О выразимости кусочно-постоянных функций в пространстве кусочно-параллельных

А. Д. Отрощенко[1]

Для конечной системы кусочно-параллельных функций, реализуемых схемами из линейных элементов и функций Хэвисайда, дополненной всеми одноместными линейными функциями получен критерий выразимости кусочно-постоянных функций. Таким образом получен критерий выразимости бинарного классификатора, реализованного нейронной схемой МакКаллока-Питтса.

Ключевые слова: Кусочно-постоянная функция, кусочно-параллельная функция, проблема полноты, проблема выразимости, нейронные-схемы МакКаллока-Питтса.

1. Определение кусочно-параллельной функции

В соответствии с [2], мы рассматриваем класс PP кусочно-параллельных функций, которые строятся из линейных функций
$a_1x_1 + ... + a_nx_n + a_0 : R^n \to R, a_i \in R, i = 0, 1, ..., n, n \in \mathbb{N}$ и функции Хэвисайда
$\theta(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ с использованием операций суперпозиции. Как показано в [2], функция f из PP может быть представлена в следующем виде: $f = f_L + f_{PC}$, где f_L -линейная функция, а f_{PC} - кусочно-постоянная функция. Будем обозначать $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$,
$(a, \vec{b}) = (a, b_1, b_2, \ldots, b_n)$,
$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$,
$\vec{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 0)$, $\vec{e}_0 = (1, 1, 1, \ldots, 1, 1)$
∂A граница множества A
В соответствии с [1], кусочно-параллельная функция имеет вид

$$f(\vec{x}) = \langle \vec{a}_0, \vec{x} \rangle + \sum_{i=1}^{s} d_i \theta(\sum_{j=1}^{k} \chi(sgn(\langle \vec{a}_j, \vec{x} \rangle + c_j) = \sigma_{ij}) - k). \qquad (1)$$

---

[1] *Отрощенко Александр Дмитриевич* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: iskander.aka@mail.ru.

Otroschenko Alexander Dmitrievich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

где $\sigma_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$, $\chi(A) = \begin{cases} 1, \text{условие } A \text{ выполнено} \\ 0, \text{условие } A \text{ не выполнено} \end{cases}$.
В дальнейшем, вместо $\sum_{i=1}^{s} d_i \theta(\sum_{j=1}^{k} \chi(sgn(\langle \vec{a}_j, \vec{x} \rangle + c_j) = \sigma_{ij}) - k)$ мы будем писать $NL_f(\vec{x})$. Пусть $l = max|d_i|$. Иногда, мы будем писать $NL_f^l(\vec{x})$. Нижний индекс мы также иногда будем опускать, обозначая таким образом произвольную кусочно-постоянную функцию, максимум модуля которой не больше l. Также будем теперь обозначать $f_\epsilon(\vec{x}) = \epsilon f(\frac{\vec{x}}{\epsilon})$.
Будем называть множество значений аргумента соответствующую определенному d_i в дальнейшем носителем сигнатуры i, а сам d_i - сдвигом. Носитель сигнатуры, неограниченный хотя бы с одной стороны по каждой из координат, будем называть нограниченным. Плоскости разделяющие носители сигнатуры будем называть разрезами. Мы будем рассматривать дальше кусочно-параллельные функции с конечным числом сдвигов.
Обозначим множество функций с линейной частью, зависящей от не более чем одной переменной NLL_1. В соответствии с [3], это замкнутый предполный класс функций. С-финитно-линейные функции в соответствии с В. С. Половниковым [1], будем обозначать как FL. Напомним: Кусочно-параллельнаая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, такая, что $\forall a_i, b_i \exists C, A, B$, такие, что при $|t| > C : f(a_1 t + b_1, a_2 t + b_2, \ldots, a_n t + b_n) = At + B$ называется С-финитно-линейной. Класс С-финитно-линейных функций замкнут и предполон. Само утверждение, которое будет доказано, звучит следующим образом:

Теорема 1. *Пусть $U = L_1 \cup U_{add}$, где L_1 - все линейные одноместные функции, а U_{add} - конечное множество кусочно-параллельных. Замыкание U содержит все кусочно-постоянные функции тогда, и только тогда, когда $U \not\subseteq NLL_1, FL$*

2. Доказательство достаточности

2.1. Принадлежность функции Хэвисайда и суммы Хэвисайдов замыканию системы

В следующем доказательстве, мы фактически повторим часть доказательства полноты из [2], правда, для этого нам нужно будет его немного подправить.

Теорема 2. *Пусть $U \not\subseteq NLL_1, FL$. Тогда $\theta(x) \in [U]$*

Доказательство. Пусть $f \in U/NLL_1$.
Значит, в $f(\vec{x}) = \langle \vec{a}_0, \vec{x} \rangle + \sum_{i=1}^{s} d_i \theta(\sum_{j=1}^{k} \chi(sgn(\langle \vec{a}_j, \vec{x} \rangle + c_j) = \sigma_{ij}) - k)$ линейная часть зависит от не менее чем двух переменных, поэтому у $\vec{a}_0$

есть две ненулевые компоненты. Пусть эти компоненты по первой и второй переменной. Для простоты, подставим во все остальные переменные ноль, в $x_1 = x/a_{01}$, $x_2 = y/a_{02}$ и получим $f_{01}(x, y)$. Итак

$$f_{01}(x,y) = x + y + \sum_{i=1}^{s} d_i \theta(\sum_{j=1}^{k} \chi(sgn(\frac{a_{j1}}{a_{01}}x + \frac{a_{j2}}{a_{02}}y + c_j) = \sigma_{ij}) - k) =$$

$$= x + y + \sum_{i=1}^{s} d_i \theta(\sum_{j=1}^{k} \chi(sgn(A_j x + B_j y + c_j) = \sigma_{ij}) - k) = x + y + NL_f^F.$$

Пусть $g \in U/FL$. Пусть $g = \langle \vec{g}_l, \vec{y} \rangle + NL_g^G(\vec{y})$

Рассмотрим

$$h(\vec{y}) = f_{01\epsilon}(g(\vec{y}), g_\delta(-\vec{y})) =$$

$$= \langle \vec{g}_l, \vec{y} \rangle + NL_g^G(\vec{y}) + \langle \vec{g}_l, -\vec{y} \rangle + \delta NL_g^G(-\frac{\vec{y}}{\delta}) + \epsilon NL_f^F(\frac{g(\vec{y})}{\epsilon}, \frac{g_\delta(-\vec{y})}{\epsilon}) =$$

$$= NL_g^G(\vec{y}) + NL^{\delta G + \epsilon F}(\vec{y})$$

Так как $g \notin FL$, то $\exists \vec{a}, \vec{c}, R, C_+ \neq C_-$, что при $t > R, g(\vec{a}t + \vec{c}) = \langle \vec{g}_l, \vec{a} \rangle t + C_+$, а при $t < -R, g(\vec{a}t + \vec{c}) = \langle \vec{g}_l, \vec{a} \rangle t + C_-$, т.е. $NL_g^G(\vec{a}t) = C_+$ при $t > R$, и $NL_g^G(\vec{a}t) = C_-$ при $t < -R$. Тогда, подберем $\delta > 0, \epsilon > 0$ так, чтобы

$$|C_+ - C_-| > 2(\delta G + \epsilon F),$$

подойдут $\delta_0 = \frac{|C_+ - C_-|}{5G}, \epsilon_0 = \frac{|C_+ - C_-|}{5F}$, таким образом,

$$2(\delta_0 G + \epsilon_0 F) = 2(\frac{|C_+ - C_-|}{5G}G + \frac{|C_+ - C_-|}{5F}F) = \frac{4}{5}|C_+ - C_-| < |C_+ - C_-|.$$

