma, F)$ , получим  $f$ .

Если  $B_1, B_2$  — разные подмножества  $\Gamma$ , то найдется  $\gamma$  такая, что  $\gamma \in B_1, \gamma \notin B_2$ , и, следовательно  $\gamma \in U(B_1), \gamma \notin U(B_2)$ . Поэтому  $[U(B_1) \cup U(B_2)] \supseteq [U(B_2) \cup \gamma] = K$ , т.е.  $U(B_1) \neq U(B_2)$ .

Покажем, что расширяется до предполного в класса. Разобьем множество всех функций из  $K$  на две части. В первую войдут такие функции  $\varphi$ , что  $[\varphi \cup U(B_2)] = K$ . В частности, в эту группу попадет константная функция  $\gamma$ . Во вторую группу войдут все остальные функции, эту группу мы упорядочим, элементы группы занумеруем —

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s, \dots, [\varphi_i \cup U(B_2)] \neq K.$$

Пусть  $\mathfrak{N}_1 = [\varphi_1 \cup U(B_2)] \neq K$ . Если для  $i > 1$   $\varphi_i \in \mathfrak{N}_1$ , то  $\mathfrak{N}_1$  — предполный класс. В противном случае возьмем первый номер  $i_1$  такой, что  $\varphi_{i_1} \notin \mathfrak{N}_1$ , и рассмотрим подпоследовательность  $\Pi_2$  последовательности  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ , в которую войдут все  $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots$ , такие что  $\varphi_{i_s} \notin \mathfrak{N}_1$ . Пусть  $\mathfrak{N}_2 = [\mathfrak{N}_1 \cup \varphi_{i_1}]$ , для него повторим процедуру, которую провели для  $\mathfrak{N}_1$  — либо  $\mathfrak{N}_2$  — предполный класс, либо рассмотрим  $\mathfrak{N}_3$ , и т.д.

Возможны два варианта

- 1) процесс заканчивается на некотором номере — мы построили предполный класс.
- 2) процесс бесконечен. Рассмотрим класс  $\mathfrak{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{N}_i$ .

Заметим, что  $\mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{N}_{i+1}$ . Множество  $\mathfrak{N}$  — это предполный класс. В самом деле

а)  $\mathfrak{N}$  — замкнутое множество.

б)  $\mathfrak{N} \neq P$ , поскольку  $\gamma \notin \mathfrak{N}$ .

в) если  $f \notin \mathfrak{N}$ , то  $f$  принадлежит первой части разбиения, следовательно  $[f \cup U(B_2)] = K$ .

Поскольку у множества  $\Gamma$  континуум подмножеств, теорема доказана. □

Как и при рассмотрении класса всех автоматов, в случае класса  $K$  обнаруживается второе континуальное семейство предполных множеств.

Обозначим через  $L$  множество всех автоматов из  $K$ , у которых в состояниях реализуются функции из множества  $\{0, 1, x_i, i \in N\}$ . Можно заметить, что  $K = [L \cup \bar{x}]$ .

**Теорема 2.** *В классе  $K$  имеется континуум предполных классов, каждый из которых содержит  $L$ .*

*Доказательство.* Пусть  $p_1, p_2, \dots$  — последовательность всех простых чисел,  $p_1 = 3$ . Пусть  $R_1, R_2$  — две последовательности из 0 и 1,  $R_1 = \{r_{p_1}^{(1)}, r_{p_2}^{(1)}, \dots\}$ ,  $R_2 = \{r_{p_1}^{(2)}, r_{p_2}^{(2)}, \dots\}$ ,  $r_{p_1}^{(1)} = r_{p_1}^{(2)}, \dots, r_{p_{m-1}}^{(1)} = r_{p_{m-1}}^{(2)}, r_{p_m}^{(1)} \neq r_{p_m}^{(2)}, r_{p_m}^{(1)} = 0, r_{p_m}^{(2)} = 1$ .

Для каждого  $p_i, i = 1, 2, \dots$  рассмотрим две функции переменных  $x_1, x_2$ :

$$g_{p_i}^0(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1(t), & t = d \cdot p_i + 1, d = 0, 1, \dots \\ \bar{x}_2(t), & t - \text{остальные} \end{cases}$$

$$g_{p_i}^1(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1(t), & t = d \cdot p_i + 2, d = 0, 1, 2, \dots \\ \bar{x}_2(t), & t - \text{остальные} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функции  $g_{p_i}^0, g_{p_i}^1$  принадлежат классу  $K$ .

Обозначим через  $S_{R_1}$  класс функций

$$S_{R_1} = L \bigcup_{r_{p_i} \in R_1} g_{p_i}^{(r_i)}$$

и через  $S_{R_2}$  класс функций

$$S_{R_2} = L \cup \bigcup_{r_{p_i} \in R_2} g_{p_i}^{(r_i)}.$$

Заметим, что  $r_{p_m}^{(1)} \neq r_{p_m}^{(2)}, r_{p_m}^{(1)} = 0, r_{p_m}^{(2)} = 1$ , и  $g_{p_m}^{(0)} \in S_{R_1}, g_{p_m}^{(1)} \in S_{R_2}$ , так что  $S_{R_1} \neq S_{R_2}$  и при этом

$$S_{R_1} \cup S_{R_2} \supseteq \{g_{p_m}^{(0)}(x_1, x_2), g_{p_m}^{(1)}(x_1, x_2)\}.$$

Функция

$$h_{p_m}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1(t), & t = d \cdot p_m + 1 \\ x_2(t), & t - \text{остальные} \end{cases}$$

принадлежит  $L$  так как при всех  $(x_1, x_2)$  она принимает либо значение  $x_1 \in \{0, 1, x\}$ , либо  $x_2 \in \{0, 1, x\}$ .

Рассмотрим суперпозицию

$$\begin{aligned} h_{p_m}(g_{p_m}^1(x_1, x_2), g_{p_m}^0(x_1, x_2)) &= \begin{cases} g_{p_m}^{(1)}(x_1, x_2), & t = d \cdot p_m + 1 \\ g_{p_m}^0(x_1, x_2), & \text{ост. } t \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \bar{x}_2(t), & \text{т.к. } d \cdot p_m + 1 \neq d \cdot p_m + 2 \\ \bar{x}_2(t), & \text{т.к. } t \neq d \cdot p_m + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом,  $h_{p_m}(g_{p_m}^1, g_{p_m}^0) \equiv \bar{x}_2(t)$ , следовательно

$$[S_{R_1} \cup S_{R_2}] \supseteq [L \cup \bar{x}] = K. \quad (1)$$

Кроме того, для любого  $R_i$  любая функция из  $S_{R_i}$  в некоторые моменты времени  $t$  реализует функцию  $x(t)$ : пусть взята суперпозиция функций  $g_{p_{i_1}}^{r_{i_1}}, g_{p_{i_2}}^{r_{i_2}}, \dots, g_{p_{i_s}}^{r_{i_s}}$ , тогда имеет место равенство  $g_{p_{i_1}}^{r_{i_1}} = x_1(t)$  при  $t = p_{i_2} \cdot p_{i_1} + 1$ , то есть  $x_1(t)$  при  $t = p_{i_2} \cdot p_{i_1} + 1$ ,  $g_{p_{i_2}}^{r_{i_2}} = x_1(t)$  при  $t = d \cdot p_{i_2} + 1$ ,  $d = 0, 1, \dots$ , то есть  $t = p_{i_2} \cdot p_{i_1} + 1$  при  $t = p_{i_2} \cdot p_{i_1} + 1$ .

Аналогично для  $i_1, i_2, i_3, \dots, i_s$   $g_{p_{i_k}}^{r_{i_k}} = x_1(t)$  при  $t = p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_k} + 1$ .

Таким образом  $[S_{R_i}] = K$ .

Разных множеств  $S_{R_i}$  как и разных последовательностей из 0 и 1 — континуум. При этом  $S_{R_1}, S_{R_2}$  расширяются до предполных классов  $\Pi_1, \Pi_2$ , соответственно, а из равенства (1) следует, что  $\Pi_1 \neq \Pi_2$ , что и требовалось.

Класс  $K$  наследует и такое важное свойство класса  $P$  как наличие базиса относительно суперпозиции, то есть системы (очевидно, бесконечной), в которой нет собственной полной подсистемы.  $\square$

**Теорема 3.** *В классе  $K$  существует неприводимая полная относительно суперпозиции система (базис).*

*Доказательство.* Рассмотрим систему автоматов  $\Phi = \{\bar{x}, 0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots\}$ . Представим эту систему в виде последовательности наборов  $G_0 = \{\bar{x}, 0\}, G_1 = \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{i_1}\}, G_2 = \{\Gamma_{i_1+1}, \dots, \Gamma_{i_2}\}, \dots, G_{s+1} = \{\Gamma_{i_s+1}, \dots, \Gamma_{i_{s+1}}\}, \dots$ , то есть  $\Phi = \{G_0, G_1, G_2, \dots\}$ .

Набор  $G_i, i = 1, 2, \dots$  состоит из всех автоматов с не более чем  $2^i$  состояниями,  $i = 1, 2, \dots$  и не более чем  $i$  входами, при этом в состояниях

реализуются функции  $x_m$ , в разных состояниях разные переменные. Заметим, что отождествляя переменные и подставляя константы 0 и 1, или отрицание  $\bar{x}$ , можно получить все автоматы с  $\leq 2^i$  состояниями из класса  $K$ . Таким образом, меняя  $i = 1, 2, \dots$ , получим полную в  $K$  систему относительно суперпозиции.

Покажем, как, используя систему  $\Phi$ , можно построить базис относительно суперпозиции в классе  $K$ .

Для каждого набора  $G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  возьмем набор схем  $R(A, \gamma_i)$ ,  $A \in G_1$  [рис. 1], которые «управляются» единой для всех схем набора периодической последовательностью  $\gamma_i$ , такой что  $\gamma_i \in Z_i$ , но  $\gamma_i \notin Z_{i-1}$ . Заметим, что количество схем для каждого  $i$  конечно, и возникает система конечных наборов схем  $\{R(A, \gamma_i)\}$ .

Последовательно рассматривая наборы из системы  $\{R(A, \gamma_i)\}$ , будем исключать из этих наборов те автоматы, которые выразимы через остальные автоматы. Отметим два свойства этого процесса. В силу конечности каждого набора процесс сокращения этого набора конечен. Кроме того, в каждом наборе останется по крайней мере один элемент. В противном случае этот единственный элемент  $A$  группы с номером  $i$  будет выражаться через элементы других групп. Однако все автоматы из групп с номерами меньшими  $i$  сохраняют множество последовательностей  $Z_{i-1}$ . Также и автоматы из групп с номерами большими  $i$ . Это свойство сохраняется при суперпозиции, тем самым автомат  $A$  не может быть получен суперпозицией элементов других групп, поскольку он не сохраняет множество  $Z_{i-1}$ .

Таким образом система множеств  $\Phi$  может быть сокращена до независимой системы, то есть до базиса.

□

## 2. Класс $L$

Этот класс является подклассом конечной глубины класса  $K$ . Он содержит  $\alpha$ -функции, в состояниях которых реализуются переменные или константы 0 и 1 (но не реализуются отрицания переменных). Нетрудно показать, что  $K = [L \cup \bar{x}]$ . Для класса  $L$  справедлив аналог теоремы Кудрявцева.

**Теорема 4.** *В классе  $L$  существует континуум предполных классов.*

*Доказательство.* Можно заметить, что у автомата построенного с помощью схемы из теоремы Кудрявцева, в состояниях реализуются функции из множества  $\{0, 1, x_i\}$ , что наглядно проверяется, если построить диаграмму переходов-выходов (рис. 2).

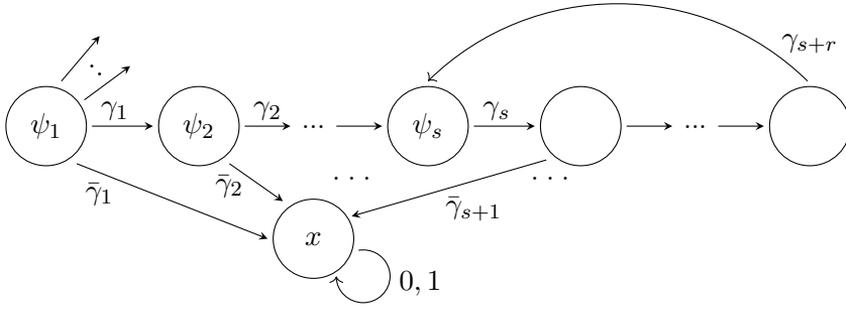


Рис. 2.

Дальше доказательство следует схеме доказательства теоремы Кудрявцева с рассмотрением континуального семейства подмножеств множества  $\Gamma$ .

□

Через  $Q$  обозначим класс автоматов, в состояниях которых реализуются функции из множества  $\{0, x_i\}$ .

**Теорема 5.** *В классе  $L$  существует континуум предполных подклассов, каждый из которых содержит подкласс  $Q$ .*

*Доказательство.* Пусть  $p_1, p_2, p_3, \dots$  — последовательность всех простых чисел,  $p_1 = 3$ . Пусть  $R_1, R_2$  — две последовательности из нулей и единиц:

$$R_1 = \{r_{p_1}^{(1)}, r_{p_2}^{(1)}, r_{p_3}^{(1)}, \dots\}; \quad R_2 = \{r_{p_1}^{(2)}, r_{p_2}^{(2)}, r_{p_3}^{(2)}, \dots\},$$

$$r_{p_1}^{(1)} = r_{p_1}^{(2)}; r_{p_2}^{(1)} = r_{p_2}^{(2)}; \dots r_{p_{m-1}}^{(1)} = r_{p_{m-1}}^{(2)}; r_{p_m}^{(1)} \neq r_{p_m}^{(2)}; r_{p_m}^{(1)} = 0; r_{p_m}^{(2)} = 1.$$

Для каждого  $p_i$  рассмотрим две функции переменных  $x_1, x_2$ :

$$g_{p_i}^{(0)}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1(t), & t = d \cdot p_i + 1, d = 0, 1, \dots \\ 1, & t - \text{остальные} \end{cases}$$

$$g_{p_i}^{(1)}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1(t), & t = d \cdot p_i + 2, d = 0, 1, \dots \\ 1, & t - \text{остальные} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функции  $g_{p_i}^{(0)}, g_{p_i}^{(1)}$  принадлежат классу  $L$ .

Обозначим через  $S_{R_1}$  множество функций

$$S_{R_1} = Q \cup \bigcup_{r_{p_i} \in R_1} g_{p_i}^{(r_i)}$$

и через  $S_{R_2}$  множество функций

$$S_{R_2} = Q \cup \bigcup_{r_{p_i} \in R_2} g_{p_i}^{(r_i)}.$$

Напомним, что  $g_{p_m}^{(0)} \in S_{R_1}, g_{p_m}^{(1)} \in S_{R_2}$  и таким образом  $S_{R_1} \neq S_{R_2}$ .

При этом

$$S_{R_1} \cup S_{R_2} \supseteq \{g_{p_m}^{(1)}(x_1, x_2), g_{p_m}^{(0)}(x_1, x_2)\}.$$

Функция

$$h_{p_m}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1(t), & t = d \cdot p_m + 1, \quad d = 1, 2, \dots \\ x_2(t), & \text{ост. } t \end{cases}$$

принадлежит  $Q$ , так как при всех  $t$  она принимает либо значение  $x_1(t)$ , либо  $x_2(t)$ .

Рассмотрим суперпозицию

$$\begin{aligned} h_{p_m}(g_{p_m}^{(1)}, g_{p_m}^{(0)}) &= \begin{cases} g_{p_m}^{(1)}(x_1, x_2), & t = d \cdot p_m + 1 \\ g_{p_m}^{(0)}(x_1, x_2), & t - \text{ост.} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 1, & \text{т.к. } t = d \cdot p_m + 1 \text{ [т.е. } \neq d \cdot p_m + 2] \\ 1, & \text{т.к. } t = d \cdot p_m + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом,  $h_{p_m}(g_{p_m}^1, g_{p_m}^0) \equiv 1$ , следовательно

$$[S_{R_1} \cup S_{R_2}] \supseteq \{\{g_{p_m}^{(1)}, g_{p_m}^{(0)}\} \cup \{0, x\} \cup \{1\}\} = L.$$

Кроме того, для любого  $i$  любая функция из  $S_{R_i}$  в некоторые моменты времени  $t$  реализует функцию  $x(t)$ .

Пусть взята суперпозиция функций  $g_{p_{i_1}}^{r_{i_1}}, g_{p_{i_2}}^{r_{i_2}}, \dots, g_{p_{i_s}}^{r_{i_s}}$ .

Тогда имеет место равенство  $g_{p_{i_1}}^{r_{i_1}} = x_1(t)$  при  $t = d \cdot p_{i_2} + 1, d = 0, 1, \dots$

То есть, в том числе при  $t = p_{i_2} \cdot p_{i_1} + 1$ .

Также имеет место равенство  $g_{p_{i_2}}^{r_{i_2}} = x_1(t)$  при  $t = p_{i_2} \cdot p_{i_1} + 1$ . То есть  $x_1(t)$  при  $t = p_{i_2} \cdot p_{i_1} + 1$ .

Аналогично для  $i_1, i_2, \dots, i_s$   $g_{p_{i_k}}^{r_{i_k}} = x_1(t), k = 1, 2, \dots, s$  при  $t = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{i_k} + 1$ .

Поэтому  $[S_{R_i}] \neq L$ .

Разных множеств  $S_{R_i}$ , как и разных последовательностей из нулей и единиц — континуум. При этом  $S_{R_1}, S_{R_2}$  — расширяются до предполных классов  $\Pi_1, \Pi_2$  соответственно, а из равенства  $[S_{R_1} \cup S_{R_2}] = L$  следует, что  $\Pi_1 \neq \Pi_2$ , что и требовалось.

□

**Теорема 6.** В классе  $L$  существует базис относительно суперпозиции.

*Доказательство.* Оно фактически повторяет доказательство теоремы о базисе в классе  $K$ . Теперь в качестве полной системы рассмотрим  $\Phi = \{0, 1, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots\}$ ,  $G_0 = \{0, 1\}$ ,  $G_1 = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{i_1}\}$ ,  $G_2 = \{\Gamma_{i_1+1}, \dots, \Gamma_{i_2}\}, \dots$

Заметим, что автоматы  $\Gamma_i, i \geq 1$  принадлежат классу  $L$ . Таким образом, можно провести построение базиса в  $L$  с помощью той же схемы рассуждений.

□

Обозначим через  $M$  класс автоматов Мура, то есть таких, у которых в состояниях реализуются константы 0 и 1. Нетрудно видеть, что класс  $L$  целиком содержит класс  $M$ .

**Теорема 7** (типа Ку). В классе  $M$  существует континуум предполных классов.

*Доказательство.* Всякая константная функция, в том числе и константы из  $\Gamma$ , содержится в  $M$ . Пусть  $U(B), B = ]\Gamma'[, \Gamma' \subseteq \Gamma$  — множество почти константных функций из  $M$ . Класс  $U(B)$  замкнут. Рассмотрим схему  $\Sigma_f$  рис. 3.

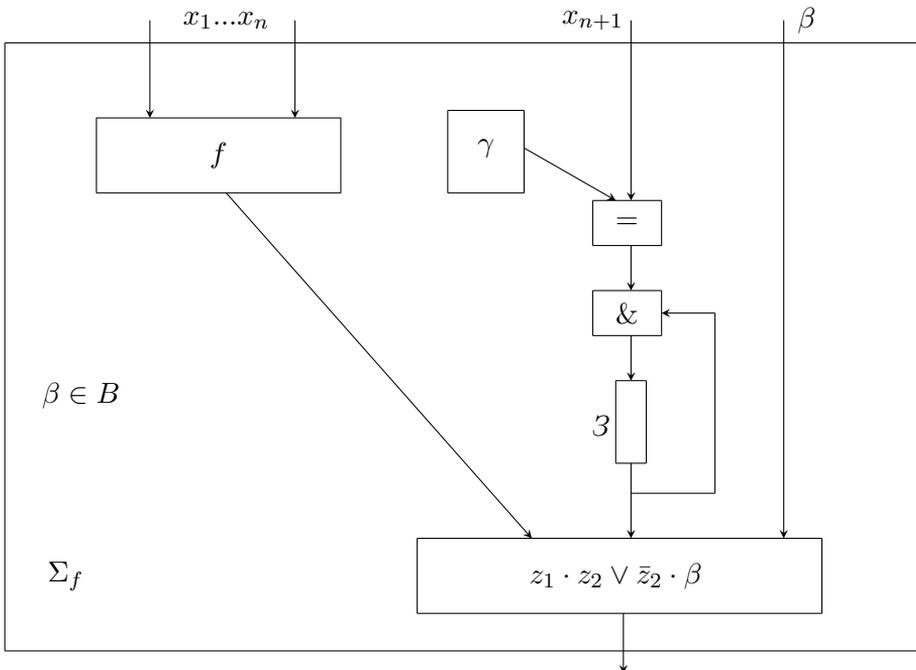


Рис. 3.

Диаграмма автомата, который реализуется схемой, частично приведена на рис. 4.

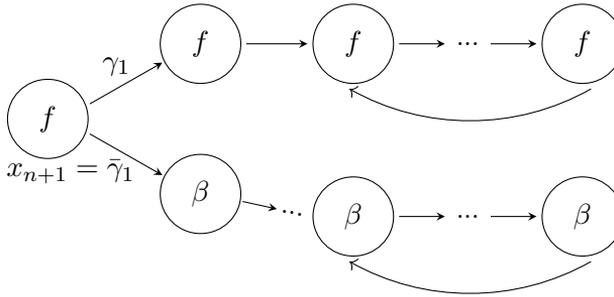


Рис. 4.

Если функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in M$  реализуется автоматом Мура, то в каждом состоянии этого автомата, очевидно, реализуется некоторая константа, то есть автомат схемы  $\Sigma_f$  — это автомат Мура.

Таким образом, для последовательности  $\gamma$  и любого автомата Мура  $f(x_1, \dots, x_n)$  существует схема  $\Sigma_f$ , такая что  $F_\Sigma = \Sigma_f(f, x_{n+1})$ , и для последовательности  $\gamma$  выполнено  $f = \Sigma_f(f, \gamma)$ . Поэтому, если  $f \in M$ , то автомат  $\Sigma_f$  содержится в  $M$ , и следовательно для всякой функции  $f \in M$  имеет место  $f \in [\gamma, \Sigma_f]$ . Следовательно  $M \subseteq [\gamma \cup \Sigma_f]$ . При этом все автоматы из  $\{\Sigma_{f,\gamma}\}$  сохраняют множество  $\{\Gamma \setminus \gamma\}$ , поэтому  $[\{\Sigma_{f,\gamma}\}] \neq M$ .

Покажем, что  $\{\Sigma_{f,\gamma}\}$  расширяется до предполного в  $M$  класса. Пусть  $\Pi_0 = \varphi_1, \varphi_2, \dots$  — последовательность всех таких автоматов, что  $[\varphi_i \cup U(B)] = M$ . Эта последовательность не пуста, так как, например, можно взять  $\varphi_i = \gamma$ .

Пусть  $\Pi_1 = \psi_1, \psi_2, \dots$  — все функции, не принадлежащие последовательности  $\Pi_0$ .

Пусть  $\mathfrak{N}_1 = [\psi_1 \cup U(B)]$ . Если для всех  $i > 1$   $[\mathfrak{N}_1 \cup \psi_i] = M$ , то  $\mathfrak{N}_1$  — предполный класс, и процесс окончен. В противном случае имеется подпоследовательность последовательности  $\Pi_1$ , которая начинается с  $i_1$ , что для  $i_1$  выполнено  $[\mathfrak{N}_1 \cup \psi_{i_1}] \neq M$ .

Снова, пусть для  $\mathfrak{N}_2 = [\mathfrak{N}_1 \cup \psi_{i_1}]$  имеет место  $\mathfrak{N}_2 \neq M$ , тогда  $\mathfrak{N}_2$  — предполный класс, иначе ... и т.д.

Если процесс бесконечен, то рассмотрим класс  $\hat{\mathfrak{N}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{N}_i$ . Этот класс предполон — выполнены условия предполноты.

Заметим, что если  $B_1 \neq B_2$ , то они расширяются до разных предполных классов. В самом деле, пусть  $\Pi_1 = \Pi_2$ . Так как  $\gamma \in B_1, \gamma \notin B_2$ , то  $[U(B_2) \cup \gamma] = M$ , следовательно  $\Pi_1 \neq \Pi_2$ . Таким образом, разным подмно-

жествам  $B_i$  соответствуют разные предполные классы, отсюда мощность множества предполных классов равна континууму. Теорема доказана.  $\square$

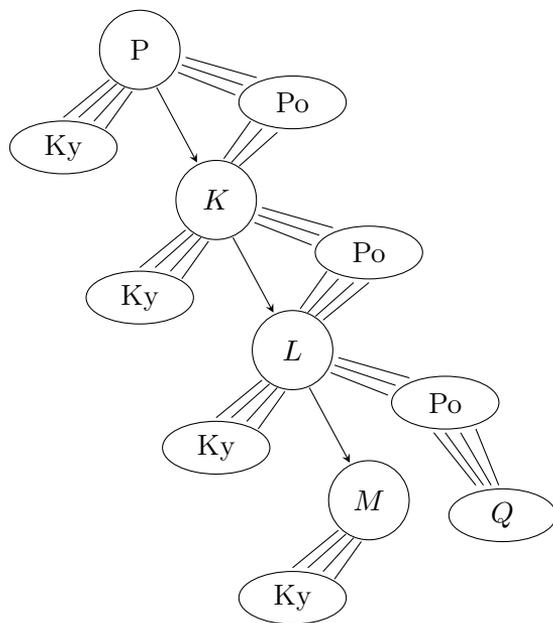


Рис. 5. Диаграмма классов.

$K_y$  — континуум классов типа континуума Кудрявцева

$P_o$  — континуум классов типа континуума Родина

$K$  — класс функций  $\langle 0, 1, x, x \rangle$ ,  $L$  — класс функций  $\langle 0, 1, x \rangle$

$M$  — класс автоматов Мура

## Список литературы

- [1] В. Б. Кудрявцев, “О мощности множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами”, *Проблемы кибернетики*, вып. 13, М. Наука (1965), 45–74.
- [2] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин, *Введение в теорию автоматов*, Издательство МГУ, 2019.
- [3] А. А. Родин, “О континуальности множества специальных предполных классов во множестве автоматных отображений”, *Интеллектуальные системы*, 16:1–4 (2012), 329–334.

- [4] М. И. Кратко, “Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов”, **155**:1, М. ДАН СССР (1964).
- [5] С. В. Алешин, *Алгебраические системы автоматов*, стр. 108–116, М., МАКС ПРЕСС, 2016.

**On continuum structures of finite automata classes**  
**Aleshin S.V.**

The description of new continuum structures of closed automata classes.

*Keywords:* continuum structures, closed classes, automata.

**References**

- [1] V. B. Kudryavcev, “O moshchnosti mnozhestv predpolnykh mnozhestv nekotorykh funktsional’nykh sistem, svyazannykh s avtomatami [On the Cardinality of Sets of Precomplete Sets of Some Functional Systems Related to Automata]”, *Problemy kibernetiki*, **13** (1965), 45–74 (in Russian).
- [2] V. B. Kudryavcev, S. V. Aleshin, A. S. Podkolzin, *Vvedenie v teoriyu avtomatov [Introduction to automata theory]*, MSU Press, 2019 (in Russian).
- [3] A. A. Rodin, “O kontinual’nosti mnozhestva spetsial’nykh predpolnykh klassov vo mnozhestve avtomatnykh otobrazhenii [On the continuity of the set of special precomplete classes in the set of automatic mappings]”, *Intelligent systems*, **16**:1–4 (2012), 329–334 (in Russian).
- [4] M. I. Kratko, “Algoritmicheskaya nerazreshimost’ problemy raspoznavaniya polnoty dlya konechnykh avtomatov [Algorithmic undecidability of the completeness recognition problem for finite automata]”, **155**:1, Doklady Akademii Nauk USSR (1964) (in Russian).
- [5] S. V. Aleshin, *Algebraicheskie sistemy avtomatov [Algebraic systems of automata]*, стр. 108–116, MaxPress, Moscow, 2016 (in Russian).

# Запросы на сравнение в задаче точной расшифровки замкнутых классов Поста

А. В. Быстрыгова<sup>1</sup>

В данной работе рассматривается точная параметро-эффективная расшифровка замкнутых классов Поста запросами на сравнение. Для всех классов приведены оценки сложности расшифровки. **Ключевые слова:** точная расшифровка, параметро-эффективная расшифровка, замкнутые классы Поста, запросы на сравнение.