Теперь заметим, что $h(\vec{a}t + \vec{c}) = NL_g^G(\vec{a}t + \vec{c}) + NL^{\delta_0 G + \epsilon_0 F}(\vec{a}t + \vec{c})$. Пусть при $t > R_2, h(\vec{a}t + \vec{c}) = C'_+$, а при $t < -R_2, h(\vec{a}t + \vec{c}) = C'_-$, Тогда считая $t_1 > max(R, R_2)$, а $t_2 < -max(R, R_2)$ распишем

$$|C'_+ - C'_-| = |h(\vec{a}t_1 + \vec{c}) - h(\vec{a}t_2 + \vec{c})| =$$

$$= |NL_g^G(\vec{a}t_1 + \vec{c}) + NL^{\delta_0 G + \epsilon_0 F}(\vec{a}t_1 + \vec{c}) - NL_g^G(\vec{a}t_2 + \vec{c}) - NL^{\delta_0 G + \epsilon_0 F}(\vec{a}t_2 + \vec{c})| =$$

$$= |C_+ - C_- + NL^{\delta_0 G + \epsilon_0 F}(\vec{a}t_1 + \vec{c}) - NL^{\delta_0 G + \epsilon_0 F}(\vec{a}t_2 + \vec{c})| \geq$$

$$\geq |C_+ - C_-| - |NL^{\delta_0 G+\epsilon_0 F}(\vec{a}t_1+\vec{c}) - NL^{\delta_0 G+\epsilon_0 F}(\vec{a}t_2+\vec{c})| \geq$$

$$\geq |C_+ - C_-| - |NL^{\delta_0 G+\epsilon_0 F}(\vec{a}t_1+\vec{c})| - |NL^{\delta_0 G+\epsilon_0 F}(\vec{a}t_2+\vec{c})| \geq$$

$$\geq |C_+ - C_-| - 2(\delta_0 G + \epsilon_0 F) = \frac{1}{5}|C_+ - C_-| > 0$$

Обозначим $p(t) = h(\vec{a}t + \vec{c})$. Таким образом, получили, что $p \in [U], p \in PC, p \notin FL$.

Пусть $p(t) = p_-$, при $t < -R$, $p(t) = p_+$, при $t > R$. $p_+ \neq p_-$ по доказанному выше. t_{min} - какая-либо точка в которой функция принимает минимальное значение p_{min}. t_{max} - какая-либо точка в которой функция принимает максимальное значение p_{max}. $p_{max} \neq p_{min}$ так, как

$$p_{max} \geq max(p_+, p_-) > min(p_+, p_-) \geq p_{min}.$$

Отсюда же следует, что $t_{max} \neq t_{min}$. Теперь рассмотрим следующую функцию.

$$p^{'}(t) = p(\frac{p(t) - p_-}{p_+ - p_-}(t_{max} - t_{min}) + t_{min})$$

Заметим, что при $t < -R$, то

$$p^{'}(t) = p(\frac{p(t) - p_-}{p_+ - p_-}(t_{max} - t_{min}) + t_{min}) =$$

$$= p(\frac{p_- - p_-}{p_+ - p_-}(t_{max} - t_{min}) + t_{min}) = p(t_{min}) = p_{min},$$

а при $t > R$,

$$p^{'}(t) = p(\frac{p(t) - p_-}{p_+ - p_-}(t_{max} - t_{min}) + t_{min}) =$$

$$= p(\frac{p_+ - p_-}{p_+ - p_-}(t_{max} - t_{min}) + t_{min}) = p(t_{max} - t_{min} + t_{min}) = p_{max}.$$

Теперь рассмотрим $p''(t) = \frac{p'(t) - p_{min}}{p_{max} - p_{min}}$. Ясно, что

$$p''(t) = \begin{cases} 1, t > t_+ \\ 0, t < t_- \\ [0,1], t_+ \geq t \geq t_- \end{cases},$$

также заметим, что у $p''(t)$ есть конечное число неустранимых точек разрыва. Рассмотрим самую правую(максимальную по x) из них - t_0. Заметим, что $p''(t_0 + \epsilon') = 1$, где $\epsilon' > 0$ выбрана достаточно малой, чтобы p'' была постоянной в интервалах $(t_0 - \epsilon', t_0)$ и $(t_0, t_0 + \epsilon')$. Это верно, т.к. мы рассматриваем самую правую неустранимую точку разрыва. Пусть

$p''(t_0) = p''_0$, а $p''(t_0 - \epsilon') = p''_-$. $p''_- < 1$, т.к. рассматриваемая точка разрыва - неустранима, а 1 - максимальное значение p''.
Рассмотрим $v(x,y) = f_{01\tau}(x,y) = x + y + NL^{\tau F}(x,y)$, пока не опредееляя τ. Теперь определим $a > 0, b, G > 0$ так, чтобы

$$q(t) = v(a(p''(t+t_0)+b), \frac{Gt}{\epsilon'}) = a(p''(t+t_0)+b) + \frac{Gt}{\epsilon'} + NL^{\tau F}(t)$$

при $t > 0$ было положительно, а при $t < 0$ отрицательно.
Положим пока $b > -1$. При $\epsilon > t > 0$

$$q(t) = a(p''(t+t_0)+b) + \frac{Gt}{\epsilon'} + NL^{\tau F}(t) = a(1+b) + \frac{Gt}{\epsilon'} + NL^{\tau F}(t) > a(1+b) - \tau F$$

Теперь наложим ограничение, что $a > \frac{\tau F}{1+b}$. Тогда при $\epsilon > t > 0$ $q(t) > a(1+b) - \tau F = q_+ > 0$.

При $t > \epsilon$

$$q(t) = a(p''(t+t_0)+b) + \frac{Gt}{\epsilon'} + NL^{\tau F}(t) > a(p''(t+t_0)+b) + G - \tau F$$

Теперь наложим ограничение, что $G > \tau F - a(\min_{t>0} p''(t+t_0)+b)$. Тогда при $t > \epsilon$ $q(t) > a(p''(t+t_0)+b) + G - \tau F = Q_+ > 0$.

Далее $p''_- < 1$, а значит интервал $(-1, -p''_-)$ непуст. Пусть $b \in (-1, -p''_-)$. При $-\epsilon' < t < 0$

$$q(t) = a(p''(t+t_0)+b) + \frac{Gt}{\epsilon'} + NL^{\tau F}(t) =$$
$$= a(p''_- + b) + \frac{Gt}{\epsilon'} + NL^{\tau F}(t) < a(p''_- + b) + \tau F$$

Теперь учтя, что $p''_- + b < 0$ наложим ограничение, что $a > \frac{\tau F}{p''_- + b}$.
Тогда при $\epsilon > t > 0$ имеем, что $q(t) < a(p''_- + b) - \tau F = q_- < 0$.

При $t \leq -\epsilon'$

$$q(t) = a(p''(t+t_0)+b) + \frac{Gt}{\epsilon'} + NL^{\tau F}(t) =$$
$$= a(p''(t+t_0)+b) + \frac{Gt}{\epsilon'} + NL^{\tau F}(t) \leq a(p''(t+t_0)+b) - G + \tau F$$

Теперь наложим ограничение, что $G > \tau F + \max_{t<0} a(p''(t+t_0)+b)$.
Тогда при $t \leq -\epsilon$ имеем, что $q(t) < \max_{t<0} a(p''(t+t_0)+b) - G + \tau F = Q_- < 0$.
Пусть $q(0) = q_0$.

Выберем, $b = \frac{-1-p''_-}{2}$, $\tau = \frac{\epsilon'}{2F}$,
затем $a > max(\frac{\tau F}{1+b}, \frac{\tau F}{(p''_-+b)}) + 1 = \| \frac{\epsilon'}{1-2p''_-} \| + 1$, затем
$G > max(\tau F - a(\min_{t>0} p''(t+t_0) + b), \tau F + \max_{t<0} a(p''(t+t_0)+b))$.
Пусть

$$M = max(|\frac{t_+ - t_-}{q_-}|, |\frac{t_+ - t_-}{q_+}|, |\frac{t_+ - t_-}{Q_-}|, |\frac{t_+ - t_-}{Q_+}|, |\frac{t_+ - t_-}{q_0}|).$$

Тогда

$$\theta(x) = \begin{cases} p''(t_- - 1/2 + M(q(t) + 1/M)), q_0 > 0 \\ 1 - p''(t_- - 1/2 + M(q(t) + 1/M)), q_0 \leq 0 \end{cases} .$$

□

Теорема 3. *Пусть* $U \not\subseteq NLL_1, FL$. *Тогда* $\forall n, d_i : 1 \leq i \leq n$ *функция* $\Theta_{d_1,d_2,\ldots,d_n}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} d_i\theta(x_i) \in [U]$