## 1. Введение

Точная расшифровка булевых функций решетки Поста является объектом исследования данной работы. Рассматриваемая задача является по сути игрой между *учителем* и *учеником*. Учитель выбирает функцию одного из классов решетки, ученику известен сам класс и то, что у функции  $n$  переменных и не более  $k$  из них являются существенными. Ученик задает учителю запросы, учитель на них честно отвечает. Анализируя ответы учителя, ученик должен понять выбор учителя. В данной работе рассматривается версия задачи, в которой ученик может задавать учителю только запросы на сравнение, которые были введены в литературу сравнительно недавно [1]. Каждый запрос на сравнение — пара наборов, на которую учитель отвечает, чему равен знак разности выбранной им функции на этой паре.

При этом рассматривается задача параметро-эффективной расшифровки, поскольку для многих классов учитывается малость  $k$  относительно  $n$ . Например, при расшифровке классов функций логических сумм рассматриваются  $k = o(n)$ , а для классов линейных функций считается, что  $\log_2 k = o(\log_2 n)$ .

Стоит отметить, что данная задача уже исследовались с точки зрения сложности расшифровки запросами на значение [2, 3, 4, 5]. Поэтому интерес представляет разница результатов рассматриваемой задачи для запросов на значение, полученные в этих работах, и запросов на сравнение, рассматриваемые в этой.

В работе [6] уже рассматривалось применение запросов на сравнение в задаче параметро-эффективной расшифровки замкнутых классов

---

<sup>1</sup>Быстрыгова Анастасия Викторовна — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: anastasiya.bistrigova@yandex.com.

Bistrigova Anastasiya Viktorovna — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Поста. Было показано, что не все классы решетки Поста можно расшифровать запросами на сравнение, то есть нельзя привести алгоритм расшифровки запросами на сравнение, который определит, какая функция загадана. Оказалось, что класс нельзя расшифровать запросами на сравнение тогда и только тогда, когда в классе содержатся обе константы 0, 1. Более того, для любого класса решетки Поста алгоритм расшифровки запросами на значение можно преобразовать, не меняя количество запросов, в алгоритм расшифровки запросами на сравнение. Поэтому сложность расшифровки любого класса решетки Поста, который можно расшифровать запросами на сравнение, не больше сложности расшифровки этого же класса запросами на значение. К тому же существует классы (классы группы  $O$ ), для которых эта сложность строго меньше в случае запросов на сравнение.

Если в работе [6] в основном был сделан упор на верхние оценки сложности расшифровки замкнутых классов Поста, то в данной работе приводятся нижние оценки, позволяющие говорить в целом о характере поведения сложности расшифровки классов решетки Поста.

## 2. Основные определения и утверждения

### 2.1. Базовые определения

Если  $a$  — вещественное число, под  $\lceil a \rceil$  будем понимать наименьшее целое, не меньшее  $a$ , под  $\lfloor a \rfloor$  — наибольшее целое, не большее  $a$ .

Будем говорить, что  $A(n), B(n)$  асимптотически равны и писать  $A(n) \sim B(n)$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{B(n)} = 1$ . Будем писать  $A(n) = o(B(n))$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{B(n)} = 0$ , и  $A(n) \gtrsim B(n)$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{B(n)} > 0$ . Если  $A(n) \gtrsim B(n), B(n) \gtrsim A(n)$ , то будем говорить, что  $A(n)$  и  $B(n)$  равны по порядку при  $n \rightarrow \infty$  и обозначать  $A(n) \asymp B(n)$ .

Бинарной покрывающей матрицей  $P(n, k)$  будем называть любую бинарную матрицу с  $n$  столбцами, такую, что в любых ее  $k$  столбцах встретятся все  $2^k$  двоичных наборов. Среди всех бинарных покрывающих матриц для чисел  $n, k$  выберем ту матрицу, у которой число строк наименьшее, это количество строк обозначим через  $\alpha(n, k)$ .

Обозначим через  $S_{n,k}$  значение  $\max_{p \in \mathbb{N}, 1 \leq p < k} (2^p - 1)\alpha(n - p, k - p)$ .

### 2.2. Исследуемые классы функций

В данной работе исследуются все замкнутые классы решетки Поста, представленные на рисунке 1, словесное описание которых можно найти в работах [5, 6]. Для любого из классов Поста  $R$  под  $R(n, k)$  будем пони-

мать множество функций класса  $R$ , зависящих от  $n$  переменных, среди которых существенных переменных не более  $k$ .

### 2.3. Сложность расшифровки

*Запросом на значение  $x$  для функции  $f$  является набор  $x$ , а ответом на него является значение функции  $f$  на наборе  $x$ . Запросом на сравнение  $(x, y)$  будем называть упорядоченную пару наборов  $x, y$ , а под ответом на этот запрос понимать знак разности  $f(x) - f(y)$ .*

Будем говорить, что *последовательность запросов расшифровывает загаданную функцию  $f$* , если последовательность конечна, состоит из запросов одного типа и функция  $f$  однозначно восстанавливается по ответам на запросы этой последовательности.

В определениях, которые введем далее, через  $T \in \{MQ, CQ\}$  будем обозначать тип запроса, где  $MQ$  — запрос на значение,  $CQ$  — запрос на сравнение.

*Алгоритмом расшифровки  $A_{M,n}^T$  для запросов типа  $T$  будем называть процесс такого задания последовательности запросов типа  $T$ , что каждый элемент последовательности выбирается определенным образом в зависимости от ответов учителя на запросы — предыдущие члены последовательности, причем сформированная последовательность расшифровывает загаданную функцию  $f \in M(n)$ . Через  $\mathcal{A}_{M,n}^T$  будем обозначать множество всех алгоритмов  $A_{M,n}^T$  расшифровки для запросов типа  $T$ .*

Обозначим через  $q(A, f)$  минимальное количество первых запросов в последовательности запросов алгоритма  $A$ , которые расшифровывают функцию  $f$ . Тогда под *сложностью расшифровки запросами типа  $T$*  будем понимать число запросов типа  $T$ , которое придется задать наилучшему алгоритму для расшифровки самой плохой функции. Иными словами, сложность расшифровки запросами типа  $T$  задается следующим образом:  $\varphi_T(M, n) = \min_{A \in \mathcal{A}_{M,n}^T} \max_{f \in M(n)} q(A, f)$ .

Будем говорить, что *алгоритм расшифровывает функцию  $f \in F(n, k)$* , если ответы на запросы, заданные алгоритмом, однозначно определяют вектор значений функции  $f \in F(n, k)$ .

Будем говорить, что *класс  $F(n, k)$  можно расшифровать запросами на сравнение*, если существует алгоритм расшифровки запросами на сравнение, который для любой функции  $f \in F(n, k)$  расшифровывает  $f$ . Если про класс  $F(n, k)$  нельзя сказать, что его можно расшифровать запросами на сравнение, тогда будем говорить, что *класс  $F(n, k)$  нельзя расшифровать запросами на сравнение*.

Будем говорить, что *класс  $F$  можно расшифровать запросами на сравнение*, если для любых целых  $n, k$ , где  $n \geq k \geq 1$ , можно расшиф-

ровать запросами на сравнение класс  $F(n, k)$ . Если про класс  $F$  нельзя сказать, что его можно расшифровать запросами на сравнение, тогда будем говорить, что *класс  $F$  нельзя расшифровать запросами на сравнение*.

## 2.4. Результаты

Под условной оценкой по порядку будем понимать то, что оценка по порядку равна величине, связанной с  $\alpha(n, k)$ , порядок, а тем более асимптотику, которой мы не знаем, хотя как показано в [5] исследование  $\alpha(n, k)$  ведется уже несколько десятилетий.

Напомним, что классы из “правой” половины решетки Поста заведомо упускаются из дальнейшего рассмотрения, так как они являются двойственными к классам из “левой” половины, следовательно задача расшифровки классов из “правой” половины сводится к задаче расшифровки классов из “левой” половины.

В [6] было показано, что классы  $C_1, A_1, L_1, S_6, O_9, O_6$  нельзя расшифровать запросами на сравнение, потому что они содержат обе константы. Чтобы не терять полностью из рассмотрения эти замкнутые классы лишь по тому, что они содержат обе константы, далее все же будем рассматривать эти классы, но без константы 0, и помечать символом  $*$ . Причем заметим, что замыкание класса  $C_1^*$  совпадает с  $C_1, L_1^* - с L_1, O_9^* - с O_9, а A_1^* = A_2, S_6^* = S_3, O_6^* = O_5$ .

Стоит отметить, что верхние оценки для классов получаются использованием теоремы 2 работы [6], в которой утверждается, что сложность расшифровки фиксированного класса запросами на сравнение не больше сложности расшифровки этого класса запросами на значение. Нижние оценки получаются адаптацией доказательств нижних оценок этих классов для запросов на значение из [5]. Если в случае запросов на значение для класса нижняя оценка мощностная, то в случае запросов на сравнение она по порядку такая же. Если нижняя оценка получалась конструктивным образом, то и для запросов на сравнение она конструктивная, причем в качестве загадаваемой функции учитель выбирает для запросов на сравнение такие же, как и в случае запросов на значение.

**Теорема 1.** *Замкнутые классы решетки Поста по характеру известной на данный момент сложности точной расшифровки запросами на сравнение разделены на четыре группы в случае  $n, k \rightarrow \infty$ :*

1) *точная оценка*

- $\varphi_{CQ}(O_1, n, 1) = \lceil \log_3 n \rceil$ ;

2) *асимптотика*

- $\varphi_{CQ}(O_4, n, 1) \sim \log_3 n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(O_5, n, 1) \sim \log_3 n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(O_8, n, 1) \sim \log_3 n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(O_9^*, n, 1) \sim \log_3 n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;

3) условный порядок

- $\varphi_{CQ}(C_1^*, n, k) \asymp \alpha(n, k)$  при  $n, k \rightarrow \infty, k = o(n)$ ;
- $\varphi_{CQ}(C_2, n, k) \asymp \alpha(n, k)$  при  $n, k \rightarrow \infty, k = o(n)$ ;
- $\varphi_{CQ}(C_4, n, k) \asymp \alpha(n - 1, k - 1)$  при  $n, k \rightarrow \infty, k = o(n)$ ;
- $\varphi_{CQ}(D_1, n, k) \asymp \alpha(n - 1, k - 1)$  при  $n, k \rightarrow \infty, k = o(n)$ ;
- $\varphi_{CQ}(D_3, n, k) \asymp \alpha(n - 1, k - 1)$  при  $n, k \rightarrow \infty, k = o(n)$ ;
- если  $i > 1$  или  $i = \infty$ , то  $\varphi_{CQ}(F_1^i, n, k) \asymp S_{n,k}$  при  $n, k \rightarrow \infty, k = o(n)$ ;
- если  $i > 1$  или  $i = \infty$ , то  $\varphi_{CQ}(F_4^i, n, k) \asymp \alpha(n, k)$  при  $n, k \rightarrow \infty, k = o(n)$ .

4) порядок

- $\varphi_{CQ}(A_2, n, k) \asymp \frac{2^k}{\sqrt{k}} + k \log n$  при  $n, k \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(A_4, n, k) \asymp \frac{2^k}{\sqrt{k}} + k \log n$  при  $n, k \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(D_2, n, k) \asymp \frac{2^k}{\sqrt{k}} + k \log n$  при  $n, k \rightarrow \infty$ ;
- если  $i > 1$  или  $i = \infty$ , то  $\varphi_{CQ}(F_2^i, n, k) \asymp k \log n + \frac{2^k}{\sqrt{k}}$  при  $n, k \rightarrow \infty$ ;
- если  $i > 1$  или  $i = \infty$ , то  $\varphi_{CQ}(F_3^i, n, k) \asymp k \log n + \frac{2^k}{\sqrt{k}}$  при  $n, k \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(S_1, n, k) \asymp k \log(n/k)$  при  $n, k \rightarrow \infty, k = o(n)$ ;
- $\varphi_{CQ}(S_3, n, k) \asymp k \log(n/k)$  при  $n, k \rightarrow \infty, k = o(n)$ ;
- $\varphi_{CQ}(S_5, n, k) \asymp k \log(n/k)$  при  $n, k \rightarrow \infty, k = o(n)$ ;
- $\varphi_{CQ}(L_1^*, n, k) \asymp k \log n$  при  $n, k \rightarrow \infty, \log k = o(\log n)$ ;
- $\varphi_{CQ}(L_2, n, k) \asymp k \log n$  при  $n, k \rightarrow \infty, \log k = o(\log n)$ ;
- $\varphi_{CQ}(L_4, n, k) \asymp k \log n$  при  $n, k \rightarrow \infty, \log k = o(\log n)$ ;
- $\varphi_{CQ}(L_5, n, k) \asymp k \log n$  при  $n, k \rightarrow \infty, \log k = o(\log n)$ .

На рисунке 1 схематично приведены основные результаты этой теоремы. Если класс выделен квадратом с обеими диагоналями, тогда этот

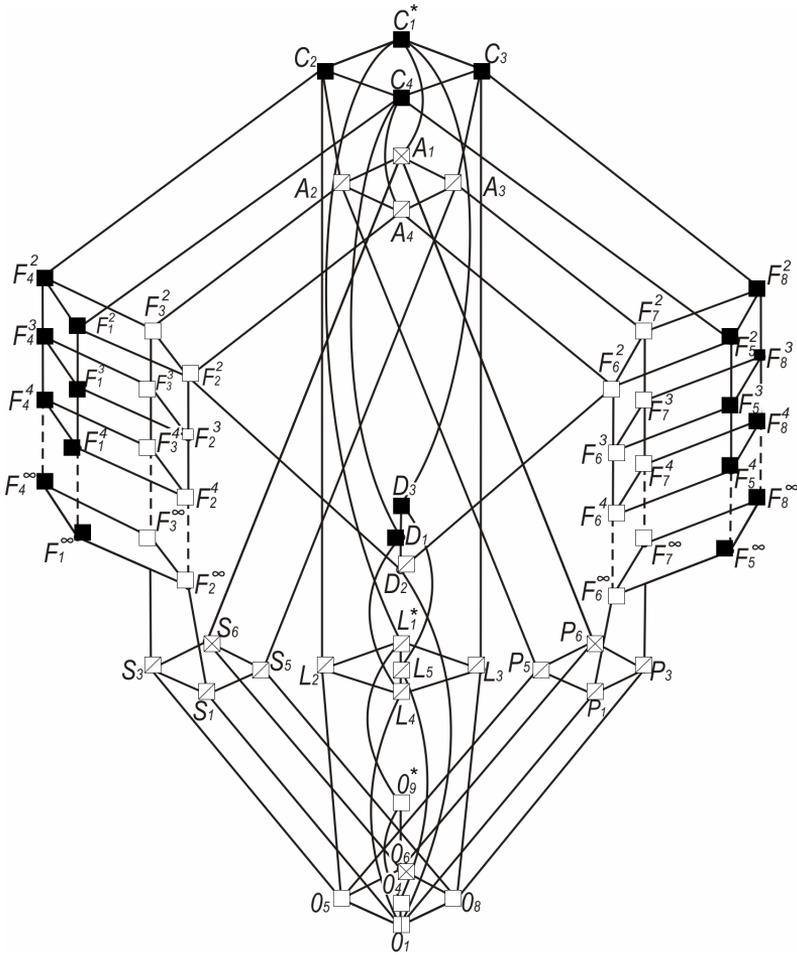


Рис. 1. Результаты сложности расшифровки замкнутых классов Поста запросами на сравнение при  $n, k \rightarrow \infty$ .

класс, согласно [6], нельзя расшифровать запросами на сравнение. Если класс выделен вертикальной чертой в квадрате, то имеется точная оценка. Если класс выделен белым, то для него получена асимптотическая оценка, если обозначен косой линией внутри квадрата, то оценка по порядку, если черным, то условная оценка по порядку.

**Теорема 2.** *Замкнутые классы решетки Поста по характеру известной на данный момент сложности точной расшифровки запросами на сравнение в случае, если  $k$  не меняется и  $n$  растет, разделены на три группы:*

1) *точная оценка*

- $\varphi_{CQ}(O_1, n, 1) = \lceil \log_3 n \rceil$ ;

2) *асимптотика*

- $\varphi_{CQ}(O_4, n, 1) \sim \log_3 n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(O_5, n, 1) \sim \log_3 n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(O_8, n, 1) \sim \log_3 n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(O_9^*, n, 1) \sim \log_3 n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;

3) *порядок*

- $\varphi_{CQ}(C_1^*, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty, k \geq 2$ ;
- $\varphi_{CQ}(C_2, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty, k \geq 2$ ;
- $\varphi_{CQ}(C_4, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty, k \geq 2$ ;
- $\varphi_{CQ}(A_2, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(A_4, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(D_1, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty, k \geq 2$ ;
- $\varphi_{CQ}(D_2, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(D_3, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty, k \geq 2$ ;
- если  $i > 1$  или  $i = \infty$ , то  $\varphi_{CQ}(F_1^i, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty, k \geq 2$ ;
- если  $i > 1$  или  $i = \infty$ , то  $\varphi_{CQ}(F_2^i, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- если  $i > 1$  или  $i = \infty$ , то  $\varphi_{CQ}(F_3^i, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- если  $i > 1$  или  $i = \infty$ , то  $\varphi_{CQ}(F_4^i, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(S_1, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(S_3, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(S_5, n, k) \asymp \log n, n \rightarrow \infty$ ;

- $\varphi_{CQ}(L_1^*, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(L_2, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(L_4, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(L_5, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

### 3. Вспомогательные определения и утверждения

Через  $M_i(n, k)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , будем обозначать любую бинарную матрицу с наименьшим числом строк и  $n$  столбцами, такую, что в любых  $k$  ее столбцах встретятся все  $2^k$  наборов кроме быть может набора, все компоненты которого равны  $i$ . Назовем ее почти покрывающей типа  $i$ , число строк в ней обозначим за  $\beta_i(n, k)$ .

Выберем произвольные различные  $k$  переменных из  $n$  и присвоим выбранным переменным произвольным образом значения из  $\{0, 1\}$ . Полученные  $k$  переменных с присвоенными им значениями назовем *фиксацией*. Будем говорить, что *запрос содержит фиксацию*, если переменные в фиксации имеют такие же значения, как и эти же переменные в запросе.

Для удобства приведем следующие две леммы, которые объединили в себе формулировки лемм 2–5 работы [5], на которые мы будем часто ссылаться в следующих разделах.

**Лемма 1.** *Справедливо неравенство  $\beta_i(n, k) \geq \alpha(n, k) - 1$ ,  $i \in \{0, 1\}$ .*

**Лемма 2.** *Справедливы следующие соотношения.*

1) При  $k = o(n)$ ,  $k, n \rightarrow \infty$

$$k \log_2 n = o(\alpha(n, k)).$$

2) При  $1 \leq p < k - 1$ ,  $k = o(n)$ ,  $k, n \rightarrow \infty$

$$k \log_2 n = o((2^p - 1)\alpha(n - p, k - p)).$$

3) При  $k = o(n)$ ,  $k, n \rightarrow \infty$

$$S_{n,k} = \max_{p \in \mathbb{N}, 1 \leq p < k} (2^p - 1)\alpha(n - p, k - p) > (2^{k-1} - 1)\alpha(n - (k - 1), k - (k - 1)).$$

**Лемма 3.** *При  $k \geq 2$ ,  $n \rightarrow \infty$  справедливо соотношение  $\alpha(n, k) \asymp \log n$ .*

*Доказательство.* Доказательство следует из нижней оценки, полученной в [7], и верхней оценки из работы [8], которые имеют место для  $k \geq 2$  и  $n \rightarrow \infty$ :

$$\alpha(n, k) \geq 2^{k-2} \cdot \alpha(n - k + 2, 2) = 2^{k-2} \log_2(n - k + 2)(1 + o(1)),$$

$$\alpha(n, k) \leq (1 + o(1)) \frac{k - 1}{\log_2 \frac{2^k}{2^k - 1}} \cdot \log_2 n.$$

□

**Лемма 4.** При  $k \geq 2$  справедливо соотношение  $S_{n,k} \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Доказательство следует из определения  $S_{n,k}$  и лемм 2, 3. □

## 4. Классы $C_i$

**Лемма 5.** Имеет место неравенство

$$\varphi_{CQ}(C_2, n, k) \geq [0.5(\alpha(n, k) - 1)].$$

*Доказательство.* Для получения нижней оценки на первые  $[0.5(\alpha(n, k) - 1)] - 1$  запросов ученика будем отвечать 0. Пока ученик не опросит все фиксации  $k$  переменных из  $n$ , он не поймет ему загадали константу 1 или функцию с ровно одним нулем в векторе значений, полученном при удалении всех фиктивных переменных. Так как  $f \in C_2(n, k)$ , то  $f(1, \dots, 1) = 1$ , следовательно ученику не интересны фиксации  $k$  переменных из  $n$  из одних единиц. Следовательно, ученик должен опросить все строки почти покрывающей матрицы типа 1. Чтобы покрыть запросами на сравнение все наборы почти покрывающей матрицы типа 1, необходимо задать как минимум  $[0.5(\alpha(n, k) - 1)]$ , что следует из леммы 1 и факта, что в один запрос на сравнение можно включить две строки почти покрывающей матрицы типа 1. □

**Лемма 6.** При  $n > 1, k > 1$  имеет место неравенство

$$\varphi_{CQ}(C_4, n, k) \geq \alpha(n - 1, k - 1) - 1.$$

*Доказательство.* Аналогично доказательству для запросов на значение в [5] необходимо заставить ученика запросами на сравнение покрыть  $n$ -местные бинарные наборы двух типов:

- 1) строки покрывающей матрицы  $M_0(n-1, k-1)$  типа 0, где столбцам матрицы соответствуют переменные  $x_2, \dots, x_n$ , а  $x_1 = 0$ ,
- 2) строки покрывающей матрицы  $M_1(n-1, k-1)$  типа 1, где столбцам матрицы соответствуют переменные  $x_2, \dots, x_n$ , а  $x_1 = 1$ .

Играем за учителя. Ученику сразу расскажем, что  $x_1$  — существенная переменная. На первые  $\alpha(n-1, k-1) - 2$  запросов ученика будем отвечать следующим образом. Если запрос имеет вид  $(a_1 a_2 a_3 \dots a_n, b_1 b_2 b_3 \dots b_n)$ , тогда ответ на него  $\text{sign}(a_1 - b_1)$ .

Учитывая лемму 1, заметим, что своими  $\alpha(n-1, k-1) - 2$  запросами на сравнение ученик покрывает максимум  $2\alpha(n-1, k-1) - 4$  различных строк упомянутого типа, а для того, чтобы покрыть все строки, ему необходимо задать  $\beta_0(n, k) + \beta_1(n, k) \geq 2\alpha(n, k) - 2$ . Соответственно, какая-то из фиксаций не покрыта запросами на сравнение и значение функции на этом наборе  $k$  переменных можно задать любым способом, поэтому обе функции, используемые при доказательстве нижней оценки в случае запросов на значение в [5], будут удовлетворять ответам учителя на  $\alpha(n-1, k-1) - 2$  запросов на сравнение.  $\square$

**Теорема 3.** *Справедливы соотношения*

- $\varphi_{CQ}(C_1^*, n, k) \asymp \alpha(n, k), n, k \rightarrow \infty, k = o(n)$ ;
- $\varphi_{CQ}(C_2, n, k) \asymp \alpha(n, k), n, k \rightarrow \infty, k = o(n)$ ;
- $\varphi_{CQ}(C_4, n, k) \asymp \alpha(n-1, k-1), n, k \rightarrow \infty, k = o(n)$ .

*Доказательство.* Доказательство первого и второго пункта теоремы следует из верхней оценки  $\alpha(n, k) + k \log_2 n$ , полученной в [5], и лемм 5, 2.

Доказательство третьего пункта теоремы следует из верхней оценки  $2\alpha(n-1, k-1) + k \log_2 n$ , полученной в [5], леммы 6 и второго пункта леммы 2 при  $p = 1$ .  $\square$

**Теорема 4.** *При  $k \geq 2$  справедливы следующие соотношения.*

- $\varphi_{CQ}(C_1^*, n, k) \asymp \log n, n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(C_2, n, k) \asymp \log n, n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(C_4, n, k) \asymp \log n, n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Доказательство следует из доказательство теоремы 3, а также леммы 3.  $\square$

## 5. Классы $A_i$

**Теорема 5.** *Справедливы соотношения*

- $\varphi_{CQ}(A_2, n, k) \asymp \frac{2^k}{\sqrt{k}} + k \log n$  при  $k, n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(A_4, n, k) \asymp \frac{2^k}{\sqrt{k}} + k \log n$  при  $k, n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Верхняя оценка для классов  $A_2, A_4$  следует из теоремы 3 из [5]. Нижняя оценка, полученная в [4], для класса  $A_1(n, k)$ , как и для классов  $A_2, A_4$  в [5], мощностная. Мощностная нижняя оценка в случае запросов на значение получается логарифмированием количества функций из класса по основанию 2. В случае запросов на сравнение это основание заменяется на 3, поэтому оценка сложности расшифровки при  $k, n \rightarrow \infty$  по порядку остается той же  $\frac{2^k}{\sqrt{k}} + k \log n$ .  $\square$

Как следствие из этой теоремы получаем следующую теорему.

**Теорема 6.** *Справедливы соотношения*

- $\varphi_{CQ}(A_2, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(A_4, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

## 6. Классы $D_i$

**Лемма 7.** *Для  $k > 1$  имеет место неравенство*

$$\varphi_{CQ}(D_3, n, k) \geq [0.5\alpha(n-1, k-1)].$$

*Доказательство.* На все  $[0.5\alpha(n-1, k-1)] - 1$  запросов ученика будем отвечать следующим образом. Если запрос на сравнение имеет вид  $(a_1 a_2 \dots a_n, b_1 b_2 \dots b_n)$ , тогда ответим  $\text{sign}(a_1 - b_1)$ . Тогда аналогично доказательству подобной леммы для запросов на значение в [5] утверждается, что ученик обязан своими запросами покрыть все строки какой-то покрывающей матрицы  $\alpha(n-1, k-1)$ , где столбцы матрицы соответствуют переменным  $x_2, x_3, \dots, x_n$ . По сути, в начале игры ученику раскрывается информация о том, что переменная  $x_1$  точно существенная, а ему уже остается своими запросами понять, имеются ли еще какие-то существенные переменные помимо  $x_1$ .

Рассмотрим запросы, которые задает ученик. Каждый набор из запроса преобразуем следующим образом:

- если  $x_1 = 0$  в наборе, то оставим набор без изменений;
- если  $x_1 = 1$  в наборе, то инвертируем все переменные в нем.

Теперь рассмотрим все преобразованные запросы. Всего наборов ровно  $2[0.5\alpha(n-1, k-1)] - 2$ . Значит ученик не опросил какую-то фиксацию  $k-1$  переменной из переменных  $x_2, x_3, \dots, x_n$ . Фиксируем одну такую фиксацию, а затем зафиксируем любой  $n$ -местный набор, содержащий эту фиксацию. Заметим, что значение функции на этом наборе можно зафиксировать любым способом, то есть либо 0, либо 1.

Если значение на этом наборе установить равным значению переменной  $x_1$ , тогда всем  $[0.5\alpha(n-1, k-1)] - 1$  запросам ученика будет удовлетворять функция  $x_1 \in D_3(n, k)$ .

Если значение на этом наборе установить равным значению  $\bar{x}_1$ , тогда всем  $[0.5\alpha(n-1, k-1)] - 1$  запросам ученика будет удовлетворять функция, у которой существенными являются только все переменные зафиксированной фиксации и переменная  $x_1$ . Иными словами, во втором случае получилась бы самодвойственная функция, у которой при выбрасывании всех фиктивных переменных ( $n-k$  штук) вектор значений в первой его половине содержит ровно одну единицу, то есть функция принадлежит классу  $D_3(n, k)$ .

Таким образом, не задав последнего  $[0.5\alpha(n-1, k-1)]$ -го запроса ученик не знает, какая функция загадана:  $x_1$  или функция с ровно  $k$  существенными переменными.  $\square$

**Лемма 8.** *Для любого  $k > 1$  имеет место неравенство*

$$\varphi_{CQ}(D_1, n, k) \geq [0.5(\alpha(n-1, k-1) - 1)].$$

*Доказательство.* Ученик знает, что значение функции на наборе  $(0, \dots, 0)$  равно 0, а на наборе  $(1, \dots, 1)$  в силу самодвойственности функции — 1.

На все  $[0.5(\alpha(n-1, k-1) - 1)] - 1$  запросов ученика будем отвечать следующим образом. Если запрос на сравнение имеет вид  $(a_1 a_2 \dots a_n, b_1 b_2 \dots b_n)$ , тогда ответим  $sign(a_1 - b_1)$ .