Доказательство. По теореме 2 мы имеем, что $\theta(x) \in [U]$. Зафиксируем n и d_i. Пусть $f \in U/NLL_1$, то есть имеет линейную часть, зависящую хотя бы от двух входов. Подставим константы во все входы, так чтобы функция зависела только от двух переменных от которых бы и зависела линейная часть, т.е. $f'(x,y) = x + y + NL(x,y)$. Теперь

$$f(\vec{x}) = f'(x_1, f'(x_2, f(x_3, \ldots, f'(x_{n-2}, f'(x_{n-1}, x_n))\ldots))) = \sum_{i=1}^{n} x_i + NL(\vec{x}).$$

Подставим $x_i = \epsilon d_i\theta(y_i) + C_i$ и рассмотрим $h(\vec{y}) = f((\epsilon d_i\theta(y_i) + C_i))$, пока не определяя ϵ и C_i. Тогда

$$h(\vec{y}) = \sum_{i=0}^{n} (\epsilon d_i\theta(y_i) + C_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} d_i\theta(\sum_{j=1}^{k} \chi(sgn(\langle \vec{a}_j, (\epsilon d_i\theta(y_i) + C_i)_{i=1}^{n} \rangle + c_j) = \sigma_{ij}) - k) =$$

$$= \epsilon \sum_{i=0}^{n} d_i\theta(y_i) + \sum_{i=0}^{n} C_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} d_i\theta(\sum_{j=1}^{k} \chi(sgn(\sum_{i=0}^{n} a_{ji}(\epsilon d_i\theta(y_i) + C_i) + c_j) = \sigma_{ij}) - k) =$$

$$= \epsilon \sum_{i=0}^{n} d_i\theta(y_i) + \sum_{i=0}^{n} C_i +$$

$$+\sum_{i=1}^{s} d_i\theta(\sum_{j=1}^{k}\chi(sgn(\epsilon\sum_{i=0}^{n} a_{ji}d_i\theta(y_i)+\sum_{i=0}^{n} a_{ji}C_i+c_j)=\sigma_{ij})-k)$$

Заметим, что мы можем выбрать C'_i так, чтобы $\forall j : \sum_{i=0}^{n} a_{ji}C'_i \neq 0$. Пусть тогда $M = 2\frac{\max\|c_j\|+1}{\min_j \|\sum_{i=0}^{n} a_{ji}C'_i\|}$. и выберем $_i = MC'_i$, а $\epsilon = \frac{1}{2\max_j \sum_{i=0}^{n}\|a_{ji}d_i\|}$. Тогда $\forall j$ имеем:

$$\|\sum_{i=0}^{n} a_{ji}C_i + c_j\| = \|2\frac{\max\|c_j\|+1}{\min_j \|\sum_{i=0}^{n} a_{ji}C'_i\|}\sum_{i=0}^{n} a_{ji}C'_i + c_j\| >$$

$$> \|2\frac{\max\|c_j\|+1}{\min_j \|\sum_{i=0}^{n} a_{ji}C'_i\|}\sum_{i=0}^{n} a_{ji}C'_i\| - \|c_j\| > \|2\max_j\|c_j\|+1\| - \|c_j\| \geq$$

$$\geq 2\max_j\|c_j\| - \|c_j\| + 2 \geq 2$$

с одной стороны, и

$$\|\epsilon\sum_{i=0}^{n} a_{ji}d_i\theta(y_i)\| = \|\frac{1}{2\max_j \sum_{i=0}^{n}\|a_{ji}d_i\|}\sum_{i=0}^{n} a_{ji}d_i\theta(y_i)\| \geq 1/2.$$

Отсюда следует, что $\forall j : sgn(\epsilon\sum_{i=0}^{n} a_{ji}d_i\theta(y_i) + \sum_{i=0}^{n} a_{ji}C_i + c_j) =$
$= sgn(\sum_{i=0}^{n} a_{ji}C_i + c_j)$ и не зависит от $\vec{y}$, а значит

$$\sum_{i=1}^{s} d_i\theta(\sum_{j=1}^{k}\chi(sgn(\epsilon\sum_{i=0}^{n} a_{ji}d_i\theta(y_i)+\sum_{i=0}^{n} a_{ji}C_i+c_j)=\sigma_{ij})-k)=S$$

и не зависит от $\vec{y}$. Тогда

$$\Theta_{d_1,d_2,\ldots,d_n}(\vec{y}) = \frac{1}{\epsilon}(h(\vec{y}) - \sum_{i=0}^{n} C_i - S) = \sum_{i=0}^{n} d_i\theta(y_i).$$

□

3. Различные вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть* $L_1 \cup \{\Theta_{d_1,d_2,\ldots,d_k}(\vec{y}) | \forall k \in N, \vec{d} \in R^k\} \subseteq U$. *Тогда* $[U]$ *содержит все одноместные кусочно-постоянные функции.*

Доказательство. Так как $\chi(sgn(ax+c)=1) = 1-\theta(-ax-c)$, $\chi(sgn(ax+c)=-1) = 1-\theta(ax+c)$, $\chi(sgn(ax+c)=0) = 1-\theta(ax+c)-\theta(-ax-c)$, то очевидно, что $\sum_{j=1}^{k}\chi(sgn(a_jx+c_j)=\sigma_{ij}) = \Theta'_i(x)$ выражается через

Θ и одноместные линейные. Заметим теперь, что

$$\sum_{i=1}^{s} d_i\theta(\sum_{j=1}^{k}\chi(sgn(a_jx+c_j)=\sigma_{ij})-k)=\Theta_{d_1,d_2,\dots,d_s}(\Theta'_1(x),\Theta'_2(x),\dots,\Theta'_s(x)).$$

$\square$

Теорема 4. *Пусть $U \not\subseteq NLL_1, FL$. Тогда $x+\theta(x)\in[U]$*

Доказательство. Как было показано при доказательстве прошлых теорем, $f_\tau(x,y)=x+y+NL_\tau(x,y)\in[U]$.
Пусть $g_\epsilon^C=f_\epsilon(x,C\theta(x))-C/2$, при этом ϵ,τ,C определим позднее. Рассмотрим теперь $h(x)=f_\tau(g_\epsilon^C(x),NL_\mu(x)-M)$, одноместную кусочно-постоянную функцию $NL_\mu^F(x)$ мы определим также позднее, так как нам это будет удобно. Распишем подробнее:

$$h(x)=x+C\theta(x)+NL_\epsilon(x)-C/2+NL_\mu^F(x)-M+NL^h(x),$$

где

$$NL^h(x)=\sum_{i=1}^{s} d_i\theta(\sum_{j=1}^{k}\chi(sgn(a_j(x+C\theta(x)-C/2+NL_\epsilon(x))+$$

$$+b_j(NL_\mu^F(x)-M)+c_j)=\sigma_{ij})-k)=$$

$$=\sum_{i=1}^{s} d_i\theta(\sum_{j=1}^{k}\chi(sgn(a_j(x+C\theta(x)-C/2)+NL_{\epsilon a_j+\mu b_j}(x)-b_jM+c_j)=\sigma_{ij})-k)$$

Так как, $NL^h(x)=NL_\tau(g_\epsilon^C(x),NL_\mu(x)-M)$, то ясно, что $\|NL^h(x)\|\le\tau$.
Положим $M=\max_{j:a_j=0}\|\frac{c_j}{b_j}\|+1$, $\epsilon<min(\min_{a_j\neq0}\|\frac{1}{4a_j}\|,1/4)$,
$\mu<\min(\min_{b_j\neq0}\|\frac{1}{2b_j}\|,1/2)$, $C=2\max_{a_j\neq0}\frac{\|\epsilon a_j\|+\|\mu b_j\|+\|b_jM\|+\|c_j\|}{\|a_j\|}$. Тогда получим, что при $a_j=0$,

$$sgn(a_j(x+C\theta(x)-C/2)+NL_{\epsilon a_j+\mu b_j}(x)-b_jM+c_j)=$$

$$=sgn(NL_{\epsilon a_j+\mu b_j}(x)-b_jM+c_j)=$$

$$=sgn(NL_{\epsilon a_j+\mu b_j}(x)-b_j\max_{j:a_j=0}\|\frac{c_j}{b_j}\|+1+c_j)=1$$

и не зависит от NL_μ^F, а при $a_j\neq0$, по выбору констант
$\|NL_{\epsilon a_j+\mu b_j}(x)-b_jM+c_j\|<\|a_jC/2\|$. Тогда

$$sgn(a_j(x+C\theta(x)-C/2)+NL_{\epsilon a_j+\mu b_j}(x)-b_jM+c_j)=sgn(a_j(x+C\theta(x)-C/2))$$

и снова не зависит от выбора $NL^F_\mu(x)$. Теперь

$$h(x) = x + C\theta(x) + NL_{\epsilon+\tau}(x) - C/2 + NL^F_\mu(x) - M$$

и положив $\mu = min(\min_{a_j \neq 0} \| \frac{1}{4a_j} \|, 1/4, \min_{b_j \neq 0} \| \frac{1}{2b_j} \|)$, $\epsilon = \tau = \mu/3$, получим, что можно взять $NL^F_\mu(x) = -NL_{\epsilon+\tau}(x)$, и тогда т.к. $C > 0$ $H(x) = h(Cx)/C + M = x + \theta(x)$. □

Пусть $U \not\subseteq NLL_1, FL$. Тогда $[U]$ содержит все одноместные кусочно-постоянные функции.