Далее доказательство повторяет доказательство леммы 7 с той лишь разницей, что теперь утверждается, что ученик обязан своими запросами покрыть все  $\beta_0(n-1, k-1)$  строки какой-то почти покрывающей матрицы типа 0, где столбцы матрицы соответствуют переменным  $x_2, x_3, \dots, x_n$ .

Рассмотрим запросы, которые задает ученик. Каждый набор из запроса преобразуем следующим образом:

- если  $x_1 = 0$  в наборе, то оставим набор без изменений;
- если  $x_1 = 1$  в наборе, то инвертируем все переменные в нем.

Теперь рассмотрим все преобразованные запросы. Всего наборов ровно  $2[0.5(\alpha(n-1, k-1) - 1)] - 2$ . Согласно лемме 1 верно соотношение

$\beta_0(n-1, k-1) \geq \alpha(n-1, k-1) - 1$ , поэтому своими  $\lceil 0.5(\alpha(n-1, k-1) - 1) \rceil - 1$  запросами на сравнение ученик покрыл точно не все строки ни одной из почти покрывающих матриц типа 0. Значит ученик не опросил какую-то фиксацию  $k - 1$  переменной из переменных  $x_2, x_3, \dots, x_n$ . Среди неопрошенных фиксаций точно имеется фиксация отличная от полностью нулевой. В противном случае, неопрошенную строку почти покрывающей матрицы типа 0 можно было бы выкинуть из матрицы, а значит исходная матрица была не минимальной. Фиксируем любую неопрошенную ненулевую фиксацию, а затем зафиксируем любой  $n$ -местный набор, содержащий эту фиксацию. А далее полностью повторяем доказательство леммы 7.  $\square$

**Лемма 9.** *Имеет место неравенство*

$$\varphi_{CQ}(D_2, n, k) \gtrsim k \log(n/k) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{k-1}}{\sqrt{k}}$$

при  $k, n \rightarrow \infty, k < n$ .

*Доказательство.* Результат леммы получается заменой основания логарифма с 2 на 3 в доказательстве мощностной нижней оценке сложности расшифровки этого же класса для случая запросов на значение (лемма 11 в [5]).  $\square$

**Теорема 7.** *Имеют место следующие соотношения.*

- 1)  $\varphi_{MQ}(D_3, n, k) \asymp \alpha(n-1, k-1)$  при  $k, n \rightarrow \infty, k = o(n)$ .
- 2)  $\varphi_{MQ}(D_1, n, k) \asymp \alpha(n-1, k-1)$  при  $k, n \rightarrow \infty, k = o(n)$ .
- 3)  $\varphi_{MQ}(D_2, n, k) \asymp \frac{2^k}{\sqrt{k}} + k \log n$  при  $k, n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Верхние оценки для всех классов совпадают с такими в случае запросов на значение из [5]. Соотношение для класса  $D_3$  следует из лемм 7, 2 при  $p = 1$ . Соотношение для класса  $D_1$  следует из лемм 8, 2 при  $p = 1$ . Нижняя оценка для класса  $D_2$  следует из леммы 9.  $\square$

**Теорема 8.** *Верны следующие соотношения.*

- 1)  $\varphi_{CQ}(D_1, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty, k \geq 2$ .
- 2)  $\varphi_{CQ}(D_2, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty$ .
- 3)  $\varphi_{CQ}(D_3, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty, k \geq 2$ .

*Доказательство.* Доказательство следует из доказательства теоремы 7 и леммы 3.  $\square$

## 7. Классы $F_i^j, 1 \leq j \leq 4$

**Лемма 10.** *Имеет место неравенство*

$$\varphi_{CQ}(F_4^i, n, k) \geq [0.5(\alpha(n, k) - 1)].$$

*Доказательство.* Аналогично доказательству леммы 12 из [5], в роли учителя выберем константу 1 и отвечать на все запросы ученика будем в соответствии с выбранной функцией. Тогда своими запросами на сравнение ученик должен покрыть все строки почти покрывающей матрицы типа 1. Если ученик не опросит хотя бы одну строку, будет не опрошена хотя бы одна фиксация. На наборе с этой фиксацией значение может быть как 0, так и 1. Если значение на нем равно 0, то ученик бы понял, что одна из ранее не встречавшихся фиксаций, отличных от фиксации из одних единиц, и содержит все номера существенных переменных. Учитывая то, что один запрос на сравнение покрывает не более двух строк почти покрывающей матрицы типа 1, а также вспоминая лемму 1, получаем неравенство доказываемой леммы.  $\square$

**Лемма 11.** *Имеет место неравенство*

$$\varphi_{CQ}(F_2^\infty, n, k) \gtrsim k \log(n/k) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{k-1}}{\sqrt{k-1}}$$

при  $k, n \rightarrow \infty, k < n$ .

*Доказательство.* Нижняя оценка сложности расшифровки запросами на сравнение класса  $F_2^\infty(n, k)$  также как и в случае запросов на значение — мощностная. Поэтому результат леммы получается заменой основания логарифма с 2 на 3 в доказательстве мощностной нижней оценке сложности расшифровки этого же класса для случая запросов на значение.  $\square$

**Лемма 12.** *Пусть  $i > 1, k > 1, 1 \leq p < k, p$  — целое. Тогда справедливо неравенство*

$$\varphi_{CQ}(F_1^i, n, k) \geq [0.5(2^p - 1)\alpha(n - p, k - p)].$$

*Доказательство.* Доказательство опирается на доказательство леммы 14 в [5]. Учитель отвечает на запросы ученика так, чтобы ответам на все запросы кроме последнего заданного удовлетворяли две функции, которые использовались в доказательстве упомянутой леммы:  $x_1|x_2| \dots |x_p$  и функция, отличающаяся от  $x_1|x_2| \dots |x_p$  ровно в одном наборе и равная 1 на всех наборах с  $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 1$ .

Напомним, что в [5] различались следующие три категории  $n$ -местных наборов  $x_1x_2 \dots x_n$ :

- 1)  $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$ ,
- 2)  $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 1$ ,
- 3) остальные наборы.

Также напомним, что считается, что группа наборов с фиксированными значениями переменных  $x_1, x_2, \dots, x_p$  опрошена, если были опрошены все фиксации из  $k$  переменных, в которые вошли переменные  $x_1, x_2, \dots, x_p$  с этими фиксированными значениями.

Заметим, что мы могли ученику подсказать, что значение функции на наборах группы второй категории равно 1, и он мог не опрашивать их. Тем не менее, все наборы групп первой и третьей категории он обязан задать, потому что не задав хотя бы один из этих запросов, у него нет уверенности,  $p$  или больше существенных переменных у загаданной функции. Для того, чтобы опросить все группы наборов за исключение группы наборов второй категории, в случае запросов на значение ученику необходимо было задать  $(2^p - 1)\alpha(n - p, k - p)$  запросов. Вспоминая, что один запрос на сравнение включает в себя два набора, получаем неравенство доказываемой леммы.  $\square$

**Теорема 9.** *Справедливы соотношения*

- если  $i > 1$  или  $i = \infty$ , то  $\varphi_{CQ}(F_4^i, n, k) \asymp \alpha(n, k)$  при  $k, n \rightarrow \infty, k = o(n)$ ;
- если  $i > 1$  или  $i = \infty$ , то  $\varphi_{CQ}(F_1^i, n, k) \asymp S_{n,k}$  при  $k, n \rightarrow \infty, k = o(n)$ ;
- если  $i > 1$  или  $i = \infty$ , то  $\varphi_{CQ}(F_2^i, n, k) \asymp k \log n + \frac{2^k}{\sqrt{k}}$  при  $k, n \rightarrow \infty$ ;
- если  $i > 1$  или  $i = \infty$ , то  $\varphi_{CQ}(F_3^i, n, k) \asymp k \log n + \frac{2^k}{\sqrt{k}}$  при  $k, n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* В качестве верхних оценок всех классов берутся верхние оценки сложности расшифровки запросами на значение из работы [5]. Соотношение, касающееся класса  $F_4^i(n, k)$ , следует из лемм 10, 2. Соотношение, касающееся класса  $F_1^i(n, k)$ , следует из лемм 12, 2. Соотношения, касающиеся классов  $F_2^i(n, k), F_3^i(n, k)$ , следует из леммы 11, потому что класс  $F_2^\infty(n, k)$  вкладывается в классы  $F_2^i(n, k), F_3^i(n, k)$ .  $\square$

**Теорема 10.** *Справедливы соотношения*

- если  $i > 1$  или  $i = \infty$ , то  $\varphi_{CQ}(F_1^i, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty, k \geq 2$ ;
- если  $i > 1$  или  $i = \infty$ , то  $\varphi_{CQ}(F_2^i, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;

- если  $i > 1$  или  $i = \infty$ , то  $\varphi_{CQ}(F_3^i, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty$ ;
- если  $i > 1$  или  $i = \infty$ , то  $\varphi_{CQ}(F_4^i, n, k) \asymp \log n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Доказательство всех пунктов следует из доказательства теоремы 9 и лемм 3, 4.  $\square$

## 8. Классы $S_i$

В работе [5] для классов группы  $S_i$  получены асимптотические оценки сложности расшифровки запросами на значение, причем нижние оценки — мощностные. Поэтому заменив в нижних оценках основание логарифма с 2, используемого для запросов на значение, на 3, применяемого для запросов на сравнение, несложно получить порядок сложности расшифровки этих классов запросами на сравнение.

**Теорема 11.** *Справедливы соотношения*

- $\varphi_{CQ}(S_1, n, k) \asymp k \log(n/k), n, k \rightarrow \infty, k = o(n)$ ;
- $\varphi_{CQ}(S_3, n, k) \asymp k \log(n/k), n, k \rightarrow \infty, k = o(n)$ ;
- $\varphi_{CQ}(S_5, n, k) \asymp k \log(n/k), n, k \rightarrow \infty, k = o(n)$ .

**Теорема 12.** *Справедливы соотношения*

- $\varphi_{CQ}(S_1, n, k) \asymp \log(n), n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(S_3, n, k) \asymp \log(n), n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(S_5, n, k) \asymp \log(n), n \rightarrow \infty$ .

## 9. Классы $L_i$

Для классов линейных функций в случае запросов на значение в [5] была получена асимптотическая оценка сложности расшифровки и причем нижние оценки — мощностные. Поэтому аналогично предыдущему разделу, легко получить порядок сложности расшифровки классов  $L_i$  запросами на сравнение.

**Теорема 13.** *Справедливы соотношения*

- $\varphi_{CQ}(L_1^*, n, k) \asymp k \log n, n, k \rightarrow \infty, \log k = o(\log n)$ ;
- $\varphi_{CQ}(L_2, n, k) \asymp k \log n, n, k \rightarrow \infty, \log k = o(\log n)$ ;
- $\varphi_{CQ}(L_4, n, k) \asymp k \log n, n, k \rightarrow \infty, \log k = o(\log n)$ ;

- $\varphi_{CQ}(L_5, n, k) \asymp k \log n, n, k \rightarrow \infty, \log k = o(\log n)$ .

**Теорема 14.** *Справедливы соотношения*

- $\varphi_{CQ}(L_1^*, n, k) \asymp \log n, n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(L_2, n, k) \asymp \log n, n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(L_4, n, k) \asymp \log n, n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(L_5, n, k) \asymp \log n, n \rightarrow \infty$ .

## 10. Классы $O_i$

**Лемма 13.** *Для  $n > 1$  справедливы следующее соотношение:*

1) соотношение  $\lfloor \log_3 n + \log_3 2 \rfloor = \lfloor \log_3 n \rfloor$  справедливо в одном из двух случаев:

- $\log_3 n$  — нецелое и  $(\log_3 n + \log_3 2)$  — целое,
- оба  $\log_3 n$  и  $(\log_3 n + \log_3 2)$  — нецелые и верно равенство

$$\lfloor \log_3 n \rfloor = \lfloor \log_3 n + \log_3 2 \rfloor,$$

2) соотношение  $\lfloor \log_3 n + \log_3 2 \rfloor = \lfloor \log_3 n \rfloor + 1$  справедливо в одном из двух случаев:

- $\log_3 n$  — целое и  $(\log_3 n + \log_3 2)$  — нецелое,
- оба  $\log_3 n$  и  $(\log_3 n + \log_3 2)$  — нецелые, и выполнено равенство

$$\lfloor \log_3 n \rfloor = \lfloor \log_3 n + \log_3 2 \rfloor - 1.$$

*Доказательство.* Случай, когда  $\log_3 n$  и  $(\log_3 n + \log_3 2)$  — целые, невозможен, в силу того, что  $\log_3 2$  нецелое, а значит сумма  $\log_3 n + \log_3 2$  тоже нецелая при целом  $\log_3 n$ .

Докажем первый пункт леммы.

Случай, когда оба  $\log_3 n$  и  $(\log_3 n + \log_3 2)$  — нецелые, и выполнено равенство

$$\lfloor \log_3 n \rfloor = \lfloor \log_3 n + \log_3 2 \rfloor.$$

Равенство первого пункта леммы верно.

Случай, когда  $\log_3 n$  — нецелое и  $(\log_3 n + \log_3 2)$  — целое, причем в этом случае очевидно, что выполнено равенство

$$\lfloor \log_3 n \rfloor = \lfloor \log_3 n + \log_3 2 \rfloor - 1 = \log_3 n + \log_3 2 - 1.$$

Равенство первого пункта леммы верно.

Докажем второй пункт леммы.

Случай, когда  $\log_3 n$  — целое и  $(\log_3 n + \log_3 2)$  — нецелое, причем очевидно выполнение равенства  $\log_3 n = \lfloor \log_3 n \rfloor = \lfloor \log_3 n + \log_3 2 \rfloor$ .

Равенство второго пункта леммы верно.

Случай, когда оба  $\log_3 n$  и  $(\log_3 n + \log_3 2)$  — нецелые, и выполнено равенство

$$\lfloor \log_3 n \rfloor = \lfloor \log_3 n + \log_3 2 \rfloor - 1.$$

Равенство второго пункта леммы верно. □

**Теорема 15.** *При  $n > 1$  справедливы соотношения*

- $\varphi_{CQ}(O_1, n, 1) = \lfloor \log_3 n \rfloor$ ;
- $\varphi_{CQ}(O_4, n, 1) \sim \log_3 n, n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(O_5, n, 1) \sim \log_3 n, n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(O_8, n, 1) \sim \log_3 n, n \rightarrow \infty$ ;
- $\varphi_{CQ}(O_9^*, n, 1) \sim \log_3 n, n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Точная оценка  $\lfloor \log_3 n \rfloor$  для класса  $O_1$  и верхняя оценка  $\lfloor \log_3 n \rfloor + 1$  для класса  $O_4$  следует из теоремы 3 в [6].

Нижняя мощностная оценка для класса  $O_4$  следующая:

$$\varphi_{CQ}(O_4, 1, n) \geq \lfloor \log_3(2n) \rfloor = \lfloor \log_3 n + \log_3 2 \rfloor.$$

Согласно лемме 13, при определенных значениях  $n$  оценка  $\lfloor \log_3 n + \log_3 2 \rfloor$  равна значению  $\lfloor \log_3 n \rfloor + 1$ , то есть совпадает с верхней оценкой для класса  $O_4$ , но при каких-то значениях нижняя оценка строго на 1 меньше верхней оценки. Несмотря на такое отличие в некоторых случаях верхней и нижней оценок, второй пункт теоремы доказан.

Для получения верхней оценки  $\varphi_{CQ}(O_5, n, 1)$  или  $\varphi_{CQ}(O_8, n, 1)$  предлагается следующий алгоритм расшифровки: узнаем значение на запросе  $(0 \dots 0, 1 \dots 1)$ , если ответ равен 0, то загадана единственная в классе константа, иначе загадана функция  $x_i (1 \leq i \leq n)$ . В случае функции  $x_i$  применяем алгоритм расшифровки, описанный в доказательстве утверждения 4 в [6], для нахождения за  $\lfloor \log_3 n \rfloor$  запросов на сравнение номера существенной переменной. Поэтому сложность расшифровки классов  $O_5, O_8$  не превосходит  $\lfloor \log_3 n \rfloor + 1$ . Нижняя оценка для обоих классов мощностная и не меньше  $\lfloor \log_3(n+1) \rfloor$ , что совпадает с  $\lfloor \log_3 n \rfloor + 1$  при

целом  $\log_3 n$  и на 1 меньше  $\lceil \log_3 n \rceil + 1$  в остальных случаях. Третий и четвертый пункты теоремы доказаны.

Нижняя мощностная оценка для класса  $O_9^*$  следующая:

$$\varphi_{CQ}(O_9^*, 1, n) \geq \lceil \log_3(2n + 1) \rceil \geq \lceil \log_3 n + \log_3 2 \rceil.$$

Для получения верхней оценки  $\varphi_{CQ}(O_9^*, n, 1)$  предлагается следующий алгоритм расшифровки: узнаем значение на запросе  $(0 \dots 0, 1 \dots 1)$ . Если ответ равен 0, то загадана единственная в классе константа 1. Если ответ равен 1, то загадан селектор  $x_i (1 \leq i \leq n)$ . Если ответ равен -1, то загадано отрицание селектора  $\bar{x}_i (1 \leq i \leq n)$ . Аналогично предыдущим рассматриваемым пунктам получаем верхнюю оценку

$$\varphi_{CQ}(O_9^*, 1, n) \leq 1 + \lceil \log_3 n \rceil.$$

□

## 11. Теорема о сложности расшифровки для всех классов Поста

Теорема 1 получается объединением результатов теорем 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Теорема 2 является объединением результатов теорем 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15.

## 12. Благодарности

Автор приносит благодарность научному руководителю профессору Э. Э. Гасанову за постановку задачи и помощь в работе.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект”.

## Список литературы

- [1] Гасанов Э. Э., “Расшифровка линейных функций ранжирования”, *Материалы XI Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 18-23 июня 2012 г.)*, 2012, 332–334.
- [2] R. Uehara, K. Tsuchida, I. Wegener, “Optimal Attribute-Efficient Learning Of Disjunction, Parity, And Threshold Functions”, *EuroCOLT '97 Proceedings of the Third European Conference on Computational Learning Theory*, 1997.

- [3] T. Hofmeister, “An Application of Codes to Attribute-Efficient Learning”, *EuroCOLT'99 Proceedings of the 4th European Conference on Computational Learning Theory*, 1999.
- [4] В. В. Осокин, “О расшифровке монотонных булевых функций с несущественными переменными”, *Дискрет. матем.*, **22**:3 (2010), 134–145.
- [5] А. В. Быстрыгова, “Параметро-эффективная расшифровка булевых функций из замкнутых классов Поста”, *Дискрет. матем.*, **31**:2 (2019), 34–58.
- [6] А. В. Быстрыгова, “Запросы на сравнение в задаче параметро-эффективной расшифровки булевых функций”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:4 (2019), 115–124.
- [7] K. Sarkar, C.J.Colbourn, A.D. Bonis, U. Vaccaro, “Partial Covering Arrays: Algorithms and Asymptotics”, International Workshop on Combinatorial Algorithms IWOCA 2016: Combinatorial Algorithms, 437–448.
- [8] A. Godbole, D. Skipper, R. Sunley, “t-Covering Arrays: Upper Bounds and Poisson Approximations”, *Combinatorics, Probability Computing*, **5** (1996), 105–117.

**Using comparison queries in exact learning of Post closed classes**  
**Bistrigova A.V.**

We consider exact attribute-efficient learning of functions from Post closed classes using comparison queries and obtain bounds on learning complexity.

*Keywords:* exact learning, attribute-efficient learning, Post lattice of closed classes, comparison queries.

## References

- [1] E. E. Gasanov, “Learning of linear ranking functions”, *Proceedings of the XI International Seminar «Discrete Mathematics and its Applications» (Moscow, June 18-23)*, 2012, 332–334.
- [2] R. Uehara, K. Tsuchida, I. Wegener, “Optimal Attribute-Efficient Learning Of Disjunction, Parity, And Threshold Functions”, *EuroCOLT '97 Proceedings of the Third European Conference on Computational Learning Theory*, 1997.

- [3] T. Hofmeister, “An Application of Codes to Attribute-Efficient Learning”, *EuroCOLT’99 Proceedings of the 4th European Conference on Computational Learning Theory*, 1999.
- [4] V.V. Osokin, “On learning monotone Boolean functions with irrelevant variables”, *Discrete Mathematics and Applications*, **20**:3 (2010), 307–320.
- [5] A. V. Bystrygova, “Attribute-efficient learning of Boolean functions from Post closed classes”, *Discrete Mathematics and Applications*, **30**:5 (2020), 285–301.
- [6] A. V. Bistrigova, “Using comparison queries in attribute-efficient learning of Boolean functions”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **23**:4 (2019), 115–124.
- [7] K. Sarkar, C.J.Colbourn, A.D. Bonis, U. Vaccaro, “Partial Covering Arrays: Algorithms and Asymptotics”, International Workshop on Combinatorial Algorithms IWOCA 2016: Combinatorial Algorithms, 437–448.
- [8] A. Godbole, D. Skipper, R. Sunley, “t-Covering Arrays: Upper Bounds and Poisson Approximations”, *Combinatorics, Probability Computing*, **5** (1996), 105–117.

# Оценки энергопотребления для класса объёмных схем с близкими выходами.

А. А. Ефимов<sup>1</sup>

В данной работе рассматриваются объёмные схемы, являющиеся укладкой схем функциональных элементов в пространстве. Был рассмотрен класс  $T_{\text{near}}$  схем, где выходы расположены рядом. Для этого класса получены нижняя и верхняя оценка потенциала — меры мощности, равной количеству элементов схемы, выдающих единицу на данном входном наборе. В частности показано, что для булевых операторов с  $n$  входами и  $m$  выходами порядок функции Шеннона для класса схем  $T_{\text{near}}$  равен  $\Theta\left(\frac{m}{n} \cdot \min^{1/3}(m, 2^{n/2}) \cdot 2^{n/3}\right)$  при  $m \geq n$ ,  $\log_2(m) = o(2^n)$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

**Ключевые слова:** схемы из функциональных элементов, объёмные схемы, мощность схемы, потенциал.

## 1. Введение

Ещё в середине XX века в связи с интенсивным развитием вычислительной техники возникла задача синтеза схем, вычисляющих булевы функции и операторы. Одной из основных и наиболее подробно исследованных моделей схем является схема из функциональных элементов (СФЭ). В качестве характеристики оптимальности СФЭ можно рассматривать сложность — количество функциональных элементов, содержащихся в схеме. Таким образом, под сложностью булевой функции или оператора будем понимать минимальную сложность схемы, реализующую данную функцию или оператор. В 1956 году Д. Маллер [1] показал, что для любой булевой функции от  $n$  переменных сложность равна по порядку  $2^n/n$ . Далее в 1965 году О.Б. Лупановым [3] было доказано, что сложность почти всех булевых функций в стандартном базисе  $\{\vee, \wedge, \neg\}$  также асимптотически равна  $2^n/n$ . Больше того, О.Б. Лупанов также получил асимптотические оценки сложности булевых функций для произвольного конечного базиса.

Отметим, что также было много работ, посвященных другой мере сложности СФЭ — мощности. Её впервые определил М.Н. Вайнцвайг [2]

---

<sup>1</sup>*Ефимов Алексей Андреевич* — м.н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: efimovqwerty@yandex.ru.

Efimov Alexey Andreevich — junior research assistant, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

в 1961 году. Мощность или активность СФЭ – это максимальное количество элементов схемы, выдающих на выходе единицу, где максимум берётся по всех входным наборам. М.Н. Вайнцвайг показал, что порядок мощности СФЭ в зависимости от базиса может быть как линейным, так и экспоненциальным. Продолжил исследования мощности СФЭ О.М. Касим-Заде [6]. Он исследовал мощность в различных базисах и установил порядок функции Шеннона для произвольного конечного базиса.

Отметим, что в модели СФЭ не учитываются вполне естественные ограничения на размещение элементов схемы в плоскости или пространстве, способы их соединения, разводка проводов и т.п. В действительности, любая схема состоит из отдельных элементарных частей (функциональных элементов), которые имеют определенную длину, ширину и соединяются проводниками, размеры которых следует учитывать при оценке сложности реальных устройств.

Подобные модели схем впервые начал рассматривать А.Д. Коршунов [5]. Им была получена оценка сложности схем из объемных функциональных элементов ( $l$ -схем), удовлетворяющим некоторым ограничениям. Другая мера сложности, учитывающая топологию соединения элементов, была предложена А.Е. Андреевым [8] в 1994 году и была названа длиной кода. Им были получены верхние и нижние оценки сложности для ряда функций.

Также одной из моделей схем, учитывающих данные ограничения, являются плоские схемы, которые были введены С.С. Кравцовым [4] в 1967 году. Им был получен порядок функции Шеннона сложности СФЭ  $2^n$ . Н.А. Шкаликова в работе [7] одной из первых исследовала связь между площадью плоских схем и объемом трехмерных схем, реализующих булевы операторы. Она установила, что если оператор реализуется трёхмерной схемой с объемом  $V$ , то его можно реализовать плоской схемой с площадью  $\mathcal{O}(V^{3/2})$ , причём порядок оценки нельзя понизить. Г.В. Калачёв [11, 12, 13] в своих работах изучал одновременную минимизацию сразу трёх параметров плоских схем: сложности, мощности и глубины. Им был получен порядок функции Шеннона, реализующих булевы функции и операторы из различных классов [14, 15, 16].

Отметим, что развитие теории плоских схем было связано с развитием технологии производства и укладки реальных микросхем. Идея о том, что схемы можно укладывать друг на друга в пространстве была также известна давно, но не находила широкого применения вплоть до недавнего времени. Лишь несколько лет назад подобная технология начала использоваться инженерами на производстве. В частности, речь идёт о том, чтобы в будущем использовать многослойные чипы. Например, Т.Р. Сытдыковым [20, 21] рассматривается интересное обобщение модели клеточных схем, а именно прямоугольные многомерные схемы.

Рассматриваются СФЭ над базисом  $P_2(2)$ , элементы которых размещены в ячейках  $d$ -мерной целочисленной решетки. При этом в каждой ячейке расположено не более одного функционального элемента СФЭ, реализующего нетождественную функцию, а каждая пара ячеек соединена шиной, состоящей не более чем из  $k$  проводов. Им была получена верхняя оценка функции Шеннона сложности прямоугольных многомерных схем при  $k \rightarrow \infty$ .

Отметим, что определять меру сложности булевых функций не обязательно в модели СФЭ. В качестве альтернативной модели рассматриваются контактные схемы (КС). Сложностью КС считается количество её контактов. Ю.С. Шуткин [9] ввёл понятие временной сложности КС, являющиеся некоторым аналогом мощности СФЭ. Им было установлено, что функция Шеннона сложности моделирования КС для функций от  $n$  переменных равна  $2n - 1$ .

Также интересные результаты были получены В.В. Жуковым и С.А. Ложкиным [19]. Они рассматривают модели многовыходных и скалярных рекурсивных схем ограниченной глубины в произвольном базисе. В.В. Жуков и С.А. Ложкин представили методы получения нижних и верхних оценок функции Шеннона для сложности схем из данных классов, позволяющие установить её асимптотику.

Работа посвящена объёмным схемам [17, 18], которые определяются аналогично плоским схемам, но в манхэттенском пространстве. Под объёмной схемой понимается укладка схемы из функциональных элементов в пространстве. Объёмная схема состоит из кубических элементов. Каждый кубический элемент реализует булев оператор, у которого в сумме не более 6 входов и выходов. Также используется такую меру сложности схемы, как потенциал. Он равен максимальному значению количества единиц на всех внутренних узлах схемы. Неформально говоря, потенциал играет роль средней «энергии» схемы, необходимой для её функционирования.

В первой части данной работы получена нижняя оценка потенциала для класса частичных булевых операторов в случае, когда выходы оператора расположены достаточно близко.

В второй части работы впервые была получена верхняя оценка потенциала для булевых операторов в классе схем с близкими выходами. А именно показано, что в данном классе объёмных схем, реализующих булевы операторы  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ , ( $m \leq n$ ) порядок потенциала не превосходит  $\mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$ . Если же число выходов операторов связано ограничением  $n < m \leq 2^{n/2}$ , то порядок потенциала объёмных схем, реализующих эти булевы операторы, не превосходит  $\mathcal{O}(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$ . В случае, если  $m > 2^{n/2}$ , то имеет место верхняя оценка потенциала  $\mathcal{O}(\frac{m}{n} \cdot 2^{n/2})$ . Отметим, что при  $m \geq n$  для почти всех операторов верхняя

оценка совпадает с нижней оценкой, что позволяет говорить о порядке функции Шеннона в данном классе схем.

Автор выражает особую признательность научному руководителю д.ф.-м.н. профессору Э.Э. Гасанову за постановку задачи и научное руководство. Также автор благодарит Г.В. Калачёва за помощь и внимание к работе.

## 2. Основные понятия и формулировка результатов

*Кубическим элементом* будем называть булев оператор, у которого в сумме не более шести входов и выходов, причем каждому его входу и выходу сопоставлена некоторая метка из множества  $\{l, t, r, b, f, a\}$ , причём метки не повторяются.

Метки будем называть сторонами элемента:

- $l$  – левая сторона;
- $r$  – правая сторона;
- $t$  – верхняя сторона;
- $b$  – нижняя сторона;
- $f$  – передняя сторона;
- $a$  – задняя сторона.

Кубический элемент будем изображать в виде единичного куба в пространстве. При этом входам и выходам элемента сопоставляются грани куба в соответствии с присвоенными им метками.

Метки, присвоенные входам (выходам) оператора будем называть *входами (выходами)* элемента. Метки, не присвоенные ни входам, ни выходам, будем называть *изоляторами*. Множество входов (выходов) элемента  $e$  будем обозначать  $in(e)$  ( $out(e)$ ).

Если на всех выходах элемента реализуются тождественные функции, то будем называть элемент *коммутационным*, иначе – *логическим*.

Коммутационный элемент соответствует либо проводнику в микросхеме, либо пересечению проводов, либо тождественной функции, служащей для усиления сигнала.

Описывать элемент можно уравнениями, которые задают его оператор, заменяя все переменные в них на сопоставленные им метки ( $l, t, r, b, f, a$ ). Тогда в левой части каждого уравнения будет стоять выходная метка, а в правую часть будут входить только входные метки.

Через  $E$  обозначим множество всех кубических элементов.

Сетью из кубических элементов на множестве  $M \subset \mathbb{Z}^3$  будем называть отображение  $K : M \rightarrow E$ .

Элемент  $K(x, y, z)$  будем называть элементом схемы  $K$  с координатами  $(x, y, z)$ .

Левой, правой, верхней, нижней, передней и задней стороной элемента  $e$  с координатами  $(x, y, z)$  будем называть точки с координатами  $(x - \frac{1}{2}, y, z)$ ,  $(x + \frac{1}{2}, y, z)$ ,  $(x, y, z + \frac{1}{2})$ ,  $(x, y, z - \frac{1}{2})$ ,  $(x, y + \frac{1}{2}, z)$ ,  $(x, y - \frac{1}{2}, z)$  соответственно.

Будем говорить, что сеть  $K$  из кубических элементов *корректна*, если для любых элементов  $x$  и  $y$  схемы  $K$  верно, что если сторона  $a$  элемента  $x$  совпадает со стороной  $b$  элемента  $y$ , то выполнено одно из условий:

- один из элементов  $x, y$  – изолирующий,
- стороны  $a$  и  $b$  являются изоляторами,
- среди них одна является входом, другая выходом, например,  $a$  – выход, а  $b$  – вход, в таком случае будем говорить, что выход  $a$  *подключен* ко входу  $b$ .

Введём понятие *графа корректной сети из кубических элементов*  $K$  (будем обозначать  $G_K$ ).  $G_K$  – ориентированный граф, вершинами которого являются входы и выходы элементов схемы. Если выход одного элемента подключен ко входу другого, то им будет соответствовать одна и та же вершина графа (будем говорить, что эта вершина является выходом первого элемента и входом второго). Из вершины  $a$  в вершину  $b$  ведет ребро в том и только в том случае, когда существует элемент  $e$  такой, что  $a$  является его входом,  $b$  – выходом, причем функция, реализуемая на выходе  $b$ , существенно зависит от входа  $a$ .

*Объёмной схемой* или *схемой из кубических элементов* на множестве  $M \subseteq \mathbb{Z}^3$  будем называть корректную сеть из кубических элементов, в графе которой нет ориентированных циклов. Множество  $M$  будем называть *носителем* схемы  $K$ .

*Длиной* схемы  $K$  будем называть длину наименьшего прямоугольного параллелепипеда, содержащего все непустые элементы схемы  $K$ , обозначается  $l(K)$ .

*Шириной* схемы  $K$  будем называть ширину наименьшего прямоугольного параллелепипеда, содержащего все непустые элементы схемы  $K$ , обозначается  $w(K)$ .

*Высотой* схемы  $K$  будем называть высоту наименьшего прямоугольного параллелепипеда, содержащего все непустые элементы схемы  $K$ , обозначается  $h(K)$ .

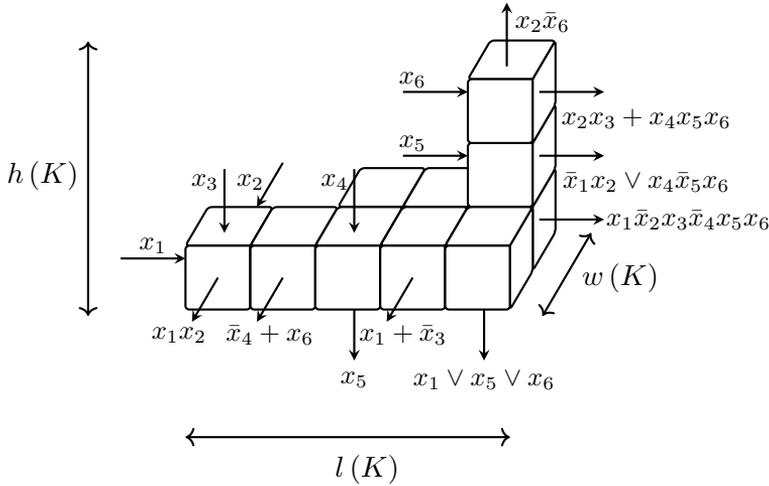


Рис. 1. Изображение объёмной схемы  $K$ .

На примере, изображенном на рис. 1, у схемы  $K$  имеется 6 входов, 9 выходов, а характеристики равны:  $l(K) = 5$ ,  $w(K) = 2$ ,  $h(K) = 3$ .

Если вход (выход) элемента не подключен к выходу (входу) другого элемента, будем его называть *входом* (*выходом*) схемы. *Контактами* схемы  $K$  будем называть её входы и выходы, и обозначать их  $In(K)$ ,  $Out(K)$  соответственно.

*Узлами* схемы  $K$  будем называть вершины графа  $G_K$ .

Если  $M$  – носитель схемы  $K$ , то величину  $|M|$ , равную количеству элементов в множестве  $M$ , будем называть *объёмом* схемы  $K$  и обозначать  $V(K)$ .

Каждой объёмной схеме  $K$  можно сопоставить схему их функциональных элементов ( $K$ ) следующим образом:

- 1) каждой функции  $f_{s,i}$ , которую реализует  $i$ -й выход элемента  $s$  объёмной схемы, сопоставим функциональный элемент  $e_{s,i}$ , реализующий  $f_{s,i}$ ; если  $i$ -й и  $j$ -й выходы являются выходами одной и той же функции, то им будет соответствовать один и тот же функциональный элемент;
- 2) если  $i$ -й выход элемента  $s_1$  подключен к  $j$ -му входу элемента  $s_2$ , то соединим выход элемента  $e_{s_1,i}$  с  $j$ -ми входами элементов  $e_{s_2,k}$  для всех  $k$ , для которых  $f_{s_2,k}$  существенно зависит от  $j$ -го аргумента;
- 3) удалим все тождественные функции, присоединив их вход ко всем их выходам.

Будем говорить, что схема  $K$  реализует булев оператор  $F$ , если схема из функциональных элементов ( $K$ ) реализует  $F$ .

Через  $V(F)$  обозначим объём схемы, реализующей оператор  $F$ , и обладающей минимальным объёмом среди всех объёмных схем, реализующих  $F$ .

Будем говорить, что объёмные схемы  $K_1$  и  $K_2$  равны и писать  $K_1 = K_2$ , если существует параллельный перенос пространства, который позволяет совместить схемы  $K_1$  и  $K_2$ , иначе будем говорить, что они различны.

Через  $(F)$  обозначим множество всех объёмных схем, реализующих оператор  $F$ .

Для каждой схемы  $K$  зафиксируем некоторую нумерацию её узлов. На  $i$ -м узле реализуется некоторая функция  $g_i$  от входных переменных схемы  $K$  (на входах схемы считаем, что реализуются тождественные функции).

Всюду далее символ  $:=$  будет обозначать «по определению равно».

Также далее будем считать, что схема  $K$  имеет  $n$  входов,  $m$  выходов и  $l$  узлов. Состоянием схемы  $K$  на входном наборе  $x$  назовём вектор

$$s_K(x) := (g_1(x), \dots, g_l(x)).$$

Если  $v = (v_1, \dots, v_q) \in \{0, 1\}^q$ , обозначим  $|v| := v_1 + v_2 + \dots + v_q$ .

Потенциалом схемы  $K$  на входном наборе  $x \in \{0, 1\}^n$  назовём величину  $u_K(x) := |s_K(x)|$ .

Максимальным потенциалом схемы  $K$  назовём величину

$$\hat{U}(K) := \max_{x \in \{0, 1\}^n} u_K(x).$$

Пусть  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$  – булев оператор. Тогда

$$\hat{U}(f) := \min_{K \in (f)} \hat{U}(K).$$

Если  $(f)$  пусто, то формально полагаем  $\hat{U}(f) = \infty$ .

Средним потенциалом схемы  $K$  на множестве входных наборов  $D \subseteq \{0, 1\}^n$  назовём величину

$$U_D(K) := \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} u_K(x).$$

Через  $P_2(D, m)$  обозначим множество частичных булевых операторов  $f : D \rightarrow \{0, 1\}^m$  с  $m$  выходами, определённых на множестве  $D$ .

Через  $P_2(n, m)$  обозначим множество всюду определённых булевых операторов  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$  с  $n$  входами и  $m$  выходами.

Мы будем рассматривать случай, когда выходы схемы располагаются достаточно близко. Если мы будем рассматривать лишь схемы из некоторого множества  $Q$ , то будем ко всем мерам сложности и мощности добавлять нижний индекс  $Q$ .

Пусть  $f \in P_2(D, m)$ . Тогда

$$U_Q(f) := \min_{K \in Q \cap (f)} U_D(K).$$

Если  $Q \cap (f)$  пусто, то формально полагаем  $U_Q(f) = \infty$ .

Аналогично определим максимальный потенциал для  $f \in P_2(n, m)$ :

$$\hat{U}_Q(f) := \min_{K \in Q \cap (f)} \hat{U}(K).$$

Если  $Q \cap (f)$  пусто, то формально полагаем  $\hat{U}_Q(f) = \infty$ .

Введём функцию Шеннона для среднего и максимального потенциала:

$$U_Q(n, m) := \max_{f \in P_2(n, m)} U_Q(f).$$

$$\hat{U}_Q(n, m) := \max_{f \in P_2(n, m)} \hat{U}_Q(f).$$

*Деревом выходов* схемы  $K$  назовем минимальное остовное дерево полного графа с вершинами в выходных элементах схемы  $K$ , причем расстояние между элементами – расстояние между их центрами в манхэттенской метрике.

Введём величину  $T(K)$ . Пусть  $m$  – количество выходов схемы  $K$ , числа  $r_1, \dots, r_{m-1}$  – длины рёбер дерева выходов. Положим

$$T(K) := \sum_{j=1}^{m-1} r_j.$$

То есть  $T(K)$  – величина, равная суммарной длине рёбер дерева выходов схемы  $K$ .

Введём множество  $T_h := \{K : T(K) \leq h\}$ , состоящее из таких объёмных схем, у которых длина дерева выходов не превосходит  $h$ .

Через  $T_{\text{near}}$  обозначим множество объёмных схем  $K$ , у которых длина дерева выходов не превосходит числа выходов.

**Теорема 1.** *Если  $D \subseteq \{0, 1\}^n$ ,  $d = |D|$ , то существует абсолютная константа  $C$ , такая, что неравенство*

$$U_{T_h}(f) \geq \begin{cases} C \frac{m \sqrt[3]{md}}{\log_2 d}, & \text{если } \sqrt[3]{md} > h, \\ C \frac{m \sqrt{md}}{\sqrt{h} \log_2 d}, & \text{если } \sqrt[3]{md} \leq h. \end{cases}$$

*выполнено для почти всех  $f \in P_2(D, m)$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $n \log_2(n) = o(d)$ ,  $\log_2(m) = o(d)$ .*

**Теорема 2.** Для любого булева оператора  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ , существует объёмная схема  $K_f \in T_{\text{near}}$  со входами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на  $m$  выходах которой реализуется оператор  $f$ , причём схема  $K_f$  обладает следующими характеристиками:

1) Если  $m \leq n$ :

$$\begin{aligned} \text{а) } l(K_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \quad w(K_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \\ h(K_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}); \\ \text{б) } \hat{U}(K_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}); \\ \text{в) } V(K_f) &= \mathcal{O}(m \cdot 2^n). \end{aligned}$$

2) Если  $n < m \leq 2^{n/2}$ :

$$\begin{aligned} \text{а) } l(K_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \quad w(K_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \\ h(K_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}); \\ \text{б) } \hat{U}(K_f) &= \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right); \\ \text{в) } V(K_f) &= \mathcal{O}(m \cdot 2^n). \end{aligned}$$

3) Если  $m > 2^{n/2}$ :

$$\begin{aligned} \text{а) } l(K_f) &= \mathcal{O}(2^{n/2}), \quad w(K_f) = \mathcal{O}(2^{n/2}), \\ h(K_f) &= \mathcal{O}(m); \\ \text{б) } \hat{U}(K_f) &= \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot 2^{n/2}\right); \\ \text{в) } V(K_f) &= \mathcal{O}(m \cdot 2^n). \end{aligned}$$

**Следствие 1.** Для почти всех  $f \in P_2(n, m)$ , при  $m \geq n, n \rightarrow \infty, \log_2(m) = o(2^n)$  верно равенство:

$$U_{T_{\text{near}}}(f) = \Theta\left(\frac{m}{n} \cdot \min^{1/3}(m, 2^{n/2}) \cdot 2^{n/3}\right).$$

**Следствие 2.** Пусть  $m \geq n, n \rightarrow \infty, \log_2(m) = o(2^n)$ . Тогда верно асимптотическое равенство:

$$U_{T_{\text{near}}}(n, m) \asymp \hat{U}_{T_{\text{near}}}(n, m) = \Theta\left(\frac{m}{n} \cdot \min^{1/3}(m, 2^{n/2}) \cdot 2^{n/3}\right).$$

### 3. Нижние оценки

При доказательстве верхних и нижних оценок возникает множество констант, которые мы будем обозначать  $C_1, C_2, C_3 \dots$ . Конкретные значения данных констант нам не важны, так как оценки приводятся с точностью до порядка. В доказательстве верхних и нижних оценок нумерация констант будет независимой.

### 3.1. Оценки для площади и объема

*Кубиком* будем называть единичный куб с вершинами в точках с целочисленными координатами и сторонами, параллельными осям координат.

*Расстоянием* между кубиками будем называть расстояние между их центрами по манхэттенской метрике.

*Шаром радиуса  $r$*  с данным центральным кубиком  $C^0$  будем называть множество кубиков, лежащих на расстоянии не более  $r-1$  от  $C^0$  (при  $r=0$  это множество пусто, см. рис. 2). Площадь поверхности шара радиуса  $r$  будем обозначать  $S_r$ .

Пусть  $M \subseteq \mathbb{Z}^3$ . Будем называть элементы из  $M$  *соседними*, если их координаты отличаются на 1 в одной компоненте, а две другие компоненты одинаковы. Рассмотрим граф  $Q_M$ , вершинами которого являются элементы множества  $M$ , а рёбра соединяют соседние элементы. Будем говорить что множество  $M$  *связно*, если граф  $Q_M$  связан.

Пусть  $W$  – некоторое множество кубиков. Через  $S(W)$  обозначим площадь поверхности  $W$ . Будем говорить, что множество  $W$  *связно*, если связно его множество центров кубиков.

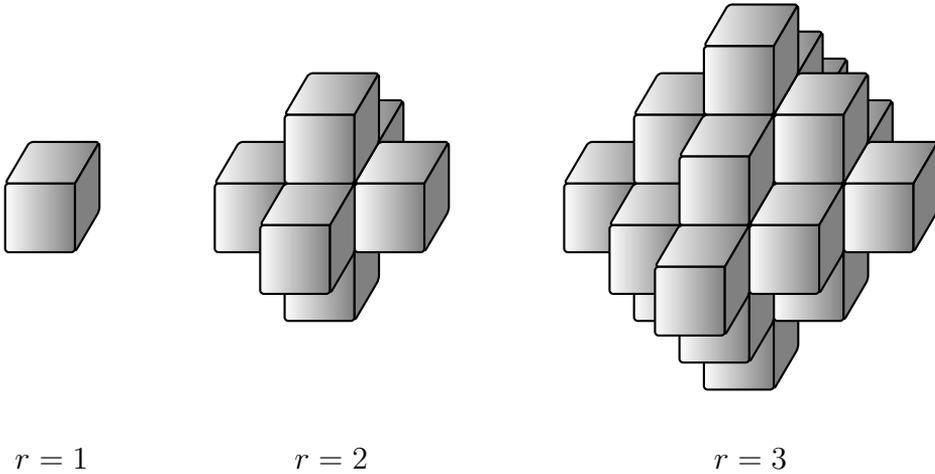


Рис. 2. Шары различного радиуса.

Введём некоторые обозначения. Пусть  $M \subseteq \mathbb{Z}^3$ ,  $r \geq 1$ .

- $B_M(r)$  – множество кубиков в пространстве, отстоящих от точек из  $M$  не более чем на  $r-1$  по манхэттенской метрике.
- $V_M(r) = |B_M(r)|$  – объём множества  $B_M(r)$ ;  $V_M(0) := 0$ .

- $S_M(r)$  – площадь поверхности объединения кубиков из множества  $B_M(r)$ .
- $k_M(r)$  – количество компонент связности множества  $B_M(r)$  при  $r \geq 1$ ;  $k_M(0) := |M|$ .
- $\varphi_M(r) := \sum_{j=0}^r k_M(j)$  – вспомогательная функция, через которую выражаются оценки для  $S_M(r), V_M(r)$ .

**Лемма 1.** *Площадь поверхности  $S_r$  шара радиуса  $r$  равна*

$$6(r^2 + (r - 1)^2).$$

*Доказательство.* Рассмотрим любую из 6 проекций шара (см. рис. 3).

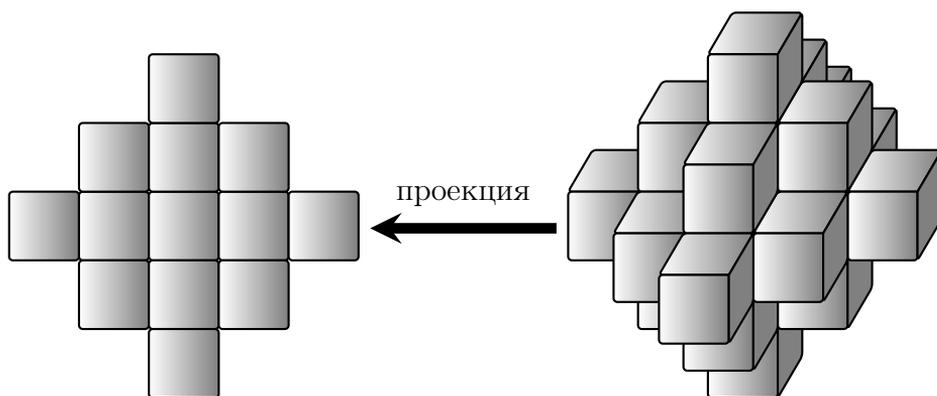


Рис. 3. Проекция шара.

Заметим, что площадь поверхности данного шара будет равна площади поверхности проекции, увеличенной в 6 раз. Также заметим, что площадь поверхности поверхности равна (считаем по слоям, сверху вниз)

$$\sum_{i=1}^r (2i - 1) + \sum_{i=1}^{r-1} (2i - 1) = r^2 + (r - 1)^2.$$

А значит, площадь поверхности всего шара равняется  $6(r^2 + (r - 1)^2)$ , что и требовалось. □

**Следствие 1.** *Площадь поверхности  $S_r \leq 12r^2$ .*

**Лемма 2.** Пусть  $C^1, C^2 \in \mathbb{Z}^3$ . Через  $W_i(r)$  обозначим шар радиуса  $r$  с центром в  $C^i, i = 1, 2$ . Пусть  $r_0$  такое, что  $W_1(r_0) \cap W_2(r_0) = \emptyset$  (не имеет общих граней), а  $W_1(r_0+1) \cap W_2(r_0+1) \neq \emptyset$ . Обозначим  $\Delta = r - r_0$ . Тогда для любого  $r \geq r_0$  имеет место оценка

$$S(W_1(r) \cup W_2(r)) \leq 24r^2 - 6((\Delta - 1)^2 + (\Delta - 2)^2).$$

*Доказательство.* Оценим площадь поверхности двух шаров как сумму площадей поверхностей шаров и разность той части поверхности шара, которая окажется внутри пересечения (см. рис. 4). Такие грани кубиков, которые оказываются внутри пересечения, будем называть «испорченными». Если все грани кубика «испорчены», то такой кубик назовём «испорченным».

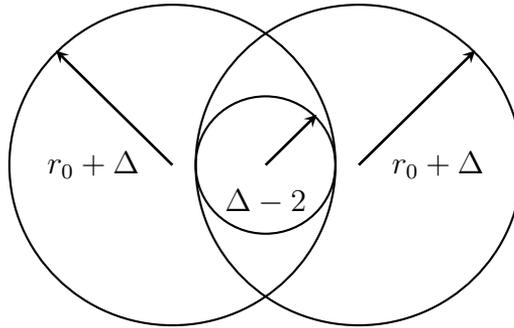


Рис. 4.

Случай  $\Delta = 1$ . Заметим, что тогда в каждом шаре «испорчена» хотя бы одна грань. Тогда площадь поверхности объединения двух шаров можно оценить сверху как разность суммы площадей поверхности и удвоенной площади «испорченной» грани. Получаем

$$\begin{aligned} S(W_1(r) \cup W_2(r)) &\leq 6 \cdot ((r_0 + 1)^2 + r_0^2) + 6 \cdot ((r_0 + 1)^2 + r_0^2) - 2 \leq \\ &\leq 12 \cdot (2r_0^2 + 2r_0 + 1) - 2 \leq 24r_0^2 + 24r_0 + 10 \leq \\ &\leq 24r_0^2 + 48r_0 + 18 \leq \\ &\leq 24(r_0 + 1)^2 - 6((1 - 1)^2 + (1 - 2)^2), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Случай  $\Delta \geq 2$ . Отметим, что при  $\Delta = 2$  будет полностью испорчен хотя бы один кубик, назовём его базовым. Введём  $U(r) = W_1(r) \cap W_2(r)$ . Заметим также, что если внутри  $U(r)$  находится какая-нибудь фигура, то внутри  $U(r+x)$  будет находиться фигура, составленная из всех кубиков, расположенных на расстоянии не более  $x$  от  $U(r)$ .

Т.к. при  $r = r_0 + 2$  внутри пересечения шаров  $U(r_0 + 2)$  находится один базовый кубик (то есть шар радиуса 1), то при  $r = r_0 + \Delta$  внутри поместится шар радиуса  $\Delta - 1$ . Далее заметим, что площадь поверхности пересечения  $U(r_0 + \Delta)$  не меньше площади указанного шара радиуса  $\Delta - 1$ , так как для каждой грани шара можно указать грань  $U(r_0 + \Delta)$ , которую можно на неё спроецировать. По лемме 1 площадь поверхности шара радиуса  $\Delta - 1$  равна  $6((\Delta - 1)^2 + (\Delta - 2)^2)$ . Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} S(W_1(r) \cup W_2(r)) &= S(W_1(r)) + S(W_2(r)) - S(U(r)) \leq \\ &\leq 24(r_0 + \Delta)^2 - 6((\Delta - 1)^2 + (\Delta - 2)^2). \end{aligned}$$

□

**Лемма 3.** Пусть  $M = \{C^1, C^2, \dots, C^m\} \subseteq \mathbb{Z}^3$ . Тогда

$$S_M(r) \leq 60r \cdot \varphi_M(r - 1).$$

*Доказательство.* Обозначим  $W_i(r)$  – шар радиуса  $r$  с центром  $C^i$ . Проведем доказательство индукцией по числу шаров.

**Базис индукции:**  $n = 1$ . Согласно следствию 1 площадь поверхности шара

$$S_M(r) = S(W_1(r)) \leq 12r^2 \leq 60r^2 \leq 60r \cdot \varphi_M(r - 1).$$

**Шаг индукции:** пусть для всех множеств, состоящих не более, чем из  $n - 1$  элементов утверждение верно, докажем для  $n$ .

1) Рассмотрим случай, когда  $W(r)$  разбивается на две несвязные друг с другом компоненты  $A(r)$  и  $B(r)$ , т.е.  $W(r) = A(r) \sqcup B(r)$ . Через  $M_1$  обозначим множество центров шаров  $A(r)$ , а через  $M_2$  обозначим множество центров шаров  $B(r)$ . Тогда  $M = M_1 \sqcup M_2$ . Заметим, что

$$S_M(r) = S_{M_1}(r) + S_{M_2}(r). \quad (1)$$

По предположению индукции верны оценки

$$\begin{aligned} S_{M_1}(r) &\leq 60r \cdot \varphi_{M_1}(r - 1), \\ S_{M_2}(r) &\leq 60r \cdot \varphi_{M_2}(r - 1). \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что так как для всех  $i \leq r - 1$  верно

$$k_M(i) = k_{M_1}(i) + k_{M_2}(i),$$

то имеет место равенство

$$\begin{aligned} \varphi_M(r - 1) &= \sum_{j=0}^{r-1} k_M(j) = \sum_{j=0}^{r-1} k_{M_1}(j) + \sum_{j=0}^{r-1} k_{M_2}(j) = \\ &= \varphi_{M_1}(r - 1) + \varphi_{M_2}(r - 1). \end{aligned} \quad (3)$$

Совместив результаты утверждений (1), (2) и (3), получаем:

$$\begin{aligned} S_M(r) &= S_{M_1}(r) + S_{M_2}(r) \leq 60r \cdot \varphi_{M_1}(r-1) + 60r \cdot \varphi_{M_2}(r-1) = \\ &= 60r \cdot \varphi_M(r-1). \end{aligned}$$

2) Теперь рассмотрим основной случай, когда множество  $W(r)$  является связным. Введём полный граф  $G$ , где вершинами являются точки  $C^i$ , а длины ребер – расстояния между ними. Рассмотрим минимальное остовное дерево  $T$  в графе  $G$ , и без ограничения общности будем считать, что  $C^n$  является листом в  $T$ .

Обозначим  $W'(r) = W_1(r) \cup W_2(r) \cup \dots \cup W_{n-1}(r)$ ,  $W(r) = W'(r) \cup W_n(r)$ ;  $M = M' \cup \{C^n\}$ . Через  $r_0$  обозначим такое максимальное  $r$ , что шар  $W_n(r)$  не пересекается с множеством  $W'(r)$ , т.е.

$$r_0 = \max\{x : W'(x) \cap W_n(x) = \emptyset\}.$$

Так как  $W(r) = W'(r) \sqcup W_n(r)$  при  $r \leq r_0$  (по определению  $r_0$ ), то

$$k_M(r) = k_{M'}(r) + 1, \text{ при } r \leq r_0. \quad (4)$$

Докажем, что

$$k_M(r) = k_{M'}(r), \text{ при } r > r_0. \quad (5)$$

Заметим, что  $k_M(r) \leq k_{M'}(r)$  при  $r > r_0$ , так как шар  $W_n(r)$  при  $r > r_0$  пересекается с множеством  $W'(r)$ , а значит число компонент связности в множестве  $W(r)$  будет не больше, чем в множестве  $W'(r)$ .

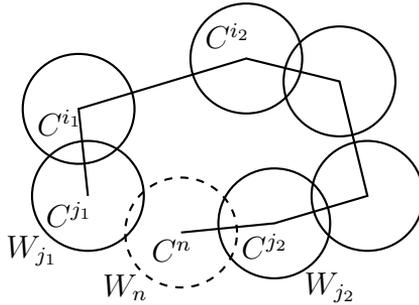


Рис. 5.