Доказательство. Легко следует из 3 и 1. □

Лемма 2. *Пусть* $L_1 \cup \{\Theta_{d_1,d_2,\ldots,d_k}(\vec{y}) | \forall k \in N, \vec{d} \in R^k\} \subseteq U$. *Тогда если* $\theta(\sum_{i=1}^n x_i) \in [U]$, *то и все n-местные кусочно-постоянные функции принадлежат* $[U]$.

Доказательство. Заметим, что раз $\theta(\sum_{i=1}^n x_i) \in [U]$, то и $\theta(\sum_{i=1}^n a_i x_i + c_i) \in [U], \forall a_i, c$. Также по доказанному выше $\Theta_{\vec{d}}(\vec{y}) = \sum_{i=1}^n d_i \theta(y_i) \in [U]$ Теперь остается заметить, что произвольная кусочно-постоянная функция имеет вид $\sum_{i=1}^s d_i \theta(\sum_{j=1}^k \chi(sgn(\langle \vec{a}_j, \vec{x} \rangle + c_j) = \sigma_{ij}) - k)$. □

Пусть $U \not\subset NLL_1, FL$. Тогда если $\theta(\sum_{i=1}^n x_i) \in [U]$, то и все n-местные кусочно-постоянные функции принадлежат $[U]$.

Доказательство. Легко следует из 3 и 1. □

Лемма 3. *Пусть* $L_1 \cup \{\theta(x) + \theta(y)\} \subseteq U$, $G_i \subset R^p, 1 \leq i \leq k$ *- множества значений n-мерного параметра, такие, что* $\chi(\vec{x} \in G_i) \in [U]$. *Тогда* $\chi(\vec{x} \in \cup_{i=1}^k G_i) \in [U]$, $\chi(\vec{x} \in \cap_{i=1}^k G_i) \in [U]$, $\chi(\vec{x} \in R^n / G_i) \in [U]$.

Доказательство. Очевидно:
1) $\chi(\vec{x} \in R^n / G_i) = 1 - \chi(\vec{x} \in G_i)$
3)$\chi(\vec{x} \in G_1 \cap G_2) = \theta(\theta(\chi(\vec{x} \in G_1) - 0.5) + \theta(\chi(\vec{x} \in G_2) - 0.5) - 2)$.
3)$\chi(\vec{x} \in G_1 \cup G_2) = \theta(\theta(\chi(\vec{x} \in G_1) - 0.5) + \theta(\chi(\vec{x} \in G_2) - 0.5) - 0.5)$. □

Более того, мы можем заметить, что $\theta(f(\vec{x})) = \chi(\vec{x} : f(\vec{x}) \geq 0)$, $1 - \theta(-f(\vec{x})) = \chi(\vec{x} : f(x) > 0)$, а $\chi(\vec{x} \in \cap_{i=1}^k G_i) = \prod_{i=1}^k \chi(\vec{x} \in G_i)$. Таким образом, если $\theta(f(x)) \in [U], \theta(g(x)) \in [U]$, то и $\theta(f(x))\theta(g(y)) \in [U]$. Отсюда легко следует, что если $f(x) \in [U] \cap PC, g(y) \in [U] \cap PC$, то и $f(x)g(y) \in [U] \cap PC$.
Также заметим, что:
$\theta(\theta(a - 0.5) + \theta(b - 0.5) - 2) = a \wedge b$,
$\theta(\theta(a - 0.5) + \theta(b - 0.5) - 0.5) = a \vee b$,
$1 - \theta(a - 0.5) = \neg a$ для $a, b \in \{0, 1\}$. Назовем множество $G \subset R^k$ выразимым в T, если
$\exists f : f \in [T], f(\vec{x}) = \chi(\vec{x} \in G)$.

Лемма 4. *Пусть* $L_1 \cup \{\theta(x) + \theta(y)\} \subseteq U$,*а* $1 \leq i \leq k, G_i$ *- выразимые множества значений n-мерного параметра. Тогда если* $F \in [A \setminus B, A \cup B, A \cap B]$, *то* $\chi(\vec{x} \in F(G_1, G_2, \ldots, G_k)) \in [U]$

Доказательство. Очевидно следует из леммы 3. □

Пусть $U \not\subseteq NLL_1, FL$, $G_i, 1 \leq i \leq k$ - выразимые множества значений n-мерного параметра. Тогда если $F \in [A \setminus B,$
$A \cup B, A \cap B]$, то $\chi(\vec{x} \in F(G_1, G_2, \ldots, G_k)) \in [U]$

Лемма 5. *Пусть функция* f *принимает бесконечное количество значений, а функция* g *- конечное* $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_p$. *Тогда*

$$\theta(f+g) = \sum_{i=1}^{p} \theta(f + C_i)\theta(g - C_i)\theta(C_i - g)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{p} \theta(f + C_i)\theta(g - C_i)\theta(C_i - g) = \sum_{i=1}^{p} \theta(f + C_i)\chi(g = C_i) = \theta(f + g)$$

□

Лемма 6. *Функция* $\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle + \sum_{i=1}^{s} d_i \theta(\sum_{j=1}^{k} \chi(sgn(\langle \vec{a}_j, \vec{x} \rangle + c_j) = \sigma_{ij}) - k)$ *может быть записана в такой форме, что* $a_{1j} \in \{0, 1\}$.

Доказательство. Рассмотрим следующее преобразование: $\forall j : B_j > 0$ положим $\forall i, t : A'_{tj} = A_{tj}/B_j, c'_j = c_j/B_j B'_j = 1$, и $\forall j : B_j < 0 : \sigma'_{ij} = -\sigma_{ij}$, $\forall B_j > 0 : \sigma'_{ij} = \sigma_{ij}$, в случае же $B_j = 0$ положим $\forall i, t : A'_{tj} = A_{tj}, B'_j = 0, c'_j = c_j, \sigma'_{ij} = \sigma_{ij}$. Заметим, что после такого преобразования, $h(\vec{x}, y)$ не поменяется. Итак, будем считать, что все $B_j \geq 0$.

□

Лемма 7. *Пусть* n *и* k *местные* $f(\vec{x}), g(\vec{y})$ *имееют векторы нормалей к разделяющим плоскостям сигнатур* $\vec{a}_j, \vec{b}_j$ *соответственно, и*

$$f(\vec{x}) = \langle \vec{a}_0, \vec{x} \rangle + \sum_{i=1}^{s} d_i \theta(\sum_{j=1}^{k} \chi(sgn(\langle \vec{a}_j, \vec{x} \rangle + c_j) = \sigma_{ij}) - k),$$

$$g(\vec{y}) = \langle \vec{b}_0, \vec{x} \rangle + \sum_{i=1}^{s'} p_i \theta(\sum_{j=1}^{k'} \chi(sgn(\langle \vec{b}_j, \vec{y} \rangle + c'_j) = \sigma'_{ij}) - k'),$$

Тогда у $h(x_1, x_2, \ldots = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}))$ *множество векторов нормалей к разделяющим плоскостям сигнатур -* $\{(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{(n-1)j}, a_{nj}\vec{b}_0) \forall j \neq 0\} \cup \{(0, 0, \ldots, 0, \vec{b}_i), \forall i \neq 0\}$ *и линейной частью* $(a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{(n-1)0}, a_{n0}\vec{b}_0)$