Предположим, что при некотором  $r > r_0$  выполняется неравенство  $k_M(r) < k_{M'}(r)$ . Это может произойти только в случае, если шар  $W_n(r)$  будет пересекаться с двумя шарами  $W_{j_1}(r)$  и  $W_{j_2}(r)$ , которые лежат в разных компонентах связности множества  $W'(r)$  (см. рис. 5). Рассмотрим ребра  $C^{j_1}C^n$  и  $C^{j_2}C^n$  графа  $G$ . Эти ребра одновременно не могут

лежать в МОД  $T$ , так как  $C^n$  является листом графа  $T$ . Без ограничения общности считаем, что  $C^n C^{j_2} \in T$ . Заметим тогда, что вершины  $C^{j_1}$  и  $C^{j_2}$  будут соединены путем в графе  $T$ , причем одно из ребер этого пути будет больше (на рисунке это ребро  $C^{i_1} C^{i_2}$ ), чем ребро  $C^{j_1} C^n$ . Тогда можно удалить ребро  $C^{i_1} C^{i_2}$  и вместо него добавить ребро  $C^{j_1} C^n$  в граф  $T$ . Отметим, что полученный граф будет остовным деревом для графа  $G$ , но с меньшей суммарной длиной ребер, чем  $T$ , что противоречит тому, что  $T$  является МОД. Значит,  $k_M(r) \geq k_{M'}(r)$  при  $r > r_0$ . Таким образом, утверждение (5) доказано.

В качестве следствия из оценок (4) и (5) получаем

$$\begin{aligned} \varphi_M(r-1) &= \sum_{j=0}^{r-1} k_M(j) = \sum_{j=0}^{r_0} k_M(j) + \sum_{j=r_0+1}^{r-1} k_M(j) = \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} k_{M'}(j) + r_0 + 1 = \varphi_{M'}(r-1) + r_0 + 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим  $\Delta = r - r_0$ . Рассмотрим случай, когда шар  $W_n(r)$  пересекается только с одним шаром  $W_j(r)$  из множества  $W(r)$ . Тогда согласно лемме 2 имеем оценку

$$S_M(r) - S_{M'}(r) \leq 12(r_0 + \Delta)^2 - 6((\Delta - 1)^2 + (\Delta - 2)^2). \quad (7)$$

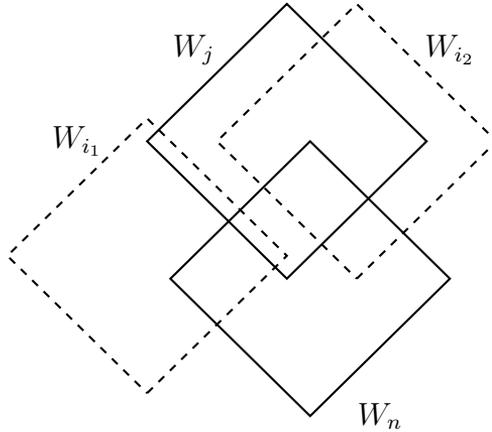


Рис. 6.

Покажем, что если шар  $W_n(r)$  пересекается с несколькими шарами, то оценка (7) также верна. Обозначим шары, с которыми пересекается шар  $W_n(r)$  следующим образом:  $W_j(r), W_{i_1}(r), W_{i_2}(r), \dots$ . Разрежем всю

картинку по слоям и зафиксируем слой (см. рис. 6). Обозначим прямоугольник  $R = W_j \cap W_n$ , а множество  $R' = W' \cap W_n$ . Так как прямоугольник  $R \subseteq R'$ , то его периметр не превосходит периметра  $R'$ . Таким образом, так как площадь поверхности пересечения – это сумма периметров пересечения по слоям, то оценка (7) верна и в данном случае.

Из оценок (6), (7), предположения индукции и определения  $\Delta$  получаем:

$$\begin{aligned}
S_M(r) &\leq S_{M'}(r) + 12(r_0 + \Delta)^2 - 6((\Delta - 1)^2 + (\Delta - 2)^2) \leq \\
&\leq 60r \cdot \varphi_{M'}(r - 1) + 12(r_0 + \Delta)^2 - 6((\Delta - 1)^2 + (\Delta - 2)^2) = \\
&= 60r \cdot (\varphi_M(r - 1) - r_0 - 1) + 12(r_0 + \Delta)^2 - 6(2\Delta^2 - 6\Delta + 5) = \\
&= 60r \cdot \varphi_M(r - 1) - 60r(r_0 + 1) + 12r_0^2 + 24r_0\Delta + 36\Delta - 30 = \\
&= 60r \cdot \varphi_M(r - 1) - 60(r_0 + \Delta)(r_0 + 1) + 12r_0^2 + 24r_0\Delta + 36\Delta - \\
&- 30 = 60r \cdot \varphi_M(r - 1) - 48r_0^2 - 36r_0\Delta - 24\Delta - 90 \leq \\
&\leq 60r \cdot \varphi_M(r - 1).
\end{aligned}$$

Утверждение доказано. □

**Лемма 4.** Пусть  $M = \{C^1, C^2, \dots, C^n\} \subseteq \mathbb{Z}^3$ . Тогда

$$V_M(r) \leq 60r^2 \cdot \varphi_M(r - 1).$$

*Доказательство.* Проведем доказательство индукцией по величине радиуса  $r$ .

**Базис индукции:**  $r = 1$ .

$$V_M(1) = n \leq 60 \cdot 1 \cdot n.$$

**Шаг индукции:** так как каждая грань относится только к одному кубику, то имеет место следующее неравенство

$$\begin{aligned}
V_M(r + 1) &\leq V_M(r) + S_M(r + 1) \leq 60r^2\varphi_M(r - 1) + 60(r + 1)\varphi_M(r) \leq \\
&\leq 60r^2\varphi_M(r) + 60(r + 1)\varphi_M(r) \leq 60\varphi_M(r)(r^2 + r + 1) \leq \\
&\leq 60(r + 1)^2\varphi_M(r).
\end{aligned}$$

□

### 3.2. Общие оценки

Здесь и всюду далее будем полагать, что  $D \subset \{0, 1\}^n$ . Пусть  $d = |D|$ ,  $h \geq 1$ . Через  $P_u(D, h)$  обозначим множество таких операторов  $G : D \rightarrow \{0, 1\}^h$ , что

$$\frac{1}{d} \sum_{x \in D} |G(x)| \leq u.$$

**Лемма 5.** (Калачёв Г.В., [11, лемма 1]) Если  $u \leq h$ , то

$$\log_2 |P_u(D, h)| \leq du \log_2 \frac{eh}{u}.$$

**Лемма 6.** Количество различных кубических элементов равно  $C_1 = 90\,537\,043\,409$ .

*Доказательство.* У кубического элемента может быть от 0 до 5-ти входов. Рассмотрим каждый из случаев.

- 0) В этом случае каждая из 6-ти граней либо изолятор, либо реализует константу (то есть 3 варианта для каждой грани). Всего  $3^6 = 729$  кубических элементов.
- 1) Есть 6 расположений входа. Каждая из оставшихся граней либо изолятор, либо реализует функцию от одной переменной (всего 5 вариантов для каждой стороны), причем все 5 оставшихся граней не могут одновременно быть изоляторами. Поэтому элементов  $6 \cdot (5^5 - 1) = 18\,744$ .
- 2) Есть  $\binom{2}{6} = 15$  вариантов расположений входов. Каждая из оставшихся граней либо изолятор, либо реализует функцию от двух переменных (всего  $2^{2^2} + 1 = 17$  вариантов для каждой стороны), причем все 4 оставшиеся грани не могут быть одновременно изоляторами. Поэтому элементов  $15 \cdot (17^4 - 1) = 1\,252\,800$ .
- 3) Есть  $\binom{3}{6} = 20$  вариантов расположений входов. Каждая из оставшихся граней либо изолятор, либо реализует функцию от трёх переменных (всего  $2^{2^3} + 1 = 257$  вариантов для каждой стороны), причем все 3 оставшиеся грани не могут быть одновременно изоляторами. Поэтому элементов  $20 \cdot (257^3 - 1) = 339\,491\,840$ .
- 4) Есть  $\binom{4}{6} = 15$  вариантов расположений входов. Каждая из оставшихся граней либо изолятор, либо реализует функцию от четырёх переменных (всего  $2^{2^4} + 1 = 65\,537$  вариантов для каждой стороны), причем обе оставшиеся грани не могут быть одновременно изоляторами. Поэтому элементов  $15 \cdot (65\,537^2 - 1) = 64\,426\,475\,520$ .
- 5) В этом случае есть единственный выход, который не может быть изолятором. Есть 6 расположений выхода, причем на нём реализуется любая из  $2^{2^5} = 4\,294\,967\,296$  функций от 5-ти переменных. Поэтому элементов  $6 \cdot 4\,294\,967\,296 = 25\,769\,803\,776$ .

Суммируя, получаем  $90\,537\,043\,409$ . Обозначим это число через  $C_1$ . □

**Лемма 7.** *Количество объёмных схем объёмом  $v$  не больше, чем  $2^{C_2 v}$ , где  $C_2$  – некоторая константа.*

*Доказательство.* Сначала рассмотрим объёмные схемы со связным носителем. Имеется не более  $(5e)^v$  связных областей с объёмом  $v$  (поликубы) [13]. Далее, для каждой связной области  $M$  объёмом  $v$  в каждый кубик можно поставить один из  $C_1$  видов кубиков (лемма 6). Поэтому область  $M$  можно заполнить кубиками  $(C_1)^v$  способами. Таким образом, существует не более  $(5e \cdot C_1)^v$  схем объёмом  $v$  со связным носителем. Обозначим  $C' = \log_2(5e \cdot C_1)$ .

Теперь рассмотрим случай, когда носитель несвязен. Если он разбивается на части с объёмами  $v_1, v_2, \dots, v_k, v_1 + v_2 + \dots + v_k = v$ , то количество таких схем не больше, чем  $2^{C'v_1} \cdot 2^{C'v_2} \cdot \dots \cdot 2^{C'v_k} = 2^{C'v}$ .

Пусть  $v \in \mathbb{N}$ . Оценим сверху количество всевозможных разбиений  $\sigma_v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  числа  $v = \sum_{i=1}^k v_i$ , где  $v_i > 0, i = 1 \dots k$ , причём разбиения, отличающиеся порядком слагаемых будем считать одинаковыми. Каждое разбиение  $\sigma_v$  можно закодировать при помощи последовательности  $\rho_v$  длины  $v - 1$  из нулей и единиц следующим образом. Если разбиение  $\sigma_v$  состоит из  $k$  элементов, то в соответствующей последовательности  $\rho_v$  будет  $k - 1$  единица. Пусть  $\{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}\}$  – места, где стоят единицы в  $\rho_v$ . Положим  $j_i = \sum_{s=1}^i v_s$ . Отметим, что разным разбиениям  $\sigma_v$  будут соответствовать разные последовательности  $\rho_v$ . Поэтому количество разбиений не больше, чем  $2^{v-1}$ .

Для каждого разбиения имеется не более  $2^{C'v}$  схем, поэтому схем меньше, чем  $2^{C'v} 2^{C'v-1} < 2^{(C'+1)v}$ . Далее взяв  $C_2 = C' + 1$ , получим утверждение леммы. □

Пусть у нас есть алгоритм определения *последнего слоя* схемы относительно некоторых ее выходов, который зависит только от геометрии схемы.

Введём множество  $L(u, v, h, D, m)$  операторов  $f : D \rightarrow \{0, 1\}^m$  вида  $f = F(x, G(x))$ , где существует такая схема  $K$ , что выполнены условия:

- 1)  $K$  имеет  $m$  выходов,  $h$  входов на последнем слое и не более  $n$  входов, не лежащих на последнем слое.
- 2) объём  $K$  не превосходит  $v$ .
- 3)  $K$  реализует оператор  $F : D \times \{0, 1\}^h \rightarrow \{0, 1\}^m$ , причем последние  $h$  аргументов подаются на входы  $K$ , расположенные на последнем слое.

4)  $G \in P_u(D, h)$ .

**Лемма 8.** Если  $d = |D|, h \geq 1$  и  $v \leq \frac{3}{5C_3}md$ , то

$$L(u, v, h, D, m) < m!n!2^{m(1-\varepsilon_1)d}$$

при  $u \leq \frac{m}{5 \log_2 d}$ , где  $C_2$  взято из условия леммы 7,  $C_3 = \max\{C_2, 30\}$ ,  $\varepsilon_1 = \frac{1}{5} - \frac{3}{C_3 \ln 2}$ .

*Доказательство.* Отметим заранее, что идея доказательства аналогична доказательству из работы [11, лемма 4]. В частности было доказано, что

$$\log_2 x \leq \frac{x}{e \ln 2}. \quad (8)$$

Заметим, что поскольку у каждого элемента схемы может быть не более 5-ти входов, то если  $h > 5v$ , то схем объёма  $v$  с  $h$  входами нет, и утверждение верно. Поэтому далее полагаем, что  $h \leq 5v \leq \frac{3}{C_3}md$ .

Оценим число  $|L(u, v, h, D, m)|$ . По лемме 5 количество различных операторов  $G$  из  $P_u(D, h)$  не больше, чем  $2^{du \log_2 \frac{eh}{u}}$ . Количество операторов  $F$  с точностью до перестановок входов не больше, чем количество схем объёма  $v$ , то есть  $2^{C_2 v}$ . Для каждой схемы можно осуществить произвольную перестановку выходов, а также входов, на которые подается  $x$ . С учетом перестановок выходов и входов, на которые подается  $x$ , получается не более  $m!n!2^{C_2 v}$  операторов.

Таким образом,

$$|L(u, v, h, D, m)| \leq m!n!2^{C_2 v} 2^{du \log_2 \frac{eh}{u}} = m!n!2^{C_2 v + du \log_2 \frac{eh}{u}}. \quad (9)$$

Оценим показатель степени при  $u \leq \frac{m}{5 \log_2 d}$ , учитывая, что  $v \leq \frac{3}{5C_3}md$ ,  $h \leq \frac{3}{C_3}md$ :

$$\begin{aligned} C_2 v + du \log_2 \frac{eh}{u} &\leq C_2 v + du \log_2 d + du \log_2 \frac{eh}{du} \leq \\ &\leq \frac{3}{5}md + d \frac{m}{5 \log_2 d} \log_2 d + du \frac{eh}{du \cdot e \ln 2} \leq \\ &\leq \frac{4}{5}md + \frac{3}{C_3 \ln 2}md = \\ &= md(1 - \varepsilon_1). \end{aligned}$$

Отметим, что  $C_3$  выбрано таким образом, чтобы  $\varepsilon_1 > 0$ . Отсюда

$$2^{C_2 v + du \log_2 \frac{eh}{u}} \leq 2^{m(1-\varepsilon_1)d},$$

и домножая на  $m!n!$  и подставляя в (9), получаем утверждение леммы.  $\square$

### 3.3. Доказательство основной теоремы

Для доказательства основной теоремы воспользуемся некоторыми определениями, введёнными ранее в работах [12], [11].

Пусть  $M$  – подсхема схемы  $K$ . Входы и выходы схемы  $M$ , не являющиеся входами и выходами схемы  $K$ , назовём *граничными контактами* подсхемы  $M$  относительно схемы  $K$ . Множество граничных контактов обозначим  $(M|K)$ .

Через  $In(M|K)$  обозначим множество входов  $M$ , которые лежат в разрезе  $(M|K)$  (такие входы будем называть *граничными*), то есть

$$In(M|K) = In(M) \cap In(M|K) = In(M) \setminus In(K).$$

Через  $Out(MK)$  обозначим множество выходов  $M$ , которые являются выходами  $K$ , то есть

$$Out(MK) = Out(M) \cap Out(K) = Out(M) \setminus Out(M|K).$$

Если  $M$  – подсхема схемы  $K$ , то через  $U_{in}(M|K)$  обозначим средний потенциал на граничных входах подсхемы  $M$ , то есть

$$U_{in}(M|K) = \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} \sum_{\alpha \in In(M|K)} g_{\alpha}(x).$$

*Расслоением* схемы  $K$  назовём произвольное множество  $(M_i)_{i=1}^t$  её подсхем такое, что  $In(M_i|K) \cap In(M_j|K) = \emptyset$ , если  $i \neq j$ .

Нижнюю оценку будем доказывать следующим образом. Пусть есть класс  $B$  операторов, причем для каждого оператора  $f \in B$  и любой схемы  $K$ , реализующей оператор  $f$  есть нижние оценки для потенциала на границе любой подсхемы, удовлетворяющей определенным ограничениям. Тогда будем строить расслоение  $(M_i)_{i=1}^t$  такое, что подсхемы  $M_i$  удовлетворяют этому ограничению, и для каждого  $M_i, i = 1, \dots, t$  использовать оценку потенциала на границе  $(M_i|K)$ , а потом суммировать, чтобы получить оценку для всей схемы  $K$ , то есть  $U_D(K) \geq \sum_{i=1}^t U_{in}(M_i|K)$ .

Пусть  $D \subset \{0, 1\}^n, d := |D|$ . Рассмотрим множество  $L_0(D, m)$  операторов  $f : D \rightarrow \{0, 1\}^m$ , реализуемых некоторой схемой  $K$  так, что существует её подсхема  $K_0$ , содержащая хотя бы один выход схемы  $K$  такая, что

$$V(K_0) \leq \frac{3}{5C_3} |Out(K_0K)|d, \quad U_{in}(K_0|K) \leq \frac{|Out(K_0K)|}{5 \log_2 d}. \quad (10)$$

**Лемма 9.** (Калачёв Г.В., [12, лемма 10]). Для любой плоской схемы  $K$  и любого подмножества её выходов  $U$  существует схема  $K_U$ , носитель

которой лежит в носителе схемы  $K$ , множество её выходов совпадает с  $U$  и на каждом из этих выходов  $K_U$  реализует ту же функцию, что и схема  $K$ .

Отметим, что конструктивное доказательство этого факта содержит алгоритм, который можно дословно повторить для объёмных схем (то есть он никак существенно не использует геометрию схемы).

Доказательство следующей леммы идейно аналогично доказательству из работы [11, лемма 5], но использует другие константы и ограничения.

**Лемма 10.** (Аналог [11, лемма 5] для объёмных схем). Пусть  $\log_2 m \leq \frac{\varepsilon_1}{6}d$ , где значение  $\varepsilon_1$  взято из условия леммы 8. Тогда  $|L_0(D, m)| = o(2^{md})$  при  $d \rightarrow \infty, n \log_2 n = o(d)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим классы  $l(v, h, D, m_0) \subset L_0(D, m)$ , для которых выполнено (10), причём  $V(K_0) = v, |In(K_0|K)| = h, |Out(K_0K)| = m_0$  при фиксированных  $1 \leq m_0 \leq m, 0 \leq v \leq \frac{3}{5C_3}md$  и  $h > 0$ . Подсчитаем число элементов в  $l(v, h, D, m_0)$ . Как уже отмечалось в лемме 8, имеет смысл рассматривать лишь  $h \leq 5v \leq \frac{3}{C_3}md$  (иначе  $l(v, h, D, m_0) = \emptyset$ ).

Аналогично доказательству из [11, лемма 5], получим оценку:

$$|l(v, h, D, m_0)| \leq \frac{2^{md}}{2^{d\left(\varepsilon_1 - \frac{2\log_2 m + n \log_2 n}{d}\right)}}.$$

Оценим количество элементов в  $L_0(D, m)$ :

$$\begin{aligned} |L_0(D, m)| &= \left| \bigsqcup_{m_0=1}^m \bigsqcup_{v=0}^{\frac{3}{5C_3}m_0d} \bigsqcup_{h=0}^{\frac{3}{C_3}m_0d} l(v, h, D, m_0) \right| \leq \\ &\leq \sum_{m_0=1}^m \frac{9}{5C_3^2} m_0^2 d^2 \frac{2^{md}}{2^{d\left(\varepsilon_1 - \frac{2\log_2 m + n \log_2 n}{d}\right)}} \leq \\ &\leq m^3 d^2 \frac{2^{md}}{2^{d\left(\varepsilon_1 - \frac{2\log_2 m + n \log_2 n}{d}\right)}}. \end{aligned}$$

Значит доля операторов из  $L_0(D, m)$  равна:

$$\frac{|L_0(D, m)|}{2^{md}} \leq \frac{m^3 d^2}{2^{d\left(\varepsilon_1 - \frac{2\log_2 m + n \log_2 n}{d}\right)}} \leq \frac{1}{2^{d\left(\varepsilon_1 - \frac{5\log_2 m + 2\log_2 d + n \log_2 n}{d}\right)}}.$$

Оценим выражение в показателе.  $\log_2 m \leq \frac{\varepsilon_1}{6}d, \log_2 d + n \log_2 n = o(d)$  при  $d \rightarrow \infty, n \log_2 n = o(d)$ , поэтому

$$d \left( \varepsilon_1 - \frac{5\log_2 m + 2\log_2 d + n \log_2 n}{d} \right) \geq d \left( \frac{\varepsilon_1}{6} + o(1) \right) \rightarrow \infty$$

при  $d \rightarrow \infty$ ,  $n \log_2 n = o(d)$ .

Поэтому  $\frac{|L_0(D, m)|}{2^{md}} \rightarrow 0$  при  $d \rightarrow \infty$ ,  $n \log_2 n = o(d)$ .

□

Введём величину  $\bar{T}(K)$ . Пусть  $m$  – количество выходов схемы  $K$ , числа  $r_1, \dots, r_{m-1}$  – длины рёбер дерева выходов в порядке возрастания. Положим

$$\bar{T}(K) := \sum_{j=1}^{m-2} \left\lceil \frac{r_j}{2} \right\rceil + 2 \left\lceil \frac{r_{m-1}}{2} \right\rceil.$$

То есть  $\bar{T}(K)$  – величина, равная по порядку суммарной длине рёбер дерева выходов.

Введём множество  $\bar{T}_h := \{K : \bar{T}(K) \leq h\}$ , состоящее из таких объёмных схем, у которых длина дерева выходов не превосходит  $h$  по порядку.

Далее воспользуемся следующей леммой для плоского случая, доказательство которой аналогично переносится на объёмный случай.

**Лемма 11.** (Калачёв Г.В., [11, лемма 8]). Для любой схемы  $K$  с более, чем одним выходом, выполнено

- 1)  $\varphi(r' - 1) = \bar{T}(K)$ , где  $r' := \min\{r : k_r = 1\}$ ,
- 2)  $\varphi(r) \leq \bar{T}(K) + r$  при  $r \geq 1$ .

Введём некоторые обозначения. Пусть  $K$  – объёмная схема,  $M \subseteq \mathbb{Z}^3$  – носитель схемы  $K$ .

- $K_r$  – множество элементов схемы  $K$ , лежащих в множестве  $B_M(r)$ .
- $v_r = |K_r|$  – объём схемы  $K_r$ ;  $v_0 = 0$ .
- $\varphi(r) := \varphi_M(r)$ .
- $I_r$  – множество входов схемы  $K_r$ , лежащих на границе  $B_M(r)$  при  $r \geq 1$ .
- $I_0$  – множество выходов схемы  $K$  (0-й слой схемы  $K$ ).
- $O_r$  – множество выходов схемы  $K_r$ , лежащие на границе  $B_M(r)$  при  $r \geq 1$ ;  $O_0 := \emptyset$ .
- $u_r := \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} \sum_{\alpha \in I_r \cup O_r} g_\alpha(x)$  – средний потенциал на  $r$ -м слое схемы  $K$ .

**Лемма 12.** Если  $m \geq 2$ ,  $f \in P_2(D, m) \setminus L_0(D, m)$ ,  $d = |D|$ , то

$$U_{T_h}(f) \geq C_6 \frac{m\sqrt{md}}{\sqrt{(h + \sqrt[3]{md}) \log_2 d}},$$

где  $C_6$  – некоторая константа.

*Доказательство.* Возьмём произвольную схему  $K \in \bar{T}_{\frac{h}{2}}$ , реализующую оператор  $f$  и её расслоение  $\{K_r\}_{r=1}^{r_0}$ , приняв

$$r_0 := \max \left\{ r \in \mathbb{N} : r^2 \varphi(r-1) \leq \frac{md}{C_4} \right\},$$

где  $C_4 = \frac{5 \cdot 60}{3} C_3$ , а константа  $C_3$  взята из условия леммы 8.

Тогда  $(r_0 + 1)^2 \varphi(r_0) \geq \frac{md}{C_4}$ , значит  $r_0 + 1 \geq \sqrt{\frac{md}{C_4 \varphi(r_0)}}$ . По лемме 11 и определению  $\bar{T}_{\frac{h}{2}}$  получаем

$$r_0 + 1 \geq \sqrt{\frac{md}{C_4 \varphi(r_0)}} \geq \frac{\sqrt{md}}{\sqrt{C_4(\bar{T}(K) + r_0)}} \geq \frac{\sqrt{md}}{\sqrt{C_4\left(\frac{h}{2} + r_0\right)}}. \quad (11)$$

Поскольку  $r_0^3 \leq r_0^2 \varphi(r_0 - 1) \leq \frac{md}{C_4}$ , то  $r_0 \leq \frac{\sqrt[3]{md}}{\sqrt[3]{C_4}}$ . Обозначим  $C_5 := \frac{1}{\sqrt[3]{C_4}}$ , и получим из (11)

$$r_0 + 1 \geq \frac{\sqrt{md}}{\sqrt{C_4\left(\frac{h}{2} + C_5 \sqrt[3]{md}\right)}}$$

Далее по лемме 4 при всех  $r \leq r_0$  получаем  $v_r \leq 60r^2 \varphi(r-1) \leq \frac{3}{5C_3} md$ . Тогда поскольку  $f \notin L_0(D, m)$ , то для любого  $r \leq r_0$  выполнено  $u_r \geq \frac{m}{5 \log_2 d}$ , значит

$$\begin{aligned} U_D(K) &\geq \sum_{r=0}^{r_0} u_r \geq \sum_{r=0}^{r_0} \frac{m}{5 \log_2 d} = \frac{m(r_0 + 1)}{5 \log_2 d} \geq \\ &\geq \frac{m\sqrt{md}}{5\sqrt{C_4\left(\frac{h}{2} + C_5 \sqrt[3]{md}\right)} \log_2 d} \geq C_6 \frac{m\sqrt{md}}{\sqrt{(h + \sqrt[3]{md}) \log_2 d}}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $C_6 := \frac{1}{5\sqrt{C_4 \max\{\frac{1}{2}, C_5\}}}$ .

□

Заметим, что  $T_h \subseteq \bar{T}_{\frac{h}{2}}$ . Далее, рассматривая отдельно случаи  $\sqrt[3]{md} > h$  и  $\sqrt[3]{md} \leq h$ , и взяв  $C = \frac{C_6}{\sqrt{2}}$ , получаем утверждение основной теоремы.

**Теорема 1.** Если  $D \subseteq \{0, 1\}^n$ ,  $d = |D|$ , то существует абсолютная константа  $C$ , такая, что неравенство

$$U_{T_h}(f) \geq \begin{cases} C \frac{m \sqrt[3]{md}}{\log_2 d}, & \text{если } \sqrt[3]{md} > h, \\ C \frac{m \sqrt{md}}{\sqrt{h \log_2 d}}, & \text{если } \sqrt[3]{md} \leq h. \end{cases}$$

выполнено для почти всех  $f \in P_2(D, m)$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $n \log_2(n) = o(d)$ ,  $\log_2(m) = o(d)$ .

## 4. Верхние оценки

### 4.1. Параметры основных блоков

Для реализации булева оператора нам потребуются несколько различных блоков. Опишем их характеристики.