Доказательство. Распишем h:

$$h(x_1, x_2, \ldots = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} a_{i0} x_i + a_{n0} \sum_{i=1}^{k} b_{i0} x_{i+n-1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s'} p_i \theta(\sum_{j=1}^{k'} \chi(sgn(\sum_{l=1}^{k} b_{lj} x_{l+n-1} + c'_j) = \sigma'_{ij}) - k') +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} d_i \theta(\sum_{j=1}^{k} \chi(sgn(\sum_{l=1}^{n-1} a_{lj} x_l + a_{nj} \sum_{l=1}^{k} b_{l0} x_{l+n-1} +$$

$$+ c_j + \sum_{i'=1}^{s'} p_{i'} \theta(\sum_{j=1}^{k'} \chi(sgn(\sum_{l=1}^{k} b_{lj} x_{l+n-1} + c'_j) = \sigma'_{ij}) - k')) = \sigma_{ij}) - k)$$

С учетом 5 имеем:

$$NL_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n+k-1}) = \sum_{i=1}^{s} d_i \theta(\sum_{j=1}^{k} \chi(sgn(\sum_{l=1}^{n-1} a_{lj} x_l + a_{nj} \sum_{l=1}^{k} b_{l0} x_{l+n-1} +$$

$$+ c_j + \sum_{i'=1}^{s'} p_{i'} \theta(\sum_{j=1}^{k'} \chi(sgn(\sum_{l=1}^{k} b_{lj} x_{l+n-1} + c'_j) = \sigma'_{ij}) - k')) = \sigma_{ij}) - k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} d_i \theta(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i'=1}^{s'} \chi(sgn(\sum_{l=1}^{n-1} a_{lj} x_l + a_{nj} \sum_{l=1}^{k} b_{l0} x_{l+n-1} + c_j +$$

$$+ p_{i'}) = \sigma_{ij}) \theta(\sum_{j=1}^{k'} \chi(sgn(\sum_{l=1}^{k} b_{lj} x_{l+n-1} + c'_j) = \sigma'_{ij}) - k') - k),$$

Отсюда следует, что нелинейная часть g в нелинейной части f не создает плоскостей сигнатур с нормалями какими-либо еще нормалями к ним. □

Лемма 8. *Пусть $U \not\subseteq NLL_1$. Тогда $\forall n \geq 2$ $\exists f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, такие, что их линейные части $L(\vec{x}) = \langle \vec{e}_0, \vec{x} \rangle$, а векторы нормалей не содержащие нулевых компонент к разделяющим плоскостям сигнатур f_i имеют вид*

$$(\overbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}^{i}, \overbrace{b_k, b_k, b_k, \ldots, b_k}^{n-i})$$

для некоторого набора $b_k \neq 0$(возможно пустого).

Доказательство. Итак, так как $U \not\subseteq NLL_1$, то по 6 $\exists h \in [U]$:
$h(x,y) = x+y+\sum_{i=1}^{s_1} d_i\theta(\sum_{j=1}^{k_1} \chi(sgn(a_jx+B_jy+c_j) = \sigma_{ij})-k), a_j \in \{0,1\}$.
Докажем индукцией по количеству входов n. Возьмем набором $b_k = B_j$: $a_j \neq 0, b_j \neq 0$
При $n = 2$ утверждение доказано ($f_1(x_1,x_2) = h(x_1,x_2)$).
Пусть утверждение доказано при $n = k$. Тогда для $n = k+1$, рассмотрим

$$g_i(\vec{x}, x_{k+1}) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, h(x_k, x_{k+1})), i = 1 \dots n-1$$

$$g_k(\vec{x}, x_{k+1}) = f_{k-1}(h(x_1,x_2), x_3, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1})$$

Линейные части этих функций по 7 будут иметь вид $L(\vec{x}) = \langle \vec{e}_0, \vec{x} \rangle$, а векторы нормалей не содержащие нулевых компонент к разделяющим плоскостям сигнатур по 7 будут иметь вид для $g_i, i = 1 \dots n-1$:
$(\overbrace{1,1,1,\dots,1}^{i}, \overbrace{b_k, b_k, b_k, \dots, b_k}^{n-i}, b_k)$,
а для g_k:
$(\overbrace{1,1,1,\dots,1}^{k}, b_k)$. □

4. Завершение доказательства достаточности

Теорема 5. *Пусть $U \not\subset NLL_1, FL$. Тогда $PC \subset [U]$*

Доказательство. Будем вести доказательство теоремы по индукции по количеству входов. Пусть $U \not\subset NLL_1, FL$.
Для n=1 доказано в 1.
Для n=2 утверждение следует из теорем 4 и 5 публикации [3] (ее результат очевидным образом можно повторить пользуясь функциями $\sum_{i=1}^{p} d_i\theta(x_i)$ и $x + \theta(x)$) и 2.

Пусть построено для всех $k < n$. Ясно, что $H(y, \vec{x}) = y - \sum_{i=1}^{n-1} x_i +$
$+ \sum_{i=1}^{s} d_i\theta(\sum_{j=1}^{k} \chi(sgn(-\sum_{l=1}^{n-1} A_{lj}x_i + B_jy + c_j) = \sigma_{ij}) - k) \in [U]$.
В соответствии с 6 считаем, что $B_j \in \{0,1\}$. Зафиксируем $\epsilon_0 > 0$.
Зафиксируем $\vec{x}_0$ единичной длины, такой что $\forall j$: $B_j \neq 0$ выполнено $|\langle \vec{x}_0, \vec{e}_0 \rangle - \langle \vec{x}_0, \vec{A}_j \rangle| \geq \epsilon_0$, если $\vec{A}_j \neq \vec{e}_0$. Так мы зафиксировали компакт K_{ϵ_0}. Этот компакт - поверхность сферы, с вырезанными полосами вдоль конечного набора линий на сфере. Будем рассматривать $\vec{x} = t(\vec{x}_0 + \vec{\delta})$, $\|\vec{x}_0 + \vec{\delta}\|_{l_2} = 1$, $\|\vec{\delta}\|_{l_1} < \tau$, $\|\vec{x}\|_{l_1} > X_0$.
Запишем усиление условия $\vec{x} = t(\vec{x}_0 + \vec{\delta})$, $\|\vec{x}_0 + \vec{\delta}\|_{l_2} = 1$, $\|\vec{\delta}\|_{l_1} < \tau$ так, чтобы можно было выбрать новую τ усиливающую наше усиление. Рассмотрим набор из $2n-2$ векторов $V_{con} = (\vec{x}_0 + \gamma\vec{e}_1, \vec{x}_0 + \gamma\vec{e}_2, \dots,$

$\vec{x}_0+\gamma\vec{e}_{n-1}, \vec{x}_0-\gamma\vec{e}_1, \vec{x}_0-\gamma\vec{e}_2, \ldots, \vec{x}_0-\gamma\vec{e}_{n-1}$) и "натянем"на них пирамиду без основания. Заметим, что условие принадлежности этой пирамиде через хар-функции может быть записано с помощью определителей, как

$$\chi^{\gamma}_{x_0}(\vec{x}) = \prod_{u=1}^{n-1} \chi(sgn(\begin{vmatrix} \vec{x} \\ V_{con,u} \\ V_{con,u+1} \\ \cdots \\ V_{con,u+n-3} \end{vmatrix}) = sgn(\begin{vmatrix} \vec{x}_0 \\ V_{con,u} \\ V_{con,u+1} \\ \cdots \\ V_{con,u+n-3} \end{vmatrix})) \in [U],$$

считая, что если $g > 2n-2$, то $V_{con,g} = V_{con,g \mod (2n-1)+1}$.
Для условия $\|\vec{x}\|_{l_1} > X_0$ запись его усиления в виде характеристической функции примет вид

$$\chi_{|X_0|}(\vec{x}) = \prod_{i=1}^{n-1} \chi(x_i : x_i < -X_0 \vee x_i > X_0) \in [U].$$

Запишем $H(y,\vec{x})$ в следующей форме:

$$H(y,\vec{x}) = y - t(R_0 + \langle\vec{\delta}, \vec{e}_0\rangle) + \sum_{i=1}^{s} d_i \prod_{j=1}^{k} \chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle\vec{A}_j, \vec{\delta}\rangle) + c_j),$$

где $R_0 = \langle x_0, e_0\rangle$, $R_j = \langle x_0, \vec{A}_j\rangle$, а $\chi_{ij}(f) = \chi(sgn(f) = \sigma_{ij})$.
Для $j : B_j = 0$ положим

$$\chi^{-1}_j(\vec{x}) = \chi(-\sum_{t=1}^{n-1} A_{tj}x_i + c_j < 0) \in [U],$$

$$\chi^{0}_j(\vec{x}) = \chi(-\sum_{t=1}^{n-1} A_{tj}x_i + c_j = 0) \in [U],$$

$$\chi^{1}_j(\vec{x}) = \chi(-\sum_{t=1}^{n-1} A_{tj}x_i + c_j > 0) \in [U].$$

Заметим, что если для множества $\vec{x}$ выполнено, что $\chi^s_j(\vec{x}) = 1$, то на нем $\chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle\vec{A}_j, \vec{\delta}\rangle) + c_j) = V_{ij}$, т.е. константе.

Пусть $B_j \neq 0$.
Для $j : \exists i : A_{ij} = 0$ положим

$$\chi^{-1}_j(\vec{x}) = \chi(-\sum_{t=1, t\neq i}^{n-1} A_{tj}x_i + c_j < 0) \in [U],$$

$$\chi_j^0(\vec{x}) = \chi(-\sum_{t=1, t\neq i}^{n-1} A_{tj}x_i + c_j = 0) \in [U],$$

$$\chi_j^1(\vec{x}) = \chi(-\sum_{t=1, t\neq i}^{n-1} A_{tj}x_i + c_j > 0) \in [U].$$

Заметим, что если для множества $\vec{x}$ выполнено, что $\chi_j^s(\vec{x}) = 1$, то на нем
$\chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) = V_{ij}$, т.е. константе.
Пусть $B_j \neq 0, A_{ij} \neq 0$.
По ограничению на $\vec{x}_0$ $R_j \neq R_0$. Тогда:
1)Если $R_j > R_0$, то $\exists \tau > 0 : R_j - \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle > R_0 + \langle \vec{\delta}, \vec{e}_0 \rangle$, а $\exists t_j$, что при $t > t_j$, из того, что $y - t(R_j + \langle \vec{\delta}, \vec{e}_0 \rangle) < D$, будет следовать,
$\forall i : y - t(R_0 + \langle \vec{\delta}, \vec{e}_0 \rangle) + d_i < D$. Значит, при $t > t_j$, когда $\chi_{ij}(y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j)$ меняет своё значение, $\chi(H(y, t(\vec{x}_0 + \delta)) > D)$ своего значения не меняет. Значит $\exists V_{ij}$, что при $t > t_j$

$$\chi(H(y, t(\vec{x}_0 + \delta)) > D) = \chi(y - t(R_0 + \langle \vec{\delta}, \vec{e}_0 \rangle) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} d_i V_{ij} \prod_{l=1, l\neq j}^{k} \chi_{il}(B_l y - t(R_l + \langle \vec{A}_l, \vec{\delta} \rangle) + c_l)).$$

2)Если $R_j < R_0$, то $\exists \tau > 0 : R_j - \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle < \langle \vec{x}_0 + \vec{\delta}, \vec{e}_0 \rangle$, а значит при $t > t_j$. из того, что $y - t\langle \vec{x}_0 + \delta, \vec{A}_j \rangle > D$, будет следовать, $\forall i$: $y - t\langle \vec{x}_0 + \delta, \vec{e}_0 \rangle + d_i > D$, , а значит $\chi(H(y, t(\vec{x}_0 + \delta)) > D)$ при $t > t_j, \forall i$ не зависит от χ_{ij}. Значит, при $t > t_j$, когда $\chi_{ij}(y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j)$ меняет своё значение, $\chi(H(y, t(\vec{x}_0 + \delta)) > D)$ своего значения не меняет. Значит $\exists V_{ij}$, что при $t > t_j$

$$\chi(H(y, t(\vec{x}_0 + \delta)) > D) = \chi(y - t(R_0 + \langle \vec{\delta}, \vec{e}_0 \rangle) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} d_i V_{ij} \prod_{l=1, l\neq j}^{k} \chi_{il}(B_l y - t(R_l + \langle \vec{A}_l, \vec{\delta} \rangle) + c_l)).$$

3) Отдельно рассмотрим случай, когда $\vec{A}_j = \vec{e}_0$. Положим в этом случае $D > -\min_j c_j + \max_i d_i + 1$. Тогда из $H(y, \vec{x}) > D$, будет следовать, что $y - \sum_{t=1}^{n-1} x_i + NL_{d_i}(y, \vec{x}) > -\min_j c_j + \max_i d_i + 1$, а значит
$y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \delta \rangle) + c_j > (c_j - \min_j c_j) + (\max_i d_i - NL_{d_i}(y, \vec{x})) + 1$ т.е.
$y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \delta \rangle) + c_j > 0$.
Тогда $\chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) = V_{ij}$, т.е. константе.

Тогда по вышесказанному, при наложенных нами ограничениях

$$\sum_{i=1}^{s} d_i \prod_{j=1}^{k} \chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} d_i \prod_{(B_j=0 \vee \exists t: A_{tj}=0) j=1}^{k} \chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) *$$

$$* \prod_{(B_j \neq 0 \wedge \forall t: A_{tj} \neq 0), j=1}^{k} \chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} d_i \prod_{(B_j=0 \vee \exists t: A_{tj}=0), j=1}^{k} V_{ij} *$$

$$* \prod_{(B_j \neq 0 \wedge \forall t: A_{tj} \neq 0), j=1}^{k} \chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} d_i^1 \prod_{(B_j \neq 0 \wedge \forall t: A_{tj} \neq 0), j=1}^{k} \chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} d_i^1 \prod_{(B_j \neq 0 \wedge \forall t: A_{tj} \neq 0), R_j < R_0, j=1}^{k} \chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) *$$

$$* \prod_{(B_j \neq 0 \wedge \forall t: A_{tj} \neq 0), R_j > R_0, j=1}^{k} \chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) =$$

$$* \prod_{(B_j \neq 0, \vec{A}_j = \vec{e}_0), j=1}^{k} \chi_{ij}(B_j y - t(R_j + \langle \vec{A}_j, \vec{\delta} \rangle) + c_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} d_i^1 \prod_{(B_j \neq 0 \wedge \forall t: A_{tj} \neq 0), R_j < R_0, j=1}^{k} V_{ij} \prod_{(B_j \neq 0 \wedge \forall t: A_{tj} \neq 0), R_j > R_0, j=1}^{k} V_{ij} *$$

$$* \prod_{(B_j \neq 0, \vec{A}_j = \vec{e}_0), j=1}^{k} V_{ij} = Const$$

Добавим начальные ограничения на малость, и обозначим $G_{x_0}^{s_1, s_2, \ldots, s_k} = \{\vec{x} | \chi_{sect}(\vec{x}) \chi_{|X_0|}(\vec{x}) \prod_{u=1}^{k} \chi_q^{s_q}(\vec{x}) = 1\}$.

$$f_{x_0}^{s_1, s_2, \ldots, s_k}(y, \vec{x}) = \chi(y - \langle \vec{x}_0, \vec{e}_0 \rangle + d_{x_0}^{s_1, s_2, \ldots, s_k} > D) *$$

$$*\chi_{x_0}(\vec{x})\chi_{|X_0|}(\vec{x})\prod_{u=1}^{k}\chi_q^{s_q}(\vec{x})\in[U],$$

а значит

$$g'_{x_0}(y,\vec{x})=\chi(\vec{x}\in\{\vec{x}|\exists(s_1,s_2,\ldots,s_k):f_{x_0}^{s_1,s_2,\ldots,s_k}(y+d_{x_0}^{s_1,s_2,\ldots,s_k},\vec{x})=1\})=$$
$$=\chi(y-\langle\vec{x}_0,\vec{e}_0\rangle>D)\chi(\vec{x}\in\cup_{s_1,s_2,\ldots,s_k}G_{x_0}^{s_1,s_2,\ldots,s_k})=$$
$$=\chi(y-\langle\vec{x}_0,\vec{e}_0\rangle>D)\chi_{x_0}(\vec{x})\chi_{|X_0|}(\vec{x})\in[U]$$

Тогда пусть $g_{x_0}(y-D,\vec{x})=g'_{x_0}(y+D,\vec{x})=$
$=\chi(y-\langle\vec{x}_0,\vec{e}_0\rangle>0)\chi_{x_0}(\vec{x})\chi_{|X_0|}(\vec{x})$.