1) Дешифратор  $D_n^1$  (Ефимов А.А., [17, лемма 2]):

$$l(D_n^1) = \mathcal{O}(2^n), \quad w(D_n^1) = \mathcal{O}(2^{n/2}), \quad h(D_n^1) = 1, \quad \hat{U}(D_n^1) = \mathcal{O}(2^n).$$

2) Блок дешифраторов  $D'_{n,k}$  (Калачёв Г.В., [13, лемма 2.19]):

$$l(D'_{n,k}) = \mathcal{O}(k \cdot 2^n), \quad w(D'_{n,k}) = \mathcal{O}(n^2) + \mathcal{O}(nk), \quad h(D'_{n,k}) = 1, \\ \hat{U}(D'_{n,k}) = \mathcal{O}(kn^2 \cdot 2^n) + \mathcal{O}(k^2n \cdot 2^n).$$

3) Левый обратный блок  $D'_{n,k}{}^{-1}$  (Калачёв Г.В., [13, лемма 2.20]):

$$l(D'_{n,k}{}^{-1}) = \mathcal{O}(k \cdot 2^n), \quad w(D'_{n,k}{}^{-1}) = \mathcal{O}(kn^2), \quad h(D'_{n,k}{}^{-1}) = 1, \\ \hat{U}(D'_{n,k}{}^{-1}) = \mathcal{O}(k^2n^2 \cdot 2^n).$$

4) Блок  $\vee_n^k$ , реализующий  $k$  дизъюнкций от  $n$  переменных (Ефимов А.А., [18, лемма 5]):

$$l(\vee_n^k) = 1, \quad w(\vee_n^k) = k, \quad h(\vee_n^k) = n, \quad \hat{U}(\vee_n^k) = \mathcal{O}(nk).$$

5) Схема  $Q_g^1$ , такая что схема  $D_m^{-1} \circ Q_g^1 \circ D'_{k-l,4}$  реализует оператор  $g : \{0, 1\}^{4k-4l} \rightarrow \{0, 1\}^m$ ,  $n = 6k$ ,  $m = 8^{4l}$  (Ефимов А.А., [18, лемма 6]):

$$l(Q_g^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \quad w(Q_g^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \quad h(Q_g^1) = 1, \\ \hat{U}(Q_g^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}).$$

6) Схема  $W_f^1$ , реализующая оператор  $f'(z, \vec{x}) = zf(\vec{x})$ , где оператор  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ , ( $m \leq n$ ) (Ефимов А.А., [18, лемма 7]):

$$l(W_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \quad w(W_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \\ h(W_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \quad \hat{U}(W_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}).$$

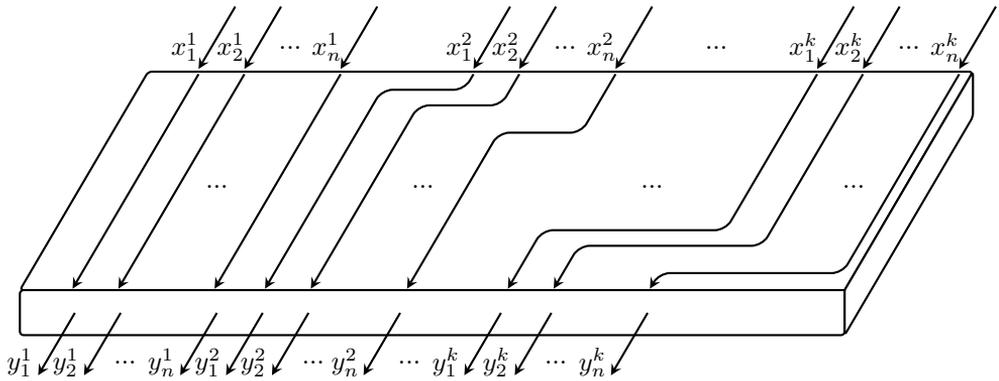


Рис. 7. Реализация блока  $C_{n,k,t}$ .

## 4.2. Реализация булева оператора с близкими выходами

Введём дополнительный блок  $C_{n,k,t}$  (см. рис. 7), реализующий тождественный оператор и «собирающий» выходы вместе.

**Лемма 13.** *Существует объёмная схема  $C_{n,k,t}$  высоты 1, имеющая  $k$  групп по  $n$  входов (всего  $nk$  входов), расстояние между каждыми группами равно  $t$  и реализующая тождественный оператор. Тогда, если потенциал на каждую группу входов ограничен константой  $C_1$ , то схема имеет следующие характеристики:*

- 1)  $l(C_{n,k,t}) = \mathcal{O}((n+t)k)$ ,  $w(C_{n,k,t}) = \mathcal{O}(nk)$ ,  $h(C_{n,k,t}) = 1$ ;
- 2)  $\hat{U}(C_{n,k,t}) = \mathcal{O}((n+t)k^2)$ .

*Доказательство.* Оценим параметры схемы  $C_{n,k,t}$ .

Так как у нас есть  $k$  групп по  $n$  входов и расстояние между группами, то длину схемы можно оценить

$$l(C_{n,k,t}) = \mathcal{O}((n+t)k).$$

Ширина увеличивается на 1 всякий раз, когда нам нужно провести какой-то провод влево. Так как таковых проводов  $k-1$  группа по  $n$  проводов (провода из первой группы не нужно проводить влево), то ширину схемы можно оценить

$$w(C_{n,k,t}) = \mathcal{O}(nk).$$

Высота схемы  $C_{n,k,t}$  равна

$$h(C_{n,k,t}) = 1.$$

Оценим потенциал схемы  $C_{n,k,t}$ . Так как на каждую группу входов потенциал ограничен константой  $C_1$ , то это означает, что от каждой группы проводов активными будут не более  $C_1$ . Таким образом, всего будут активны не более  $C_1 k$  проводов. Потенциал каждого провода по порядку оценим как сумму длины и ширины схемы  $C_{n,k,t}$ . В итоге получаем оценку

$$\hat{U}(C_{n,k,t}) = C_1 k \cdot (\mathcal{O}((n+t)k) + \mathcal{O}(nk)) = \mathcal{O}((n+t)k^2).$$

□

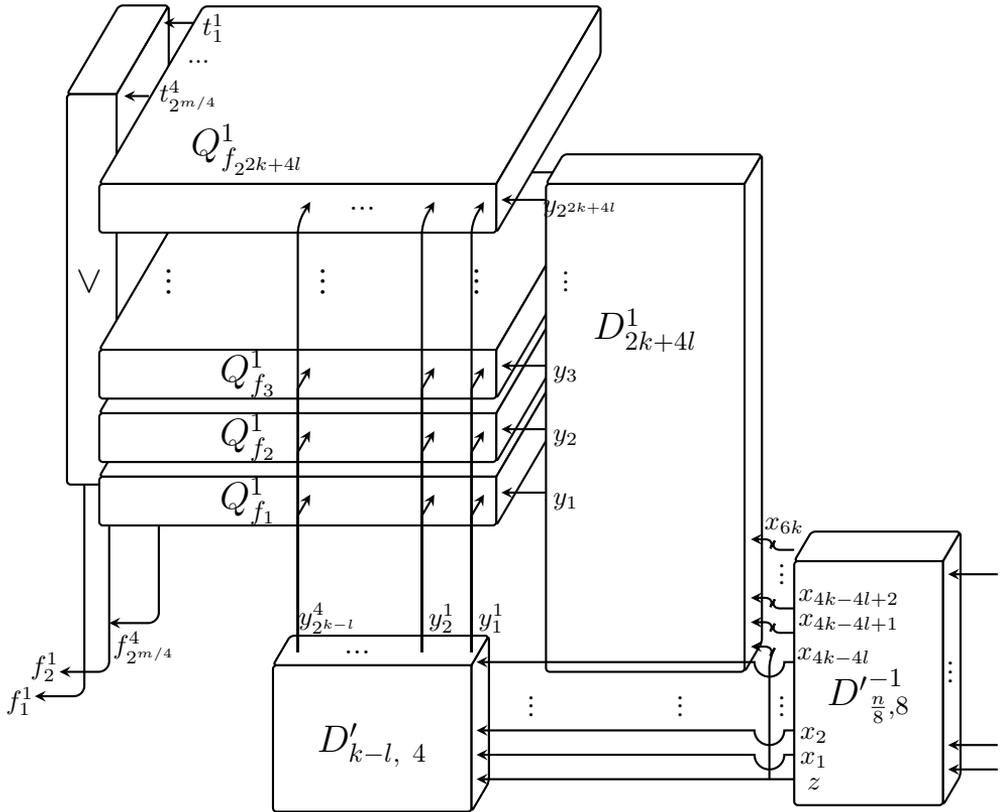


Рис. 8. Реализация блока  $\widetilde{W}_f^1$ .

Далее рассмотрим схему  $\widetilde{W}_f^1$  (см. рис. 8), реализующую булев оператор  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ ,  $m \leq n$ . Эта схема отличается от схемы  $W_f^1$  (Ефимов А.А., [18, лемма 7]) отсутствием блока  $D_{m/4,4}^{-1}$  и наличием бло-

ка  $D_{\frac{n}{8}}^{-1}$ . Покажем, схема  $\widetilde{W}_f^1$  имеет те же характеристики, что и схема  $W_f^1$ .

**Лемма 14.** Для любого булева оператора  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ , ( $m \leq n$ ) существует объёмная схема  $\widetilde{W}_f^1$ , что на схеме  $D_{\frac{m}{4}, 4}^{-1} \circ \widetilde{W}_f^1 \circ D_{\frac{n}{8}, 8}^1$  реализуется оператор  $f'(z, \vec{x}) = zf(\vec{x})$ , причём схема  $\widetilde{W}_f^1$  обладает следующими характеристиками:

- 1)  $l(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$ ,  $w(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$ ,  
 $h(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$ ;
- 2)  $\hat{U}(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$ ;
- 3)  $V(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(m \cdot 2^n)$ .

*Доказательство.* Так как от характеристики схемы  $\widetilde{W}_f^1$  должны совпадать с характеристиками  $W_f^1$ , а они отличаются удалением блока  $D_{m/4, 4}^{-1}$  и добавлением блока  $D_{\frac{n}{8}, 8}^{-1}$ , то достаточно показать, что характеристики блока  $D_{\frac{n}{8}, 8}^{-1}$  не превосходят заявленных характеристик.

$$l(D_{\frac{n}{8}, 8}^{-1}) = \mathcal{O}\left(8 \cdot 2^{\frac{n}{8}}\right) = \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right).$$

$$h(D_{\frac{n}{8}, 8}^{-1}) = 1.$$

$$\hat{U}(D_{\frac{n}{8}, 8}^{-1}) = \mathcal{O}\left(8^2 \cdot \frac{n^2}{8^2} \cdot 2^{\frac{n}{8}}\right) = \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right).$$

□

Теперь построим схему  $\widetilde{W}_f^1$  для булева оператора  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ , где  $n < m \leq 2^{n/2}$ .

**Лемма 15.** Для любого булева оператора  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ , ( $n < m \leq 2^{n/2}$ ) существует объёмная схема  $\widetilde{W}_f^1 \in T_{\text{near}}$  со входами  $z, x_1, x_2, \dots, x_n$  на  $m$  выходах которой на допустимых наборах ( $z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$ ) реализуется оператор  $f'(z, \vec{x}) = zf(\vec{x})$ , причём схема  $\widetilde{W}_f^1$  обладает следующими характеристиками:

- 1)  $l(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$ ,  $w(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$ ,  
 $h(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$ ;

$$2) \hat{U}(\tilde{W}_f^1) = \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right);$$

$$3) V(\tilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(m \cdot 2^n).$$

*Доказательство.* Рассмотрим случай, когда  $n = 8t, k = \sqrt[3]{\frac{m}{n}}$ . Отметим, что условие  $m \leq 2^{n/2} \leq n^2 \cdot 2^n$  можно переписать как  $k = \sqrt[3]{\frac{m}{n}} \leq \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}$ , чем и будем пользоваться в дальнейших оценках. Покажем, что тогда схема, изображенная на рис. 9 реализует оператор  $f$ .

Мы подаем входные переменные  $z, x_1, \dots, x_n$  на вход блоку дешифраторов  $D'_{n/8,8}$ . Далее все эти провода в «зашифрованном» виде подводим к каждому из  $k^3$  соответствующих блоков  $\tilde{W}_{f_{i,j,l}}^1$ , которые реализуют оператор  $f_{i,j,l}$  от  $n$  переменных. Все провода от блока  $D'_{n/8,8}$  к блокам  $\tilde{W}_{f_{i,j,l}}^1$  на рис. 9 изображены пунктирными линиями для удобства восприятия. После этого выходы каждого блока  $\tilde{W}_{f_{i,j,l}}^1$  подаются в «зашифрованном» виде. Далее, собирая все выходы блоков  $\tilde{W}_{f_{i,j,l}}^1$  с помощью двух ярусов блоков  $C_{\alpha,k,\beta}$  и  $C_{k,k,\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}}$ , получаем выходы оператора в «зашифрованном» виде  $f$ , но при этом расположенные рядом. В конце «расшифровываем» выходы с помощью блоков  $D_{n/4,4k}^{-1}$ .

Оценим параметры схемы  $\tilde{W}_f^1$ .

$$\begin{aligned} l(\tilde{W}_f^1) &= k \cdot \left( l(\tilde{W}_{f_{i,j,l}}^1) + k \right) + w(D_{n/8,8}) = \\ &= \sqrt[3]{\frac{m}{n}} \cdot \left( \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}\right) + \sqrt[3]{\frac{m}{n}} \right) + \mathcal{O}(n^2/16 + n) = \\ &= \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(\tilde{W}_f^1) &= k \cdot \left( w(\tilde{W}_{f_{i,j,l}}^1) + 1 \right) = \sqrt[3]{\frac{m}{n}} \cdot \left( \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}\right) + 1 \right) = \\ &= \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(\tilde{W}_f^1) &= k \cdot w(\tilde{W}_{f_{i,j,l}}^1) + 2 \cdot h(C_{k,k,\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}}) = \\ &= \sqrt[3]{\frac{m}{n}} \cdot \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}\right) + \mathcal{O}(k^2) = \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right). \end{aligned}$$

Оценим объём схемы  $\tilde{W}_f^1$ :

$$V(\tilde{W}_f^1) \leq l(\tilde{W}_f^1) \cdot w(\tilde{W}_f^1) \cdot h(\tilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(m \cdot 2^n).$$

Оценим потенциал схемы.

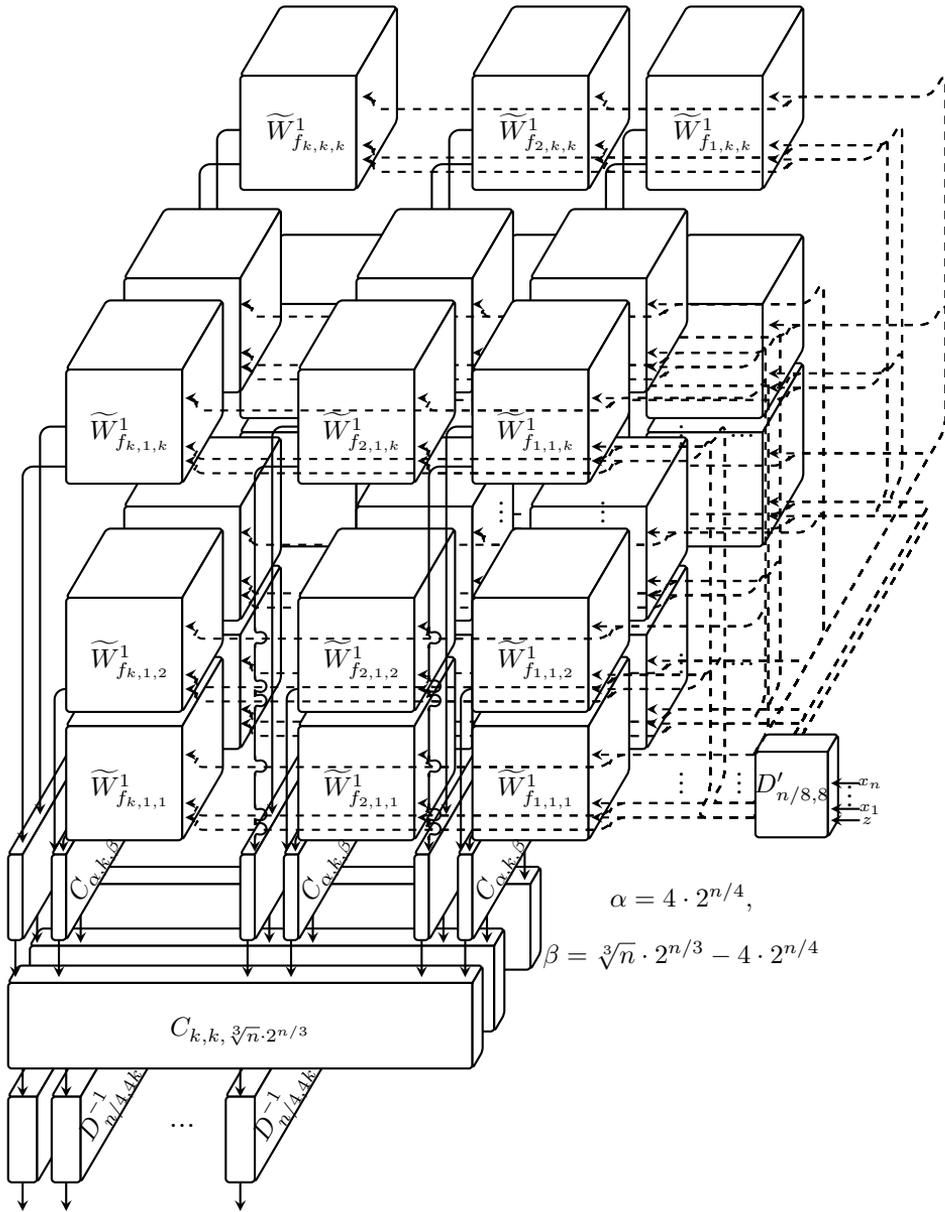


Рис. 9. Реализация блока  $\widetilde{W}_f^1$  ( $n < m \leq 2^{n/2}$ ).

1) Блок дешифраторов  $D'_{n/8,8}$ :

$$U_1 \leq \hat{U}(D'_{n/8,8}) = \mathcal{O}(8n \cdot 2^{n/8} + n^2/8 \cdot 2^{n/8}) = \mathcal{O}(n^2 \cdot 2^{n/8}).$$

- 2) Далее на выходе из блока дешифраторов  $D'_{n/8,8}$  будут активны 8 проводов, которые мы подводим к  $k^3$  блокам  $\widetilde{W}_{f_i,j,l}^1$ . Длину каждого активного провода оценим как  $l(\widetilde{W}_f^1) + w(\widetilde{W}_f^1) + h(\widetilde{W}_f^1)$ . Таким образом, имеем оценку:

$$\begin{aligned} U_2 &\leq 8 \cdot k^3 \cdot \left( l(\widetilde{W}_f^1) + w(\widetilde{W}_f^1) + h(\widetilde{W}_f^1) \right) = \frac{m}{n} \cdot \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right) = \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right). \end{aligned}$$

- 3) Оценим потенциал всех  $k^3$  блоков  $\widetilde{W}_{f_i,j,l}^1$ :

$$U_3 \leq k^3 \cdot \hat{U}\left(\widetilde{W}_{f_i,j,l}^1\right) = \frac{m}{n} \cdot \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}\right).$$

- 4) Далее на выходе каждого блока  $\widetilde{W}_{f_i,j,l}^1$  будут активны 4 провода, которые мы подводим к блокам  $C_{\alpha,k,\beta}$ , где  $\alpha = 4 \cdot 2^{n/4}$ ,  $\beta = \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3} - 4 \cdot 2^{n/4}$ . Длину каждого активного провода оценим как  $h(\widetilde{W}_f^1)$ . Таким образом, имеем оценку:

$$U_4 \leq k^3 \cdot 4 \cdot h(\widetilde{W}_f^1) = \frac{m}{n} \cdot \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right).$$

- 5) Оценим потенциал всех  $k^2$  блоков  $C_{\alpha,k,\beta}$ . Отметим, что в каждом блоке  $C_{\alpha,k,\beta}$  на каждую группу входов подается ровно по 4 активных выхода блока  $\widetilde{W}_{f_i,j,l}^1$ . Таким образом, соблюдены условия леммы 13 и мы имеем оценку:

$$\begin{aligned} U_5 &\leq k^2 \cdot \hat{U}(C_{\alpha,k,\beta}) = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \mathcal{O}\left((\alpha + \beta) k^2\right) = \\ &= \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}}\right) = \\ &= \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right). \end{aligned}$$

- 6) Оценим потенциал всех  $\alpha \cdot k$  блоков  $C_{k,k,\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}}$ . Заметим, что на входе всех блоков активны будут ровно  $4 \cdot k^3$  (это количество активных выходов всех блоков  $\widetilde{W}_{f_i,j,l}^1$ , прошедших через верхний ярус тождественных блоков  $C_{\alpha,k,\beta}$ ). Потенциал от каждого провода оценим  $l(C_{k,k,\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}}) + w(C_{k,k,\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}})$ . Таким образом, имеем оценку:

$$\begin{aligned} U_6 &\leq 4 \cdot k^3 \cdot \left( \mathcal{O}\left(\left(k + \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}\right) k\right) + \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3} \cdot k\right) \right) = \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right). \end{aligned}$$

7) Оценим потенциал всех  $k^2$  блоков  $D_{n/4,4k}^{-1}$ :

$$\begin{aligned} U_7 &\leq k^2 \cdot \hat{U} \left( D_{n/4,4k}^{-1} \right) = k^2 \cdot \mathcal{O} \left( \frac{n^2}{16} \cdot 16k^2 \cdot 2^{n/4} \right) = \\ &= \mathcal{O} \left( \frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot n^{2/3} \cdot 2^{n/4} \right). \end{aligned}$$

В итоге, имеем следующую оценку потенциала схемы  $\widetilde{W}_f^1$ :

$$\begin{aligned} \hat{U} \left( \widetilde{W}_f^1 \right) &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 = \mathcal{O} \left( n^2 \cdot 2^{n/8} \right) + \\ &+ \mathcal{O} \left( \frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3} \right) + \\ &+ \mathcal{O} \left( \frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3} \right) + \\ &+ \mathcal{O} \left( \frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot n^{2/3} \cdot 2^{n/4} \right) = \mathcal{O} \left( \frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем верное утверждение теоремы в случае  $n = 8t, k = \sqrt[3]{\frac{m}{n}}$ . Если же  $n = 8t + r, m = k^3 n + l$ , где  $1 \leq r \leq 7, 1 \leq l \leq ((3k^2 + 3k + 1)n - 1)$ , то построим схему для  $n = 8t + 8, m = (k + 1)^3 n$  и на последние  $8 - r$  входов подадим константу 0, а лишние выходы доопределим нулем. Заметим, что в данном случае получим искомую схему и константы в оценках увеличатся не более, чем в константу раз, а значит оценки по порядку останутся верными.  $\square$

Далее построим схему  $\widetilde{W}_f^1$  для булева оператора  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^{m_0}$ , где  $m_0 = 2^{n/2}$ , причём выходы схемы  $\widetilde{W}_f^1$  будут расположены на одной прямой.

**Лемма 16.** *Для любого булева оператора  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^{m_0}$ , ( $m_0 = 2^{n/2}$ ) существует объемная схема  $\widetilde{W}_f^1 \in T_{\text{near}}$  со входами  $z, x_1, x_2, \dots, x_n$  на  $m_0$  выходах которой на допустимых наборах ( $z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$ ) реализуется оператор  $f^1(z, \vec{x}) = z f(\vec{x})$ , причём схема  $\widetilde{W}_f^1$  обладает следующими характеристиками:*

- 1)  $l \left( \widetilde{W}_f^1 \right) = \mathcal{O} \left( 2^{n/2} \right), w \left( \widetilde{W}_f^1 \right) = \mathcal{O} \left( 2^{n/2} \right),$   
 $h \left( \widetilde{W}_f^1 \right) = \mathcal{O} \left( m_0 \right) = \mathcal{O} \left( 2^{n/2} \right);$
- 2)  $\hat{U} \left( \widetilde{W}_f^1 \right) = \mathcal{O} \left( \frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2} \right);$
- 3)  $V \left( \widetilde{W}_f^1 \right) = \mathcal{O} \left( m_0 \cdot 2^n \right).$

*Доказательство.* Рассмотрим случай, когда  $n = 8t$ . Обозначим  $k_0 = \sqrt[3]{\frac{m_0}{n}} = \frac{2^{n/6}}{n^{1/3}}$ . Покажем, что тогда схема, изображенная на рис. 10 реализует оператор  $f$ .

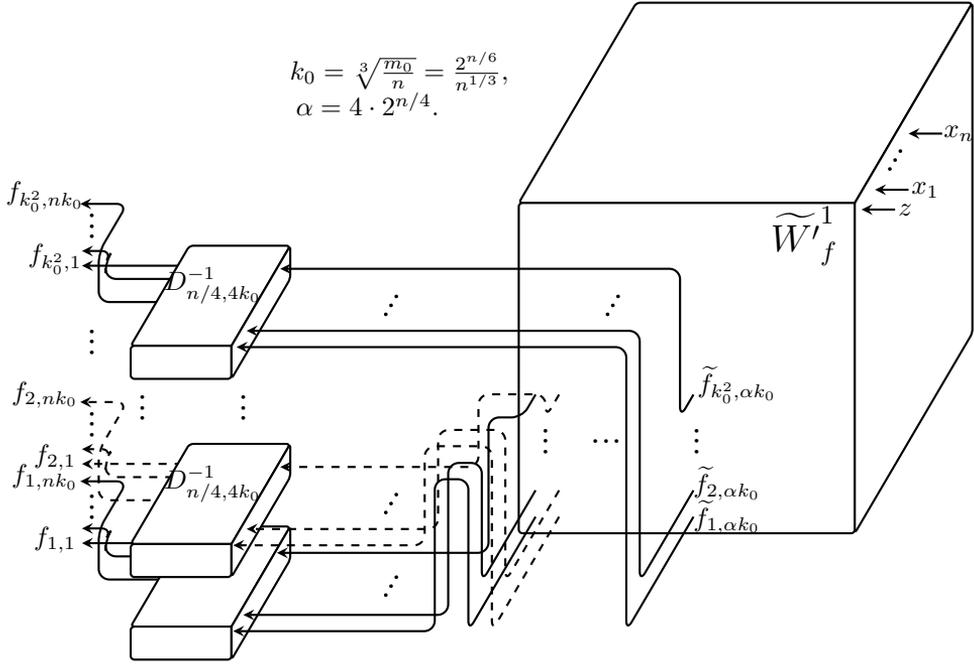


Рис. 10. Реализация вспомогательного блока  $\widetilde{W}'_f^1$  ( $m_0 = 2^{n/2}$ ).

Мы подаем входные переменные  $z, x_1, \dots, x_n$  на вход блока  $\widetilde{W}'_f^1$  (который отличается от блока  $\widetilde{W}_f^1$  отсутствием блоков  $D_{n/4, 4k}^{-1}$ , стоящих на выходах, см. Рис. 9), реализующий оператор  $f$  с  $n$  входами и  $m_0 = 2^{n/2}$  выходами. Далее, собирая все «зашифрованные» выходы блока  $\widetilde{W}'_f^1$  и расшифровывая их с помощью блоков  $D_{n/4, 4k_0}^{-1}$ , получаем выходы оператора  $f$ .

Оценим параметры схемы  $\widetilde{W}_f^1$ .

$$\begin{aligned} l(\widetilde{W}_f^1) &= l(\widetilde{W}'_f^1) + \mathcal{O}(k_0^2) + w(D_{n/4,4k_0}^{-1}) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m_0} \cdot 2^{n/3}) + \\ &+ \mathcal{O}\left(\frac{2^{n/3}}{n^{2/3}}\right) + \mathcal{O}(k_0 \cdot n^2) = \mathcal{O}(2^{n/2}) + \mathcal{O}(n^{1/3} \cdot 2^{n/3}) = \\ &= \mathcal{O}(2^{n/2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(\widetilde{W}_f^1) &= w(\widetilde{W}'_f^1) + l(D_{n/4,4k_0}^{-1}) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m_0} \cdot 2^{n/3}) + \mathcal{O}(\alpha k_0) = \\ &= \mathcal{O}(2^{n/2}) + \mathcal{O}\left(\frac{2^{5/12}}{n^{1/3}}\right) = \mathcal{O}(2^{n/2}). \end{aligned}$$

$$h(\widetilde{W}_f^1) = h(\widetilde{W}'_f^1) = \mathcal{O}(2^{n/2}) = \mathcal{O}(m_0).$$

Оценим объём схемы  $W_f^1$ :

$$V(\widetilde{W}_f^1) \leq l(\widetilde{W}_f^1) \cdot w(\widetilde{W}_f^1) \cdot h(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(m_0 \cdot 2^n).$$

Оценим потенциал схемы.