Теперь заметим, что при проекции на единичную сферу с центром в нуле множеств $\{\vec{x}:\chi_{x_0}(\vec{x})\chi_{|X_0|}(\vec{x})=1\}$ мы можем выбрать внутри этих проекций на сфере малые окрестности, $O_\phi(\vec{x_0})$, и эти окрестности образуют открытое покрытие K_{ϵ_0}. Выберем конечное подпокрытие этого компакта $(O_{\phi_1}(\vec{x_1}),O_{\phi_2}(\vec{x_2}),\ldots,O_{\phi_a}(\vec{x_a}))$. Обозначим $X_0(g_{x_a})$ константу, которой ограничен модуль аргумента функции g_{x_a}. Тогда получим, что

$$W(y,\vec{x})=\chi(\vec{x}\in\{\vec{x}|\cup_{u=1}^{a}\chi(g_{x_u}(\vec{x})=1)\})\chi(\vec{x}>\max_a X_0(g_{x_a}))=$$

$$=\theta(\sum_{u=1}^{a}\chi(g_{x_u}(\vec{x})=1)-0.5)\chi(\vec{x}>\max_a X_0(g_{x_a}))=$$

$$=\theta(\sum_{u=1}^{a}\chi(y-\langle\vec{x},\vec{e}_0\rangle>0)\chi_{x_u}(\vec{x})\chi_{|X_a|}(\vec{x})-0.5)\chi(\|\vec{x}\|_{l_1}>\max_a X_0(g_{x_a}))=$$

$$=\chi(y-\langle\vec{x},\vec{e}_0\rangle>0)\theta(\sum_{u=1}^{a}\chi_{x_u}(\vec{x})\chi_{|X_a|}(\vec{x})-0.5)\chi(\|\vec{x}\|_{l_1}>\max_a X_0(g_{x_a}))\in[U],$$

но так как проекции бесконечных конусов покрыли K_{ϵ_0}, то

$$W(y,\vec{x})=\chi(y-\langle\vec{x},\vec{e}_0\rangle>0)\theta(\sum_{u=1}^{a}\chi_{|X_u|}(\vec{x})-0.5)\chi(\|\vec{x}\|_{l_1}>\max_a X_0(g_{x_a}))=$$

$$=\chi(y-\langle\vec{x},\vec{e}_0\rangle>0)\chi_{\max_a X_0(g_{x_a})}(\vec{x})*$$
$$*\chi(\vec{x}:|\langle\vec{x}_0,\vec{e}_0\rangle-\langle\vec{x}_0,\vec{A}_j\rangle|\geq\epsilon_0,A_{ij}\neq0,\vec{A}_j\neq\vec{e}_0).$$

Итак, мы научились строить для произвольной $H(y,\vec{x})$ функцию $W(y,\vec{x})$. Обозначим $X_W=\max_a X_0(g_{x_a})$. Построим таким образом W_i, для каждой f_i из 8.

Если при этом набор соответствующих b_i пуст или $\{b_i\} = \{1\}$, то $\forall i$ множитель
$\chi(\vec{x} : |\langle \vec{x}_0, \vec{e}_0\rangle - \langle \vec{x}_0, \vec{A}_j\rangle| \geq \epsilon_0, A_{ij} \neq 0, \vec{A}_j \neq \vec{e}_0)$ у соответствующей W_i равен единице (так как функция из которых она строилась не имеет нормалей к сигнатурам с ненулевыми компонентами и при этом таких, что $\vec{A}_j \neq \vec{e}_0$.

Иначе объединим множества, на которых $W_i = 1$, и домножим на $\chi_{\max_{W_i} X_{W_i}}(\vec{x}))$ то есть рассмотрим

$$W_r(y, \vec{x}) = (\vee_{i=1}^{n-1} W_i(y, \vec{x})) \wedge \chi_{\max_{W_i} X_{W_i}}(\vec{x})) =$$
$$= \chi(y - \langle \vec{x}, \vec{e}_0\rangle > D)\chi_{\max_{W_i} X_{W_i}}(\vec{x}))*$$
$$* \vee_{i=1}^{n-1} \chi(\vec{x} : |\langle \vec{x}_0, \vec{e}_0\rangle - \langle \vec{x}_0, \vec{A}_j^{W_i}\rangle| \geq \epsilon_0, A_{lj}^{W_i} \neq 0, \vec{A}_j^{W_i} \neq \vec{e}_0) =$$
$$= \chi(y - \langle \vec{x}, \vec{e}_0\rangle > D)\chi_{\max_{W_i} X_{W_i}}(\vec{x}))*$$
$$*(1 - \wedge_{i=1}^{n-1}\chi(\vec{x} : |\langle \vec{x}_0, \vec{e}_0 - \vec{A}_j^{W_i}\rangle| < \epsilon_0, A_{lj}^{W_i} \neq 0, \vec{A}_j^{W_i} \neq \vec{e}_0))$$

По 8 и так как $\vec{A}_j^{W_i} \neq \vec{e}_0$, то $\vec{A}_j^{W_i}$ у имеют вид
$(\overbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}^{i-1}, \underbrace{b_k, b_k, \overset{n-i}{b_k}, \ldots, b_k}), b_k \notin \{0, 1\}$.
Найдем $\vec{x}$ для которых выполнено
$\wedge_{i=1}^{n-1}\chi(\vec{x} : |\langle \vec{x}_0, \vec{e}_0 - \vec{A}_j^{W_i}\rangle| < \epsilon_0, A_{lj}^{W_i} \neq 0, \vec{A}_j^{W_i} \neq \vec{e}_0) = 1$. Для этого перепишем в виде набора неравенств вида:

$$\left\| \begin{pmatrix} b_{i_1} - 1, b_{i_1} - 1, b_{i_1} - 1, \ldots, b_{i_1} - 1 \\ 0, b_{i_2} - 1, b_{i_2} - 1, b_{i_2} - 1, \ldots, b_{i_2} - 1 \\ 0, 0, b_{i_3} - 1, b_{i_3} - 1, \ldots, b_{i_3} - 1 \\ \ldots \\ \overbrace{0, 0, 0, \ldots, 0}^{k-1}, \overbrace{b_{i_k} - 1, b_{i_k} - 1, b_{i_k} - 1, \ldots, b_{i_k} - 1}^{n-i} \\ \ldots \\ 0, 0, 0, \ldots, 0, b_{i_{n-1}} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_k \\ \ldots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \right\| < \epsilon_0 \quad (2)$$

Заметим, что матрица квадратная, верхнетреугольная и невырожденная ($b_i \neq 1$). Значит $\|\vec{x}_0\| < J\epsilon_0$, для некоторого $J > 0$. Возьмем $\epsilon_0 = \frac{1}{2J}$. Тогда $\|\vec{x}_0\| < 1/2$. Но $\|\vec{x}_0\| = 1$. Значит нет $\vec{x}_0$, удовлетворяющих хоть какой-либо из этих систем. Отсюда следует, что

$$\wedge_{i=1}^{n-1}\chi(\vec{x} : |\langle \vec{x}_0, \vec{e}_0 - \vec{A}_j^{W_i}\rangle| < \epsilon_0, A_{lj}^{W_i} \neq 0, \vec{A}_j^{W_i} \neq \vec{e}_0) = 0.$$

Теперь рассмотрим характеристическую функцию от объедининения множества для которого W_r - характеристическая функция, и этого же множества полученного сдвигом вдоль какого-нибудь вектора, лежащего в $y-\sum_{i=1}^{n-1} x_i = 0$, например вдоль $(n, \vec{e}_0)$. Заметим тогда, что для любого $\vec{x}$ или $\chi(\|\vec{x}\|_{l_1} > \max_{W_i} X_{W_i}) = 1$ или $\chi(\|\vec{x} - A\vec{e_0}\|_{l_1} > \max_{W_i} X_{W_i}) = 1$, где $A = \max_{W_i} X_{W_i}$. Тогда

$$1 - \theta(y - \sum_{i=1}^{n-1} x_i) = \theta(W_r(y, \vec{x}) + W_r(y + An, \vec{x} - A\vec{e_0}) - 0.5)$$

Далее из 2 следует, что и все n-местные кусочно-постоянные принадлежат $[U]$.