1) Блок  $\widetilde{W}'_f^1$ :

$$U_1 \leq \hat{U}(\widetilde{W}'_f^1) = \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot \sqrt[3]{m_0} \cdot 2^{n/3}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2}\right).$$

2) Далее на выходе из блока  $\widetilde{W}'_f^1$  среди всех «зашифрованных» выходов  $\widetilde{f}_{i,j}$  будут активны ровно  $4k_0^3$  (это следует из того, что блок  $\widetilde{W}'_f^1$  состоит из  $k_0^3$  блоков  $\widetilde{W}_{f_{i,j,k}}^1$ , выходы которых шифровались с помощью блока дешифраторов  $D'_{n/4,4}$ ). Длину каждого провода оценим  $l(\widetilde{W}_f^1) + 3h(\widetilde{W}_f^1)$ . Таким образом, имеем оценку:

$$U_2 \leq 4k_0^3 \cdot \left(l(\widetilde{W}_f^1) + 3h(\widetilde{W}_f^1)\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2}\right).$$

3) Оценим потенциал всех  $k_0^2$  блоков  $D_{n/4,4k_0}^{-1}$ :

$$\begin{aligned} U_3 &\leq k_0^2 \cdot \hat{U}(D_{n/4,4k_0}^{-1}) = k_0^2 \cdot \mathcal{O}(n^2 \cdot k_0^2 \cdot 2^{n/4}) = \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot \frac{m_0^{1/3}}{n^{1/3}} \cdot n^2 \cdot 2^{n/4}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot n^{5/3} \cdot 2^{5n/12}\right) = \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2}\right). \end{aligned}$$

- 4) Оценим потенциал всех проводов, выходящих из блоков  $D_{n/4,4k_0}^{-1}$ . В каждом таком блоке  $nk_0$  проводов, длину каждого можно оценить  $2nk_0$ . Так как в схеме имеется  $k_0^2$  блоков  $D_{n/4,4k_0}^{-1}$ , то имеем оценку:

$$\begin{aligned} U_4 &\leq nk_0 \cdot 2nk_0 \cdot k_0^2 = \mathcal{O} \left( \frac{m_0}{n} \cdot \frac{m_0^{1/3}}{n^{1/3}} \cdot n^2 \right) = \mathcal{O} \left( \frac{m_0}{n} \cdot n^{5/3} \cdot 2^{n/6} \right) = \\ &= \mathcal{O} \left( \frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2} \right). \end{aligned}$$

В итоге, имеем следующую оценку потенциала схемы  $\widetilde{W}_f^1$ :

$$\begin{aligned} \hat{U} \left( \widetilde{W}_f^1 \right) &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = \mathcal{O} \left( \frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2} \right) + \\ &+ \mathcal{O} \left( \frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2} \right) = \mathcal{O} \left( \frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем верное утверждение теоремы в случае  $n = 8t$ . Если же  $n = 8t + r$ , где  $r = 1 \dots 7$ , то построим схему для  $n = 8t + 8$  и на последние  $8 - r$  входов подадим константу 0. Заметим, что в данном случае получим искомую схему и константы в оценках увеличатся не более, чем в константу раз, а значит оценки по порядку останутся верными. □

Теперь построим схему  $\widetilde{W}_f^1$  для булева оператора  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ , где  $m > 2^{n/2}$ .

**Лемма 17.** *Для любого булева оператора  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ , ( $m > 2^{n/2}$ ) существует объёмная схема  $\widetilde{W}_f^1 \in T_{\text{near}}$  со входами  $z, x_1, x_2, \dots, x_n$  на  $m$  выходах которой на допустимых наборах ( $z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$ ) реализуется оператор  $f'(z, \vec{x}) = zf(\vec{x})$ , причём схема  $\widetilde{W}_f^1$  обладает следующими характеристиками:*

- 1)  $l \left( \widetilde{W}_f^1 \right) = \mathcal{O} \left( 2^{n/2} \right)$ ,  $w \left( \widetilde{W}_f^1 \right) = \mathcal{O} \left( 2^{n/2} \right)$ ,  $h \left( \widetilde{W}_f^1 \right) = \mathcal{O}(m)$ ;
- 2)  $\hat{U} \left( \widetilde{W}_f^1 \right) = \mathcal{O} \left( \frac{m}{n} \cdot 2^{n/2} \right)$ ;
- 3)  $V \left( \widetilde{W}_f^1 \right) = \mathcal{O} \left( m \cdot 2^n \right)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим случай, когда  $n = 8t, m = k \cdot 2^{n/2}$ . Покажем, что тогда схема, изображенная на рис. 11 реализует оператор  $f$ .

Мы подаем входные переменные  $z, x_1, \dots, x_n$  на вход блоку дешифраторов  $D'_{n/8,8}$ , далее все эти провода подводим к каждому из  $k$  блоков

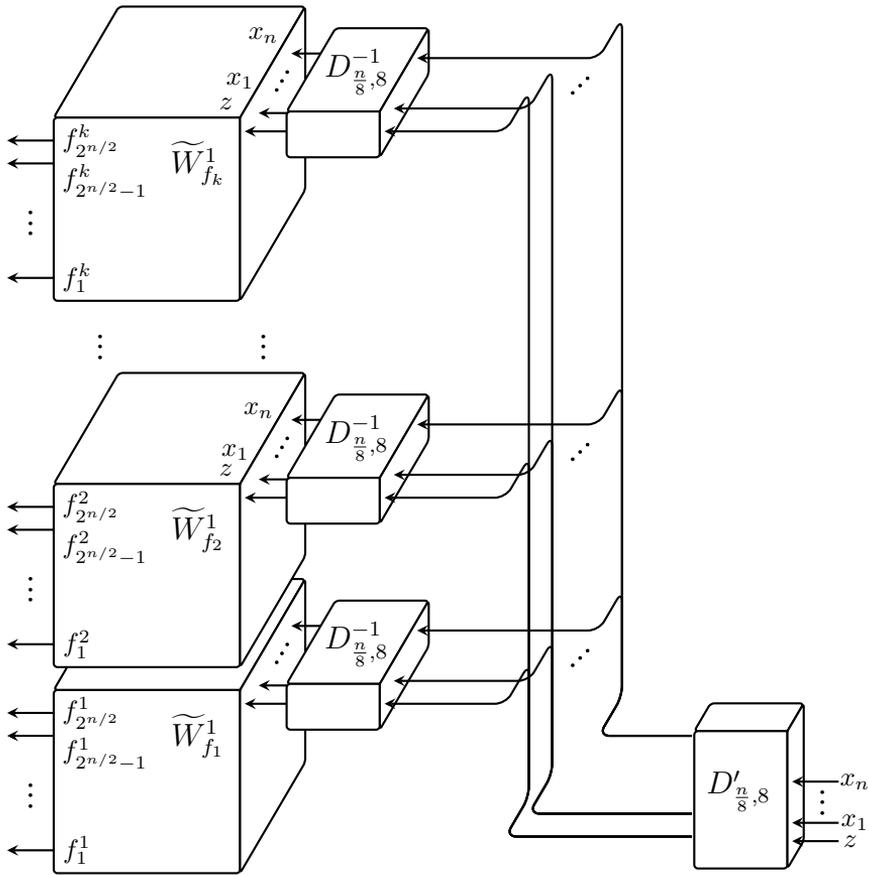


Рис. 11. Реализация блока  $\widetilde{W}_f^1$  ( $m > 2^{n/2}$ ).

обратных дешифраторов  $D_{n/8,8}^{-1}$ . «Расшифрованные» переменные  $z, x_1, \dots, x_n$  мы подаем на соответствующий блок  $\widetilde{W}_{f_i}^1$ , реализующий оператор  $f_i$  с  $n$  входами и  $m_0 = 2^{n/2}$  выходами. Далее, собирая все выходы блоков  $\widetilde{W}_{f_i}^1$ , получаем выходы оператора  $f$ .

Оценим параметры схемы  $\widetilde{W}_f^1$ .

$$\begin{aligned} l(\widetilde{W}_f^1) &= l(\widetilde{W}_{f_i}^1) + w(D_{n/8,8}^{-1}) + \mathcal{O}(8 \cdot 2^{n/8}) + w(D'_{n/8,8}) = \\ &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m_0} \cdot 2^{n/3}) + \mathcal{O}(n^2/8) + \mathcal{O}(8 \cdot 2^{n/8}) + \mathcal{O}(n^2/16 + n) = \\ &= \mathcal{O}(2^{n/2}) + \mathcal{O}(8 \cdot 2^{n/8}) = \mathcal{O}(2^{n/2}). \end{aligned}$$

$$w(\widetilde{W}_f^1) = w(\widetilde{W}_{f_i}^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m_0} \cdot 2^{n/3}) = \mathcal{O}(2^{n/2}).$$

$$\begin{aligned} h(\widetilde{W}_f^1) &= k \cdot h(\widetilde{W}_{f_i}^1) = \frac{m}{2^{n/2}} \cdot \mathcal{O}(\sqrt[3]{m_0} \cdot 2^{n/3}) = \frac{m}{2^{n/2}} \cdot \mathcal{O}(2^{n/2}) = \\ &= \mathcal{O}(m). \end{aligned}$$

Оценим объём схемы  $\widetilde{W}_f^1$ :

$$V(\widetilde{W}_f^1) \leq l(\widetilde{W}_f^1) \cdot w(\widetilde{W}_f^1) \cdot h(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(m \cdot 2^n).$$

Оценим потенциал схемы.

1) Блок дешифраторов  $D'_{n/8,8}$ :

$$U_1 \leq \hat{U}(D'_{n/8,8}) = \mathcal{O}(8n \cdot 2^{n/8} + n^2/8 \cdot 2^{n/8}) = \mathcal{O}(n^2 \cdot 2^{n/8}).$$

2) Далее на выходе из блока дешифраторов  $D'_{n/8,8}$  будут активны 8 проводов, которые мы подводим к блокам  $D_{n/8,8}^{-1}$ . Таким образом, имеем оценку:

$$U_2 \leq 8 \cdot \left( h(\widetilde{W}_f^1) + k \cdot \mathcal{O}(8 \cdot 2^{n/8}) \right) = \mathcal{O}(m).$$

3) Оценим потенциал всех  $k$  блоков  $D_{n/8,8}^{-1}$ :

$$U_3 \leq k \cdot \hat{U}(D_{n/8,8}^{-1}) = \frac{m}{2^{n/2}} \cdot \mathcal{O}(n^2 \cdot 2^{n/8}) = \mathcal{O}(m).$$

4) Оценим потенциал всех  $k$  блоков  $\widetilde{W}_{f_i}^1$ :

$$U_4 \leq k \cdot \hat{U}(\widetilde{W}_{f_i}^1) = \frac{m}{2^{n/2}} \cdot \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot 2^{n/2}\right).$$

В итоге, имеем следующую оценку потенциала схемы  $\widetilde{W}_f^1$ :

$$\begin{aligned} \hat{U}(\widetilde{W}_f^1) &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = \\ &= \mathcal{O}(n^2 \cdot 2^{n/8}) + \mathcal{O}(m) + \mathcal{O}(m) + \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot 2^{n/2}\right) = \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot 2^{n/2}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем верное утверждение теоремы в случае  $n = 8t, m = k2^{n/2}$ . Если же  $n = 8t + r, m = k2^{n/2} + l$ , где  $r = 1 \dots 7, l = 1 \dots (2^{n/2} - 1)$ , то построим схему для  $n = 8t + 8, m = (k + 1)2^{n/2}$  и на последние  $8 - r$  входов подадим константу 0. Заметим, что в данном случае получим искомую схему и константы в оценках увеличатся не более, чем в константу раз, а значит оценки по порядку останутся верными.  $\square$

В качестве следствия из леммы 14, леммы 15 и леммы 17 докажем теорему 2, для удобства обозначив  $K_f = \widetilde{W}_f$ .

**Теорема 2.** *Для любого булева оператора  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ , существует объёмная схема  $K_f \in T_{\text{near}}$  со входами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на  $m$  выходах которой реализуется оператор  $f$ , причём схема  $K_f$  обладает следующими характеристиками:*

1) Если  $m \leq n$ :

$$\begin{aligned} \text{а) } l(K_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \quad w(K_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \\ h(K_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}); \\ \text{б) } \hat{U}(K_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}); \\ \text{в) } V(K_f) &= \mathcal{O}(m \cdot 2^n). \end{aligned}$$

2) Если  $n < m \leq 2^{n/2}$ :

$$\begin{aligned} \text{а) } l(K_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \quad w(K_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \\ h(K_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}); \\ \text{б) } \hat{U}(K_f) &= \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right); \\ \text{в) } V(K_f) &= \mathcal{O}(m \cdot 2^n). \end{aligned}$$

3) Если  $m > 2^{n/2}$ :

$$\begin{aligned} \text{а) } l(K_f) &= \mathcal{O}(2^{n/2}), \quad w(K_f) = \mathcal{O}(2^{n/2}), \\ h(K_f) &= \mathcal{O}(m); \\ \text{б) } \hat{U}(K_f) &= \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot 2^{n/2}\right); \\ \text{в) } V(K_f) &= \mathcal{O}(m \cdot 2^n). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Построим схему  $K_f$ , используя лемму 14 при  $m \leq n$ , лемму 15 при  $n < m \leq 2^{n/2}$  или лемму 17 при  $m > 2^{n/2}$ . Подадим в схеме  $\widetilde{W}_f^1$  на вход  $z$  константу 1. Полученная таким образом схема  $K_f$  реализует оператор  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на всех наборах  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и её параметры остаются такими же по порядку, как и у схемы  $\widetilde{W}_f^1$ .  $\square$

В качестве следствия из теорем 1 и 2 докажем утверждение.

**Следствие 2.** Для почти всех  $f \in P_2(n, m)$ , при  $m \geq n, n \rightarrow \infty$ ,  $\log_2(m) = o(2^n)$  верно равенство:

$$U_{T_{\text{near}}}(f) = \Theta\left(\frac{m}{n} \cdot \min^{1/3}(m, 2^{n/2}) \cdot 2^{n/3}\right).$$

*Доказательство.* Так как согласно теореме 2 для любого оператора  $f \in P_2(n, m)$  существует объёмная схема  $K_f \in T_{\text{near}}$ , такая, что  $\hat{U}\left(\widetilde{W}_f\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right)$ , то

$$U_{T_{\text{near}}}(f) \leq \Theta\left(\frac{m}{n} \cdot \min^{1/3}(m, 2^{n/2}) \cdot 2^{n/3}\right).$$

Покажем, что выполнено условие теоремы 1. Так как длина  $h$  дерева выходов минимальна, то она равна  $\mathcal{O}(m)$ ,  $d = 2^n$ . Условия  $n \log_2 n = o(d)$ ,  $m = 2^{o(d)}$  выполнены. Тогда условие  $\sqrt[3]{md} \geq h$  можно переписать как  $m \leq 2^{n/2}$  (в случае  $h = \sqrt[3]{md}$  нижняя оценка одинакова, поэтому его тоже можно включить). Таким образом из теоремы 1 получаем оценку:

$$U_{T_{\text{near}}}(f) \geq \Theta\left(\frac{m}{n} \cdot \min^{1/3}(m, 2^{n/2}) \cdot 2^{n/3}\right).$$

Соединив вместе две оценки, получим необходимое утверждение. □

## Список литературы

- [1] Muller D.E., “Complexity in Electronics Switching Circuits”, *IRE Transactions on Electronic Computers*, **EC-5**, no. 1 (1956), 15–19.
- [2] Вайнцвайг М.Н., “О мощности схем из функциональных элементов”, *Докл. АН СССР*, **Т. 139**, № 2 (1961), 320–323.
- [3] Лупанов О.Б., “Об одном подходе к синтезу управляющих систем – принципе локального кодирования”, *Проблемы кибернетики*, **14** (1965), 31–110.
- [4] Кравцов С.С., “О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов”, *Проблемы кибернетики*, **19** (1967), 285–293.
- [5] Коршунов А.Д., “Об оценках сложности из объёмных функциональных элементов и объёмных схем из функциональных элементов”, *Проблемы кибернетики*, **19** (1967), 275–283.

- [6] Касим-Заде О.М., “Об одной мере сложности схем из функциональных элементов”, *Проблемы кибернетики*, **38** (1981), 117–179.
- [7] Шкаликowa Н.А., “О реализации булевых функций схемами из клеточных элементов”, *Математические вопросы кибернетики*, **2** (1989), 177–197.
- [8] Андреев А.Е., Вихлянцев И.А., “Оценки длины кода для схем из функциональных элементов”, *Дискретная математика*, **6:4** (1994), 10–20.
- [9] Шуткин Ю.С., “Об одновременной минимизации объёмной и временной сложности контактных и вентильных схем”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **14**, № 1-4 (2010), 595–615.
- [10] Чашкин А.В., “Дискретная математика”, *Академия Москва*, (2012), 352.
- [11] Калачёв Г.В., “Нижние оценки мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **18:2** (2014), 279–322.
- [12] Калачёв Г.В., “Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции”, *Дискретная математика*, **26:1** (2014), 49–74.
- [13] Калачёв Г.В., “Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **20:2** (2016), 203–266.
- [14] Калачёв Г.В., “Об оценках мощности плоских схем для замкнутых классов булевых функций”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **20:3** (2016), 52–57.
- [15] Калачёв Г.В., “Оценки мощности плоских схем, реализующих функции с ограниченным числом единиц”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21:1** (2017).
- [16] Калачёв Г.В., “Оценки мощности плоских схем, реализующих монотонные функции”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21:2** (2017).
- [17] Ефимов А.А., “Верхняя оценка энергопотребления в классе объёмных схем”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23:1** (2019), 117–132.

- [18] Ефимов А.А., “Верхняя оценка энергопотребления объемных схем, реализующих булевы операторы”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23:2** (2019), 105–124.
- [19] Жуков В.В., Ложкин С.А., “Асимптотически наилучший метод синтеза булевых рекурсивных схем”, *Дискретная математика*, **31:1** (2019), 99–110.
- [20] Сытдыков Т.Р., “Сложность синтеза многомерных прямоугольных схем”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23:3** (2019), 61–80.
- [21] Сытдыков Т.Р., Калачёв Г.В., “Сложность многослойных d-мерных схем”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **25:2** (2021), 131–154.

### Potential estimates for a class of volume circuits with near outputs.

**Efimov A.A.**

In this paper, volume circuits are considered, which are the embeddings of circuits of functional elements in space. The class  $T_{\text{near}}$  of circuits where the outputs are located side by side was considered. For this class, the lower and upper estimates of the potential are obtained. Potential is a measure of power equal to the number of circuit elements that produce one on a given input. In particular, it is shown that for Boolean operators with  $n$  inputs and  $m$  outputs, the order of the Shannon function for the  $T_{\text{near}}$  circuit class is  $\Theta\left(\frac{m}{n} \cdot \min^{1/3}(m, 2^{n/2}) \cdot 2^{n/3}\right)$  for  $m \geq n$ ,  $\log_2(m) = o(2^n)$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

**Keywords:** circuits from functional elements, volume circuits, circuit power, potential.

### Список литературы

- [1] Muller D.E., “Complexity in Electronics Switching Circuits”, *IRE Transactions on Electronic Computers*, **EC-5**, no. 1 (1956), 15–19.
- [2] Weinzwieg M.N., “On the power of circuits from functional elements”, *Reports of the USSR Academy of Sciences*, **T. 139**, № 2 (1961), 320–323.

- [3] Lupanov O.B., “On one approach to the synthesis of control systems - the principle of local coding”, *Problems of cybernetics*, **14** (1965), 31–110.
- [4] Kravtsov C.C., “On the implementation of logic algebra functions in one class of circuits from functional and switching elements”, *Problems of cybernetics*, **19** (1967), 285–293.
- [5] Korshunov A.D., “On complexity estimates from volumetric functional elements and volumetric schemes from functional elements”, *Problems of cybernetics*, **19** (1967), 275–283.
- [6] Kasim-Zadeh O.M., “On one measure of the complexity of schemes of functional elements”, *Problems of cybernetics*, **38** (1981), 117–179.
- [7] Shkalikova N.A., “On the implementation of Boolean functions by schemes of cellular elements”, *Mathematical problems of cybernetics*, **2** (1989), 177–197.
- [8] Andreev A.E., Vikhlyantsev I.A., “Code length estimates for schemes of functional elements”, *Discrete mathematics*, **6**:4 (1994), 10–20.
- [9] Shutkin Y.S., “On simultaneous minimization of volume and time complexity of contact and valve circuits”, *Intelligent systems*, **14**, № 1-4 (2010), 595–615.
- [10] Chashkin A.V., “Discrete mathematics”, *Academy Moscow*, (2012), 352.
- [11] Kalachev G.V., “Lower bounds for the potential of flat circuits realizing partial Boolean operators”, *Intelligent systems*, **18**:2 (2014), 279–322.
- [12] Kalachev G.V., “Power order of planar circuits that implement Boolean functions”, *Discrete mathematics*, **26**:1 (2014), 49–74.
- [13] Kalachev G.V., “On the simultaneous minimization of area, power, and depth of planar circuits realizing partial Boolean operators”, *Intelligent systems*, **20**:2 (2016), 203–266.
- [14] Kalachev G.V., “On estimates for the potential of planar circuits for closed classes of Boolean functions”, *Intelligent systems*, **20**:3 (2016), 52–57.
- [15] Kalachev G.V., “Estimates for the potential of planar circuits realizing functions with a limited number of ones”, *Intelligent systems*, **21**:1 (2017).

- [16] Kalachev G.V., “Estimates for the potential of planar circuits implementing monotone functions”, *Intelligent systems*, **21**:2 (2017).
- [17] Efimov A.A., “Upper estimate of potential in the class of volumetric circuits”, *Intelligent systems*, **23**:1 (2019), 117–132.
- [18] Efimov A.A., “Upper bound for potential of volumetric circuits implementing Boolean operators”, *Intelligent systems*, **23**:2 (2019), 105–124.
- [19] Zhukov V.V., Lozhkin S.A., “Asymptotically best method for designing Boolean recursive circuits”, *Discrete mathematics*, **31**:1 (2019), 99–110.
- [20] Sytdykov T.R., “Complexity of synthesis of multidimensional rectangular schemes”, *Intelligent systems*, **23**:3 (2019), 61–80.
- [21] Sytdykov T.R., Kalachev G.V., “Complexity of multilayer d-dimensional circuits”, *Intelligent systems*, **25**:2 (2021), 131–154.

# Поиск семейства простых циклов в орграфе с полустепенями вершин, не превосходящими 2

А. А. Медведев<sup>1</sup>

Исследована алгоритмическая сложность задачи о поиске семейства простых циклов, обходящих каждую вершину орграфа с полустепенями вершин, не превосходящими 2. Рассмотрены поисковый и оптимизационный ее варианты. Показана полиномиальная разрешимость задачи в обоих вариантах, предложен алгоритм со временем работы  $O(n^3)$ , для частной постановки представлен алгоритм, требующий  $O(n^2)$  операций;  $n$  — количество вершин орграфа.

**Ключевые слова:** ориентированные графы, простые циклы, задачи поиска, оптимизация, класс P, полиномиальная разрешимость.

## 1. Введение

В настоящей работе рассматриваются частные постановки задачи о поиске в заданном ориентированном графе такого набора непересекающихся простых циклов, который покрывал бы все множество вершин этого графа. Она, в свою очередь, является обобщением задачи о гамильтоновом цикле, известной в разрешимостном (определить, является ли заданный граф гамильтоновым) и нескольких оптимизационных вариантах (требуется найти гамильтонов цикл с ограниченным тем или иным образом весом, если такой цикл существует). На сегодняшний день доказана NP-полнота поисковой задачи о гамильтоновом цикле в общей постановке (на произвольных ориентированных и неориентированных графах) [1], трехсвязных 3-регулярных двудольных графах [2], подграфах квадратных решеток [3] и кубических подграфах квадратных решеток [4], орграфах с полустепенями вершин не более 2 [5]. В то же время известна полиномиальная разрешимость этой задачи на четырехсвязных планарных графах [6], неориентированных графах с максимальной степенью вершин, не превосходящей 3 [7], и в оптимизационной постановке (иначе — задачи коммивояжера) на графах, матрицы весов которых являются матрицами Демиденко [8] и в общей постановке [9]. Кроме того, по-

---

<sup>1</sup>Медведев Анатолий Александрович — студент каф. "Высшая математика"(ФН-1) факультета "Фундаментальные науки"(ФН) МГТУ им. Н. Э. Баумана, e-mail: medvedevaa@student.bmstu.ru.

Medvedev Anatoly Alexandrovich — student, Bauman Moscow State Technical University, Department of Fundamental Sciences, Chair of Higher Mathematics.

лучен ряд проверяемых за полиномиальное время достаточных условий существования гамильтонова цикла: Дирака–Оре [10, 11], Гуйя–Ури [12], Woodall [13], Christofides [14], Keevash [15], Kelly [16]. Задача, исследование которой проводится в настоящей работе, представляет интерес как связанная с задачей о гамильтоновом цикле, поскольку всякое решение последней может служить решением задачи о семействе циклов. Ниже эта задача рассмотрена в разрешимостной и оптимизационной постановках.

## 2. Неоптимизационная задача о семействе простых циклов в орграфе с полустепенями вершин, не превосходящими 2

**Определение 1.** Вершинно-простым циклом в ориентированном графе  $G = (V, E)$ , где  $V$  — множество его вершин, а  $E$  — множество дуг соответственно, называется такая последовательность из  $m$  вершин и  $m$  дуг  $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_m, e_m$ , что  $\forall i (i = \overline{1, m-1})(v_i \in V)(e_i \in E)(e_i = (v_i, v_{i+1}))$  и, кроме того,  $e_m = (v_m, v_1)$ , причем если  $i \neq j$ , то  $v_i \neq v_j$ .

**Определение 2.** Ориентированный граф  $G = (V, E)$  со множеством вершин  $V$  и дуг  $E$  называется взвешенным, если для него определена функция  $w = w(v, u), v, u \in V$ , равная некоторому значению из  $R \setminus \{0\}$ , если  $(v, u) \in E$ , и 0 в противном случае.

**Определение 3.** Пусть элементы множества вершин  $V$  пронумерованы. Матрицей весов  $W$  взвешенного орграфа из определения 2 называется такая таблица размерности  $|V| \times |V|$ , что  $W_{ij} = w(v_i, v_j)$ .

**Определение 4.** Пусть элементы множества вершин  $V$  пронумерованы. Матрицей смежности  $A$  взвешенного орграфа из определения 2 называется такая таблица размерности  $|V| \times |V|$ , что  $A_{ij} = 1$ , если  $(v_i, v_j) \in E$ , и 0 в противном случае.

**Определение 5.** Ориентированный граф  $G = (V, E)$  со множеством вершин  $V$  и дуг  $E$  невзвешенный, если его матрица весов  $W$  тождественна матрице смежности  $A$ .

**Определение 6.** (Задача НСЦ) Пусть дан взвешенный ориентированный граф  $G = (V, E)$ , где  $V$  — множество его вершин, а  $E$  — множество дуг соответственно, обладающий следующим свойством:  $\forall v (v \in V)(deg^{out} v \leq 2)(deg^{in} v \leq 2)$ . Требуется найти такой набор вершинно-простых циклов, чтобы каждая вершина из  $V$  содержалась ровно в одном из них.

**Пример 1.** Рассмотрим орграф, заданный матрицей смежности  $A_1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поиском в глубину находим в нем простые циклы:  $1 - 2 - 3 - 1$ ,  $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1$ ,  $1 - 3 - 1$ ,  $1 - 3 - 4 - 5 - 1$ ,  $4 - 5 - 4$ .

Следующие наборы циклов являются решением задачи НСЦ для этого орграфа:  $\{1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1\}$ ,  $\{1 - 2 - 3 - 1, 4 - 5 - 4\}$ .

Далее рассмотрим оргграф, заданный матрицей смежности  $A_2$ ,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

на котором задача НСЦ решения не имеет.

Поиском в глубину находятся циклы:  $1 - 2 - 5 - 4 - 1$ ,  $1 - 5 - 4 - 1$ .

Никакой набор, составленный из этих циклов, очевидно не может быть решением задачи хотя бы потому, что ни один из них не содержит вершины 3.

**Определение 7.** XOR-КНФ называется форма представления булевой функции в следующем виде:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{k=1}^m \bigoplus_{j=1}^{|A_k|} x_{\alpha_{kj}}^{\sigma_{kj}} = \bigwedge_{k=1}^m R_k(x, \Sigma_k, A_k), \quad (1)$$

где  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — булева функция,

$x_i \in \{0, 1\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , — булевы переменные,

$A_k$  — упорядоченное по возрастанию множество индексов переменных, входящих в  $k$ -й XOR-дизъюнкт  $R_k$ ,  $A_k \subseteq \overline{1, 2, 3, \dots, n}$ ,

$\alpha_{kj}$  —  $j$ -й элемент множества  $A_k$ ,

$\sigma_{kj} \in \{0, 1\}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , — степени, трактуемые таким образом: если  $\sigma_{kj} = 0$ , то переменная  $x_{\alpha_{kj}}$  входит в  $R_k$  без отрицания; если  $\sigma_{kj} = 1$ , то с отрицанием,

$x$  — булев вектор, координатами которого являются переменные  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,

$\Sigma_k$  — множество степеней переменных, входящий в  $k$ -й XOR-дизъюнкт  $R_k$ , упорядоченное так, что первый его элемент,  $\sigma_{k1}$ , является степенью первой переменной в  $R_k$ , второй,  $\sigma_{k2}$ , — второго и т. д.

**Определение 8.** (Задача XOR-SAT) Пусть имеется булева функция, представленная в XOR-КНФ 1. Требуется найти хотя бы один такой набор значений ее переменных, при котором она выполняется.

**Теорема 1.** *Задача XOR-SAT принадлежит к классу  $P$  и может быть решена за время  $O(n^3)$ , где  $n$  — число переменных, методом Гаусса [17].*

**Лемма 1.** *Пусть дан взвешенный ориентированный граф  $G = (V, E)$ , где  $V$  — множество его вершин, а  $E$  — множество дуг соответственно; всякий его подграф, имеющий для каждой вершины ровно одну исходящую и одну входящую дугу, является семейством вершинно-простых циклов, обходящим все вершины графа  $G$ . Если же такого семейства граф  $G$  не содержит, то нет и подграфа, обладающего указанным свойством.*

*Доказательство.* Так как для каждой вершины была выбрана лишь одна исходящая и одна входящая дуга, то между двумя любыми смежными вершинами в полученном подграфе существует единственный путь. Кроме того, это означает, что каждая вершина смежна лишь с одной по вхождению и лишь с одной по исходу. Таким образом, если путь между двумя вершинами рассматриваемого подграфа существует, то он единствен. Следовательно, подграф состоит из набора вершинно-простых цепей. Покажем теперь, что все цепи в этом наборе являются замкнутыми, то есть вершинно-простыми циклами. Предположим противное, то есть, что хотя бы одна из цепей незамкнута. Если это так, то подграф должен содержать две вершины, у одной из которых исходящая, а у другой входящая степень равна нулю. Но это невозможно по построению. Значит, подграф представляет собой семейство простых циклов. Оно обходит все вершины графа  $G$ , так как для каждой его вершины была выбрана пара инцидентных ей дуг. Далее, рассмотрим орграф  $G'$ , о котором известно, что он не содержит семейства вершинно-простых циклов, обходящих все его вершины. Допустим, что при этом удалось выделить в  $G'$  подграф, включающий все его вершины, причем такой, что каждая из них инцидентна лишь одной дуге по вхождению и лишь одной по исходу. Но, в силу доказанного выше, это означает, что в орграфе  $G'$  содержится семейство вершинно-простых циклов, обходящих все его вершины. Из этого противоречия следует, что если в орграфе нет такого семейства, то его подграфа с указанным свойством также не существует, это совпадает с утверждением теоремы.  $\square$

**Теорема 2.** *Задача НСЦ принадлежит к классу  $P$ .*

*Доказательство.* Сведем задачу НСЦ к задаче XOR-SAT. Пусть орграф  $G$  задан в виде матрицы смежности или матрицы весов. Заметим, что

так как по условию задачи, каждая его вершина должна содержаться ровно в одном цикле искомого семейства, все циклы которого должны быть вершинно-простыми, то в подграфе, являющемся решением задачи, из каждой вершины будет исходить ровно одна дуга, также как и входит в нее будет только одна. Таким образом, в тех случаях, когда входящая или исходящая степень вершины более единицы, необходимо выбрать лишь одну из входящих (или, соответственно, исходящих) дуг, причем для каждой вершины такой набор из одной входящей и одной исходящей дуги должен быть найден, если только исходное семейство существует (если граф его не содержит, то для какой-либо вершины такой набор получить невозможно, иначе она оказалась бы включенной в цикл).

Пусть  $m = |E|$ . Произвольным образом упорядочим и пронумеруем элементы множества  $E$ . Введем булевы переменные  $x_1, \dots, x_m$ , такие, что

$$x_i = \begin{cases} 1, & e_i \in E_C; \\ 0, & e_i \notin E_C. \end{cases}$$

Где  $E_C$  — множество дуг искомого семейства.

Составим булеву функцию в XOR-КНФ, объединив в XOR-дизъюнкты сначала переменные, соответствующие дугам, исходящим из одной вершины, а затем исходящие. Полученная функция, в силу леммы 1, имеет непустой носитель тогда и только тогда, когда существует решение задачи НСЦ.  $\square$

### Пример 2.

Рассмотрим орграф, заданный матрицей смежности  $A_1$ . Поставим в соответствие дугам орграфа булевы переменные в порядке обхода матрицы слева направо и сверху вниз:

$$\begin{aligned} e_{12} &\leftrightarrow x_1, e_{13} \leftrightarrow x_2, e_{23} \leftrightarrow x_3, \\ e_{31} &\leftrightarrow x_4, e_{34} \leftrightarrow x_5, e_{42} \leftrightarrow x_6, \\ e_{45} &\leftrightarrow x_7, e_{51} \leftrightarrow x_8, e_{54} \leftrightarrow x_9; \end{aligned}$$

и составим булеву функцию по правилу, описанному в доказательстве теоремы 2:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_9) &= (x_1 \oplus x_2) \wedge x_3 \wedge (x_4 \oplus x_5) \wedge (x_6 \oplus x_7) \wedge (x_8 \oplus x_9) \wedge \\ &\wedge (x_4 \oplus x_8) \wedge (x_1 \oplus x_6) \wedge (x_2 \oplus x_3) \wedge (x_5 \oplus x_9) \wedge x_7. \end{aligned}$$

В силу свойств конъюнкции, функция  $f$  истинна лишь тогда, когда истинен каждый из XOR-дизъюнктов, это значит, что поиск набора значений ее переменных, при котором это условие выполнено, тождествен

решению системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 \oplus x_2 = 1; x_3 = 1; x_4 \oplus x_5 = 1; \\ x_6 \oplus x_7 = 1; x_8 \oplus x_9 = 1; x_4 \oplus x_8 = 1; \\ x_1 \oplus x_6 = 1; x_2 \oplus x_3 = 1; x_5 \oplus x_9 = 1; x_7 = 1. \end{cases}$$

Так как любое множество с заданными на нем операциями исключающего «или» ( $\oplus$ ) и умножения на 0 или 1 образует кольцо относительно этих операций, то к уравнениям над ней применим метод Гаусса (с учетом тождеств  $0 \oplus 0 = 0$ ,  $1 \oplus 0 = 1$  и  $1 \oplus 1 = 0$ ).

Запишем объединенную матрицу этой системы уравнений до и после применения метода.

Изначально:

$$\left( \begin{array}{cccccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) .$$

По окончании гауссовского процесса:

$$\left( \begin{array}{cccccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) .$$

Система вырождена, количество свободных переменных — одна. Выберем в качестве свободной переменную  $x_9$  и, придав ей значение 1, найдем решение задачи ОНСЦ:  $x_1 = x_3 = x_4 = x_7 = x_9 = 1$ ,  $x_2 = x_5 = x_6 = x_8 = 0$ . Возвращаясь от булевых переменных к дугам орграфа, видим, что в решение задачи НСЦ входят дуги  $(1, 2)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(4, 5)$ ,  $(5, 4)$ . Вместе с инцидентными им вершинами они образуют семейство циклов

$\{1-2-3-1, 4-5-4\}$ , которое действительно является решением задачи НСЦ.

Теперь применим метод к орграфу, заданному матрицей смежности  $A_2$ , который, как показано выше, не содержит подграфов — решений НСЦ.

Соответствие —

$$\begin{aligned} e_{12} \leftrightarrow x_1, e_{15} \leftrightarrow x_2, e_{25} \leftrightarrow x_3, \\ e_{31} \leftrightarrow x_4, e_{32} \leftrightarrow x_5, e_{41} \leftrightarrow x_6, e_{54} \leftrightarrow x_7. \end{aligned}$$

Система —

$$\begin{cases} x_1 \oplus x_2 = 1; x_3 = 1; x_4 \oplus x_5 = 1; \\ x_6 = 1; x_7 = 1; x_4 \oplus x_6 = 1; \\ x_1 \oplus x_5 = 1; x_2 \oplus x_3 = 1. \end{cases}$$

Запишем объединенную матрицу этой системы уравнений до и после применения метода Гаусса.

Изначально:

$$\left( \begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

По окончании гауссовского процесса:

$$\left( \begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Из шестого уравнения  $x_6 = 0$ , но в то же время из седьмого  $x_6 = 1$ , что означает несовместность системы. Таким образом, ее решение не существует, как не существует и решения задачи НСЦ.

### 3. Оптимизационная задача о семействе циклов в орграфе с полустепенями вершин, не превосходящими 2

**Определение 9.** (Задача ОНСЦ) Пусть дан взвешенный ориентированный граф  $G = (V, E)$ , где  $V$  — множество его вершин, а  $E$  — множество дуг соответственно, обладающий следующим свойством:  $\forall v (v \in V) (deg^{out} v \leq 2)(deg^{in} v \leq 2)$ , и вещественное число  $q$ . Требуется найти такой набор вершинно-простых циклов, чтобы каждая вершина из  $V$  содержалась ровно в одном из них, а суммарный вес всех дуг, содержащихся в нем, превосходил  $q$ .

**Теорема 3.** *Задача ОНСЦ принадлежит к классу  $P$  и может быть решена за время  $O(n^3)$ .*

*Доказательство.* Поскольку орграф принадлежит к тому же классу, на котором поставлена задача НСЦ, можно построить систему алгебраических уравнений с исключаяющим «или» по правилу, описанному в доказательстве теоремы 2. Применим к этой системе прямой ход метода Гаусса. В общем случае система может содержать линейно зависимые уравнения. Матрица системы содержит  $2n$  строк (максимальное возможное число переменных), обозначим  $k$  число свободных переменных (оно равно числу нулевых строк матрицы после приведения ее к ступенчатому виду). Каждому конкретному набору их значений будет соответствовать одно из решений системы. Очевидно,  $k \leq 2n$ , где  $n = |V|$ . Выберем первую свободную переменную и зададим ей значение (0 или 1), обратным ходом метода Гаусса получим значения некоторого количества базисных переменных. Вычислим две суммы: сумму весов дуг, соответствующих свободной переменной, и тех базисных, которые приняли значение 1, а затем тех базисных, которые приняли значение 0. Прделаем то же для каждой свободной переменной. В силу равенств:  $0 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 0 = 1, 1 \oplus 1 = 1$  — и того, что каждое уравнение содержит не более двух переменных, следует, что все единичные значения, полученные при свободной переменной, равной 1, станут нулевыми, и наоборот, если приравнять ее нулю. Из каждой пары сумм выберем максимальную и, присвоив базисным и свободным переменным соответствующие значения, получим решение системы с наибольшим суммарным весом дуг.

Для каждой свободной переменной существует множество базисных, которые определяются при обратном ходе метода Гаусса в зависимости от ее значения. Для любых двух свободных переменных множества базисных, определяемых их значениями, не пересекаются. В противном случае, в силу того, что при обращении свободной переменной (смене

значения на противоположное) обращаются и все зависящие от нее базисные, можно было бы получить одновременно два разных значения одной и той же базисной переменной. Таким образом, суммы весов дуг, соответствующих переменным, зависящим от разных свободных, вычисляются независимо, а значит, выбирая для каждой свободной переменной значение, дающее максимальную сумму, можно получить максимальное по весу дуг семейство циклов. Если его вес превосходит  $q$ , то это семейство и будет решением задачи, в противном случае, решения не существует.

Покажем, что описанный алгоритм решения ОНСЦ требует числа операций, выражаемого полиномом конечной степени от  $n$ . Прямой ход метода Гаусса требует  $O(n^2)$  операций (каждая строка объединенной матрицы системы содержит не более трех ненулевых элементов). Применение обратного хода при одной заданной свободной переменной и вычисление сумм потребует  $O(m^2) + O(r)$  действий, где  $m$  – количество уравнений, в которые входит свободная переменная, а  $r$  – количество переменных, значения которых определились по выполнению обратного хода; поскольку  $m \leq 2n, r \leq 2n$  и сложность оценивается сверху, можно выразить эти число как  $O(n^2) + O(n) = O(n^2)$ . Учитывая, что аналогичный набор операций производится для каждой свободной переменной и что  $k \leq 2n$ , имеем: вся процедура вычисления сумм требует  $O(kn^2) = O(n^3)$  действий. Сравнение суммы дуг с числом  $q$  потребует  $O(1)$  операций. Итого  $O(n^2) + O(n^3) + O(1) = O(n^3)$  действий. Таким образом, задача является полиномиально разрешимой (принадлежит к классу  $P$ ).  $\square$

**Пример 3.** Рассмотрим орграф, заданный матрицей весов

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 10 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Чтобы сравнить результат полиномиального решения с истинным решением, найдем последнее поиском в глубину. Он дает следующие семейства простых циклов:  $\{1 - 4 - 3 - 2 - 1\}$  с весом 10,  $\{1 - 4 - 1, 2 - 3 - 2\}$  с весом  $-1$ ,  $\{1 - 2 - 1, 3 - 4 - 3\}$  с весом 16 и  $\{1 - 2 - 3 - 4 - 1\}$  с весом 5.

Теперь применим метод решения, описанный в доказательстве теоремы 3.

Составим систему уравнений, дающую решение задачи НСЦ.

Соответствие —

$$\begin{aligned} e_{12} &\leftrightarrow x_1, e_{14} \leftrightarrow x_2, \\ e_{21} &\leftrightarrow x_3, e_{23} \leftrightarrow x_4, \\ e_{32} &\leftrightarrow x_5, e_{34} \leftrightarrow x_6, \\ e_{41} &\leftrightarrow x_7, e_{43} \leftrightarrow x_8. \end{aligned}$$

Система —

$$\begin{cases} x_1 \oplus x_2 = 1; x_3 \oplus x_4 = 1; \\ x_5 \oplus x_6 = 1; x_7 \oplus x_8 = 1; \\ x_3 \oplus x_7 = 1; x_1 \oplus x_5 = 1; \\ x_4 \oplus x_8 = 1; x_2 \oplus x_6 = 1. \end{cases}$$

Запишем объединенную матрицу этой системы уравнений и применим к ней прямой ход метода Гаусса.

Изначально:

$$\left( \begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right);$$

По окончании гауссовского процесса:

$$\left( \begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Система вырождена, количество свободных переменных — две. Выберем в качестве свободных переменные  $x_5$  и  $x_7$  и найдем решение задачи ОНСЦ.

Пусть  $x_5 = 1$ , обратным ходом метода Гаусса получим:  $x_6 = 0, x_2 = 1, x_1 = 0$ . Просуммируем веса дуг, соответствующих переменным, принявшим значение 1:  $S_{x_5=1}^1 = w(e_{14}) + w(e_{32}) = -8$ .

Пусть  $x_5 = 0$ , обратным ходом метода Гаусса получим:  $x_6 = 1, x_2 = 0, x_1 = 1$ . Просуммируем веса дуг, соответствующих переменным, принявшим значение 1:  $S_{x_5=0}^1 = w(e_{12}) + w(e_{34}) = -2$ .

Максимальное в паре —  $-2$  при  $x_1 = 1, x_6 = 1$ .

Пусть  $x_7 = 1$ , обратным ходом метода Гаусса получим:  $x_8 = 0, x_4 = 1, x_3 = 0$ . Просуммируем веса дуг, соответствующих переменным, принявшим значение 1:  $S_{x_7=1}^1 = w(e_{23}) + w(e_{41}) = 7$ .

Пусть  $x_7 = 0$ , обратным ходом метода Гаусса получим:  $x_8 = 1, x_4 = 0, x_3 = 1$ . Просуммируем веса дуг, соответствующих переменным, принявшим значение 1:  $S_{x_7=0}^1 = w(e_{21}) + w(e_{43}) = 18$ .

Максимальное в паре — 18 при  $x_3 = 1, x_8 = 1$ .

Решение состоит из дуг, соответствующих переменным  $x_1, x_3, x_6, x_8$ . Это набор циклов  $\{1 - 2 - 1, 3 - 4 - 3\}$  с весом  $18 - 2 = 16$ .

#### 4. Случай решения задачи ОНСЦ за квадратичное время

Рассмотрим задачу ОНСЦ на более узком классе орграфов, которые будем задавать не матрицей весов, а списком смежности, и покажем, что в таком случае существует более эффективный алгоритм решения.

**Определение 10.** (Задача ОНСЦ-СПЕЦ) Пусть дан взвешенный ориентированный граф  $G = (V, E)$ , где  $V$  — множество его вершин, а  $E$  — множество дуг соответственно, обладающий следующим свойством:  $\forall v(v \in V)(deg^{out}v = 2)(deg^{in}v = 2)$ , и вещественное число  $q$ . Количество вершин является четным, а орграф задан списком смежности следующего вида: для каждой вершины существует лишь одна, за исключением ее самой, имеющая в точности такой же список смежности, и ни одна другая вершина, кроме этих двух, не смежна по исходящей дуге с теми же вершинами, с которыми смежны они. Требуется найти такой набор вершинно-простых циклов, чтобы каждая вершина из  $V$  содержалась ровно в одном из них, а суммарный вес всех дуг, содержащихся в нем, превосходил  $q$ .

**Теорема 4.** *Задача ОНСЦ-СПЕЦ может быть решена за время  $O(n^2)$ .*

*Доказательство.* Примем за элементарные операции (операции, выполняемые за время  $O(1)$ ) просмотр элемента в списке смежности и сложение двух чисел. Пусть  $|V| = n$ , построим по списку смежности матрицу весов заданного орграфа. Поскольку, вследствие указанного в постановке задачи свойства этого списка, множество вершин орграфа может быть разбито на пары, в каждой из которых вершины смежны по исходящей дуге лишь с двумя другими, с которым не смежны никакие иные, то матрица будет иметь  $\frac{n}{2}$  пар одинаковых строк, причем в строках из разных пар не будет ни одного ненулевого элемента на одной и той же позиции. Таким образом, если в заданной строке обнулить какой-либо ненулевой элемент, то кроме строки с единственным ненулевым элементом будет получен также столбец, содержащий только один ненулевой элемент, причем это будет тот же столбец, в котором находится ненулевой элемент другой строки из той же пары, что и заданная. Исходя из леммы 1

можно заключить, что семейство простых циклов, являющееся решением, должно задаваться матрицей смежности (матрицей весов), в каждой строке и каждом столбце которой есть лишь один ненулевой элемент. Как показано выше, обнуление элемента в заданной строке предопределяет обнуление элемента лишь в другой строке из той же пары, поскольку в ней появляется элемент, оставшийся единственным в своем столбце (то есть обнулен должен быть другой элемент, что сделает оставшийся единственным в своей строке, а первый обнуленный также единственным в своем столбце). То есть при поиске семейства, являющегося решением, мы можем независимо удалять дуги, исходящие из вершин разных пар; это означает, что выбрав в каждой паре строк два элемента из разных столбцов с наибольшей суммой, мы получим семейство циклов с наибольшим возможным весом. Если этот вес превосходит  $q$ , то полученное семейство есть решение задачи. Выбор элементов можно осуществлять и по упорядоченному списку смежности, где роль номера столбца будет играть позиция номера вершины в строке списка. Группировка строк по парам простой сортировкой потребует  $O(n^2)$  операций, поиск максимальной суммы в каждой паре —  $2\frac{n}{2}(O(1) + 2O(1) + O(1)) = O(n)$  операций. Итого  $O(n^2) + O(n) = O(n^2)$ .  $\square$

**Теорема 5.** *Орграф и задачи ОНСЦ-СПЕЦ всегда содержит семейство простых циклов, обходящее все его вершины.*

*Доказательство.* Поскольку любая пара строк в списке или матрице смежности орграфа описанного вида допускает процедуру обнуления, описанную в доказательстве теоремы 4 (для каждой пары она проводится независимо и для нее не потребовалось введения никаких дополнительных ограничений вида строк), то проведя ее для каждой пары строк можно получить матрицу смежности, у которой в каждой строке и каждой столбце есть лишь один ненулевой элемент, или список смежности, который можно в такую матрицу преобразовать. Из леммы 1 следует, что таким образом будет задано семейство циклов данного орграфа, обходящее все его вершины.  $\square$

**Пример 4.** Рассмотрим орграф, заданный списком смежности (вес соответствующей дуги указан в фигурных скобках, список представлен в отсортированном виде):

$$\begin{aligned}
 2 &: 1\{8\}, 4\{-1\}; \\
 5 &: 1\{2\}, 4\{10\}; \\
 4 &: 2\{1\}, 3\{-1\}; \\
 6 &: 2\{1\}, 3\{-2\}; \\
 1 &: 5\{2\}, 6\{2\}; \\
 3 &: 5\{6\}, 6\{-3\}.
 \end{aligned}$$

Имеем разбиение строк на пары: 2-ая и 5-ая, 4-ая и 6-ая, 1-ая и 3-ая. Для каждой найдем сочетание дуг с максимальной суммой весов:

$$1) S_1^1 = w(2, 1) + w(5, 4) = 18, S_1^2 = w(2, 4) + w(5, 1) = 1.$$

$$\max S_1^j = S_1^1 = 18.$$

$$2) S_2^1 = w(4, 2) + w(6, 3) = -1, S_2^2 = w(4, 3) + w(6, 2) = 0.$$

$$\max S_2^j = S_2^2 = 0.$$

$$3) S_3^1 = w(1, 5) + w(3, 6) = -1, S_3^2 = w(1, 6) + w(3, 5) = 8.$$

$$\max S_3^j = S_3^2 = 8.$$

Таким образом, максимальное семейство циклов задается набором дуг  $\{(2, 1), (5, 4), (4, 3), (6, 2), (1, 6), (3, 5)\}$ . Оно состоит из двух циклов:  $1 - 6 - 2 - 1$  и  $3 - 5 - 4 - 3$ ; их общий вес равен 26.

Проверим решение, найдя максимальное семейство циклов поиском в глубину. Имеем следующие циклы:  $1 - 5 - 1$  с весом 4;  $1 - 5 - 4 - 2 - 1$  с весом 21;  $1 - 5 - 4 - 3 - 6 - 2 - 1$  с весом 17;  $1 - 6 - 2 - 1$  с весом 11;  $1 - 6 - 2 - 4 - 3 - 5 - 1$  с весом 9;  $1 - 6 - 3 - 5 - 4 - 2 - 1$  с весом 25;  $1 - 6 - 3 - 5 - 1$  с весом 8;  $2 - 4 - 2$  с весом 0;  $2 - 4 - 3 - 6 - 2$  с весом -4;  $3 - 5 - 4 - 3$  с весом 15;  $3 - 6 - 3$  с весом -5.

Они образуют семейства (указан общий вес):  $\{1-5-1, 2-4-2, 3-6-3\}$  с весом -1,  $\{1-5-1, 2-4-3-6-2\}$  с весом 0,  $\{1-5-4-2-1, 3-6-3\}$  с весом 16,  $\{1-5-4-3-6-2-1\}$  с весом 17,  $\{1-6-2-1, 3-5-4-3\}$  с весом 26,  $\{1-6-2-4-3-5-1\}$  с весом 9,  $\{1-6-3-5-4-2-1\}$  с весом 25,  $\{1-6-3-5-1, 2-4-2\}$  с весом 8.

Максимальным является семейство  $\{1-6-2-1, 3-5-4-3\}$  с весом 26, что совпадает с решением, полученным на основании теоремы 4.

## 5. Основные результаты

Рассмотрены поисковый (разрешимостный) и оптимизационный варианты задачи о поиске такого семейства непересекающихся простых циклов в орграфе с полустепенями вершин не более 2, которое покрывает все вершины этого орграфа. Показана принадлежность задачи в обоих вариантах к классу полиномиально разрешимых задач P, предложенный алгоритм для матрицы весов, находит решение как поисковой, так и оптимизационной задачи о максимизации веса семейства циклов за время  $O(n^3)$ ; доказано, что в более частной постановке на орграфах, заданных списком смежности с весами и имеющими полустепени всех вершин, строго равные 2, существует асимптотически более эффективный алгоритм решения задачи в обоих вариантах, требующий  $O(n^2)$  операций, где  $n$  — количество вершин орграфа. Поскольку решение оптимизационной задачи осуществляется фактически путем сокращенного перебора

по экспоненциальному пространству поиска, то можно сделать предположение о существовании полиномиального алгоритма для задачи о поиске гамильтонова цикла и задачи коммивояжера на рассматриваемом классе орграфов или на его подклассе со строгим ограничением полустепеней вершин, так как среди решений задач НСЦ и ОНСЦ могут быть гамильтоновы циклы.

## Finding a family of simple circuits in a digraph with semidegree bound 2

Medvedev A.A.

The present paper investigates the algorithmic complexity of finding a family of simple circuits passing every vertice of a digraph with semidegree bound 2. The problem is considered in two variants: as a search and as an optimization problem. It proves to be polinomially solvable in both variants, subsequently an algorithm using time  $O(n^3)$  and, for a particular formulation of the problem, an algorithm using time  $O(n^2)$  are suggested where  $n$  is the number of the digraph's vertices.

*Keywords:* digraphs, simple circuits, search problems, optimization, P class, polynomail solvability.

## References

- [1] Karp, R. M., "Reducibility Among Combinatorial Problems", *Complexity of Computer Computer Computations. The IBM Research Symposia Series*, 1972, 85–103.
- [2] Akiyama, T.; Nishizeki, T.; Saito N., "NP-completeness of the Hamiltonian cycle problem for bipartite graphs", *Journal of Information Processing*, **3:2** (1980–1981), 73–76.
- [3] Itai, A.; Papadimitriou, Ch.; Szwarcfiter, J., "Hamilton Paths in Grid Graphs", *SIAM Journal on Computing*, **4:11** (1982), 676–686.
- [4] Buro, M., "Simple Amazons endgames and their connection to Hamilton circuits in cubic subgrid graphs", *Conference on Computers and Games, Lecture Notes in Computer Science.*, **2063:CG '00** (2000), 250–261.
- [5] Plesník, J., "The NP-completeness of the Hamiltonian cycle problem in planar digraphs with degree bound two", *Information Processing Letters*, **8:4** (1979), 199–201.
- [6] Chiba, N.; Nishizeki, T., "The Hamiltonian cycle problem is linear-time solvable for 4-connected planar graphs", *Journal of Algorithms*, **10:2** (1989), 187–211.

- [7] Goray, Ivan. I., “On polynomial solvability of the Hamiltonian cycle problem for graphs of degree less than or equal to 3”, *arXiv: Optimization and Control*, 2010, <https://arxiv.org/abs/1007.0235>.
- [8] Çela, E.; Deineko, V. G.; Woeginger G. J., “Travelling salesman paths on Demidenko matrices”, *Discrete Applied Mathematics*, 2021, <https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.11.019>.
- [9] Orponen, P.; Mannila, H., “On approximation preserving reductions: Complete problems and robust measures”, *Department of Computer Science, University of Helsinki. Technical Report. C-1987-28*, 1987.
- [10] Ore, O., “Note on Hamiltonian circuits”, *American Mathematical Monthly*, **67** (1960), 55.
- [11] Dirac, G. A., “Some theorems on abstract graphs”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **2:3** (1952), 69–81.
- [12] Ghouila-Houri, A., “Une condition suffisante d’existence d’un circuit Hamiltonien”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences Paris*, **251** (1960), 495–497.
- [13] Woodall, D., “Sufficient conditions for cycles in digraphs”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **24** (1972), 739–755.
- [14] Christofides, D.; Keevash, P.; Kühn, D.; Osthus, D., “A semi-exact degree condition for Hamilton cycles in digraphs”, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **24:3** (2010), 709–756.
- [15] Keevash, P.; Kühn, D.; Osthus, D., “An exact minimum degree condition for Hamilton cycles in oriented graphs”, *Journal of the London Mathematical Society*, **79:1** (2009), 144–166.
- [16] Kelly, L.; Kühn, D.; Osthus, D., “A Dirac-type result on Hamilton cycles in oriented graphs”, *Combinatorics, Probability and Computing*, **17:5** (2008), 689–709.
- [17] Moore, C.; Mertens, S., *The Nature of Computation.*, Oxford University Press, Oxford, 2011, 366 pp.

## **К сведению авторов публикаций в журнале «Интеллектуальные системы. Теория и приложения»**

В соответствии с требованиями ВАК РФ к изданиям, входящим в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук, статьи в журнал «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» предоставляются авторами в следующей форме:

1. Статьи, набранные в пакете L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, предоставляются к загрузке через WEB-форму [http://intsysjournal.org/generator\\_form](http://intsysjournal.org/generator_form).
2. К статье прилагаются файлы, содержащие название статьи на русском и английском языках, аннотацию на русском и английском языках (не более 50 слов), список ключевых слов на русском и английском языках (не более 20 слов), информация об авторах: Ф.И.О. полностью, место работы, должность, ученая степень и/или звание (если имеется), контактные телефоны (с кодом города и страны), e-mail, почтовый адрес с индексом города (домашний или служебный).
3. Список литературы оформляется в едином формате, установленном системой Российского индекса научного цитирования.
4. За публикацию статей в журнале «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» с авторов (в том числе аспирантов высших учебных заведений) статей, рекомендованных к публикации, плата не взимается. Оттиски статей авторам не предоставляются. Журнал распространяется по подписке, экземпляры журнала рассылаются подписчикам наложенным платежом. Условия подписки публикуются в каталоге НТИ «Роспечать», индекс журнала 64559.
5. Доступ к электронной версии последнего вышедшего номера осуществляется через НЭБ «Российский индекс научного цитирования». Номера, вышедшие ранее, размещаются на сайте <http://intsysjournal.org>, и доступ к ним бесплатный. Там же будут размещены аннотации всех публикуемых статей.

---

Подписано в печать: 10.08.2022

Дата выхода: 29.08.2022

Тираж: 200 экз.

Цена свободная

Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77-58444 от 25 июня 2014 г.,  
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных  
технологий и массовых коммуникаций(Роскомнадзор).