$\square$

5. Доказательство необходимости

Обозначим PC_n - все кусочно-постоянные функции зависящие от n входов.

Теорема 6. *Пусть* $U = L_1 \cup PC_N$. *Тогда* $\theta(\sum_{i=1}^{N+1} x_i) \notin [U]$

Доказательство. Заметим, что $PC_N \subset [L_1 \cup \cup_n \{\sum_i^n d_i \theta(x_i)\} \cup \{\theta(\sum_{i=1}^{N} x_i)\}]$. Предположим, что $\theta(\sum_{i=1}^{N+1} x_i)$ принадлежит замыканию. Тогда возьмем формулу над $L_1 \cup \{\cup_n \sum_i^n \theta(x_i), \theta(\sum_{i=1}^{N} x_i)\}$, и проводя в ней преобразования 5 с каждым выражением вида $\sum a_i x_i + \sum d_i \theta(f_i(\vec{x})$ получим, что

$$\theta(\sum_{i=1}^{N+1} x_i) = F(\theta(\sum_{i=1}^{N} \lambda_{1i_j} x_{i_{j_1}} + c_1), \theta(\sum_{i=1}^{N} \lambda_{2i_j} x_{i_{j_2}} + c_2), \ldots, \theta(\sum_{i=1}^{N} \lambda_{pi_j} x_{i_{j_p}} + c_p)),$$

т.к. количество непрерыных слагаемых в сумматорах при применении этого преобразования не вырастает, а количество сумм вида $\sum a_i x_i + \sum d_i \theta(f_i(\vec{x})$ после каждого такого преобразования внутри формулы уменьшается, а всего их конечно.
Пусть $I_k(\vec{x}) = \theta(\sum_{i=1}^{N} \lambda_{ki_{j_k}} x_{i_{j_k}} + c_k)$. Так как длина каждой последовательности i_{j_k} равна N, то $\forall k \exists l \in \{1, 2, \ldots, N, N+1\} : i_{j_k} \neq l$. Заметим, тогда что тогда $I_k(\vec{x}) = I_k(\vec{x} + R\vec{e}_l)$. Обозначим $G_k = \{\vec{x} | G_k(\vec{x}) = 1\}$. Заметим, что для ∂G_k верно, что если $\vec{x} \in \partial G_k$, то и $\vec{x} + R\vec{e}_{l(k)} \in \partial G_k$.
Заметим, что F принимает на вход единицы и нули, и ее значение единица или ноль, и мы ей можем сопоставить логическую функцию, то есть

$$\theta(\sum_{i=1}^{N+1} x_i) = F(\chi(\vec{x} \in G_1), \chi(\vec{x} \in G_2), \ldots, \chi(\vec{x} \in G_p))$$

Теперь преобразуем логическое выражение в выражение "пересечений и объединений"в соответствии с 4.

$$\theta(\sum_{i=1}^{N+1} x_i) = \chi(\vec{x} \in F_{/,\cup,\cap}(G_1, G_2, \ldots, G_p))$$

Заметим, что для почти всех точек $\partial F_{/,\cup,\cap}(G_1, G_2, \ldots, G_p)$, кроме множества точек нулевой меры(относительно меры μ на N-мерных объемах, т.е. меры на границе), выполнено, что $\exists \vec{x} \in \partial F_{/,\cup,\cap}(G_1, G_2, \ldots, G_p)$, такой, что $\exists \epsilon > 0, l : \vec{x} + R\vec{e}_l \in \partial F_{/,\cup,\cap}(G_1, G_2, \ldots, G_p), \forall |R| < \epsilon$. Это свойство выполнено, для начальных G_i, которые являются бесконечными многогранниками и продолжает выполняться, при конечном объединении, пересечении и взятии дополнения этих многогранников, так как грани получающихся при таком процессе многогранников - конечные объединения и пересечения подмножеств ∂G_i с границами в виде ломаных, и каждая грань получающегося многогранника - какое-то подмножество одной из граней G_i, при этом, если мера $\mu(\partial G_k \cap \partial F_{/,\cup,\cap}(G_1, G_2, \ldots, G_p)) > 0$, то свойство выше выполнено для всех $\vec{x} \in \partial G_k \cap \partial F_{/,\cup,\cap}(G_1, G_2, \ldots, G_p)$ кроме точек границы этого пересечения (в смысле границы на $\partial F_{/,\cup,\cap}(G_1, G_2, \ldots, G_p)$). Мера таких точек относительно μ - нулевая. Но свойство выше, очевидно, не выполнено для $\partial\{\vec{x} | \theta(\sum_{i=1}^{N+1} x_i) = 1\}$, так как если для $\vec{x} : \sum_{i=1}^{N+1} x_i = \langle \vec{e}_0, \vec{x} \rangle = 0$, то $\forall R \neq 0, l : \langle \vec{e}_0, \vec{x} + R\vec{e}_l \rangle = \langle \vec{e}_0, \vec{x} \rangle + \langle \vec{e}_0, R\vec{e}_l \rangle = R\langle \vec{e}_0, \vec{e}_l \rangle = R \neq 0$, а значит $\forall R \neq 0, l : \vec{x} + R\vec{e}_l \notin \partial\{\vec{x} | \theta(\sum_{i=1}^{N+1} x_i) = 1\}$. Противоречие. $\square$

Обозначим $NLL_{1,n} = [L_1 \cup \{x + NL(x, \vec{y}), NL(x, \vec{y}) \in PC_n\}]$.

Теорема 7. *Пусть $U = L_1 \cup NLL_{1,n}$. Тогда $\theta(\sum_{i=1}^{N+1} x_i) \notin [U]$*

Доказательство. Заметим, что функция с линеным входом в формуле, должна лежать внутри θ после чего работает предыдущее доказательство. $\square$

5.1. Основной результат

Теорема 8. *Пусть U содержит все одноместные линейные и ещё конечное число кусочно-параллельных . Замыкание U содержит все кусочно-постоянные тогда, и только тогда, когда $U \not\subseteq NLL_1, FL$*

Доказательство. Достаточность показана в 5. С другой стороны, очевидно, что есть кусочно-постоянные функции не лежащие в FL, например $\theta(x)$. Кроме того, если $U \subset NLL_1$, то $\exists k : U \subset NLL_{1,k}$, т.к. количество функций которые не одноместные-линейные в U конечно. Но тогда по 7 не все кусочно-постоянные выражаются. $\square$

5.2. Заключение

Таким образом, в настоящей работе найден критерий выразимости кусочно-постоянных функций через одноместные линейные с конечной системой кусочно-параллельных в виде добавки. Автор выражает благодарность своему научному руководителю А.А. Часовских.

Список литературы

[1] В. С. Половников, “О задаче проверки функциональной полноты в классе кусочно-параллельных функций”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2008, № 6, 31–35.

[2] Половников В.С., “О нелинейной сложности нейронных схем Мак-Каллока-Питтса.”, *М., Интеллектуальные системы.*, 2007, № 11, 261-275.

[3] Отрощенко А.Д., “Классы кусочно-параллельных функций, содержащие все одноместные.”, *М., Интеллектуальные системы.*, 2020, № 4, 57-74.

On the expressibility of piecewise constant functions in the space of piecewise parallel

Otroschenko A.D.

For a finite system of piecewise parallel functions implemented by schemes of linear elements and Heaviside functions, the criterion for the expressiveness of piecewise constant functions is obtained, supplemented by all single linear functions. Thus, the criterion of expressiveness of the binary classifier implemented by the McCulloch-Pitts neural scheme is obtained.

Keyword: Piecewise constant function, piecewise parallel function, completeness problem, expressibility problem, McCulloch-Pitts neural circuits.

References

[1] V. S. Polovnikov, “On the problem of checking functional completeness in the class of piecewise parallel functions”, *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat., fur.*, 2008, № 6, 31–35 (In Russian).

[2] Polovnikov V. S., “On the nonlinear complexity of McCulloch-Pitts neural circuits.”, *M., Intelligent systems.*, 2007, № 11, 261-275 (In Russian).

[3] Otroschenko A.D., "Classes of piecewise parallel functions containing all single ones.", *M., Intelligent systems.*, 2020, №4, 57-74 (In Russian).