Бигрупповые алгебры и теорема Поттера

Р. Р. Айдагулов[1]

Здесь теорема Поттера для двух переменных обобщается на случай многих переменных. При этом, обобщение на степень n выглядит как определение квадрата длины в обычной Клиффордовой алгебре состоящей из линейной комбинации базисных элементов Клиффордовой алгебры. Не для всякого набора элементов, коммутирующих через множители, являющиеся примитивными корнями $n-$ ой степени, обобщенная теорема Поттера верна. Для этого необходима и достаточно, чтобы они образовали образующие порядка n обобщенной Клиффордовой алгебры. Бигрупповые алгебры и обобщенные алгебры Клиффорда представляют одно и то же понятие.

Ключевые слова: Бигрупповая алгебра, обобщенные алгебры Клиффорда, образующие Клиффорда, обобщение теоремы Поттера.

Известна теорема [1] о том, что если a, b две не коммутирующие переменные, например матрицы, для которых выполняется соотношение коммутации:

$$ba = \theta ab,\ \theta^n = 1, \theta^k \neq 1\ \forall 0 < k < n, \tag{1}$$

то выполняется соотношение Поттера:

$$(a + b)^n = a^n + b^n. \tag{2}$$

В статье [2] имеется попытка обобщить это на много переменных:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n = \sum_i a_i^n, \quad if\ a_i a_j = \theta_{ij} a_j a_i$$

$\forall i \neq j,\ \theta_{ij}^n = 1, \theta_{ij}^k \neq 1 \forall 0 < k < n,$ (3)

Однако, такая теорема не верна уже при $n = 3, m \geq 3$. Она как известна, верна для $n = 2$ в алгебрах Клиффорда при любом m, когда a_i совпадают с образующими алгебры Клиффорда с точностью до множителя из поля.

Обобщение этой теоремы дано в [3]. Для этого потребуется вводить понятие бигрупповой алгебры [4], являющейся по сути обобщенной алгеброй Клиффорда.

[1] *Айдагулов Рустем Римович* — Старший научный сотрудник. Кафедра теоретической информатики, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Ленинские горы 1, Москва, 119991, Россия, a_rust@bk.ru.

Aidagulov Rustem Rimovich — Senior Researcher. Department of Theoretical Informatics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow Lomonosov State University, Leninskiye Gory 1, Moscow, 119991, Russia, a_rust@bk.ru.

Пусть G конечная абелева группа, G^* группа характеров (гомоморфизмы в мультипликативную группу поля). Бигрупповая алгебра определяется как множество формальных сумм:

$$\sum_{\mu\in G^*, g\in G} a_{\mu,g}\mu g,$$

с коммутационными соотношениями

$$\mu g = \mu(g) g\mu.$$

Такая алгебра обладает замечательными свойствами. Определим отображение бигрупповой алгебры циклической группы G в алгебру матриц. Обозначим через x и y следующие матрицы порядка $n\times n$:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \theta^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \theta^{n-1} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Легко проверяется, что при θ^n выполняется $xy = \theta yx, x^n = y^n$. Когда группа G порядка n имеет структуру $Z_{n_1}\oplus Z_{n_2}\oplus ... \oplus Z_{n_k}, n = n_1...n_k$ так же получим алгебру, порожденными элементами как x_i, y_i порядков n_i и гомоморфизм в алгебру матриц порядка n. Доказано [4], что в случае, когда в поле имеются примитивные корни степени n_i и характеристика поля не делит n, то бигрупповая алгебра изоморфна алгебре матриц порядка $n\times n$.

Отметим, что бигрупповая алгебра не представляется групповой алгеброй группы типа $G^*\oplus G$. Действительно, в случае существования однородного отображения в групповую алгебру некоторой группы μg и $g\mu$ представлялись бы разными элементами этой группы s_1, s_2. Так как групповая алгебра прямая сумма однородных модулей, порожденных элементами группы, соотношение $s_1 - \theta s_2 = 0$ невозможно.

Рассмотрим бигрупповую алгебру группы $G = (Z_n)^k$. Она порождается образующими Дарбу:

$$x_i, i = 1, 2, ..., 2k, \quad x_i x_{i+k} = \theta x_{i+k} x_i, \ (x_{i+k} = y_i).$$

Различные произведения степеней

$$\prod_{l=1}^{2k} x_l^{i_l} = x^I, \ I = (i_1, .., i_{2k})$$

образуют базис Сильвестра, а мультииндексы $I = (i_1, i_2, ..., i_{2k}),\ i_l \in Z_n$ представляют группу цветов. Образующие Дарбу представляют

$$J = \begin{pmatrix} O & E_k \\ -E_k & O \end{pmatrix}$$

ортогоналный базис в симплектическом пространстве группы цветов с кососимметричным скалярным произведением

$$[I, J] = \sum_{l=1}^{k} (i_l j_{i+k} - i_{k+l} j_l),\ x^I x^J = \theta^{[I,J]} x^J x^I.$$

Образующими Клиффорда в такой алгебре называются такие элементы $z_1, ..., z_{2k}$, что

$$z_j z_i = \theta_i z_i z_j, i < j \tag{4}$$

примитивный корень θ_i степени n от 1, один и тот же для всех $j > i$. По образующим Дарбу можно построить образующие Клиффорда многими способами:

$$z_1 = x_1^i, z_2 = x_{k+1}^{i_2}, z_3 = x_1^{i_3} x_{k+1}^{i_2} x_2^{i_4}, z_4 = x_1^{i_3} x_{k+1}^{i_2} x_2^{i_5} x_{2+k}^{i_6}, ...$$

Здесь все i_l взаимно просты с n и степени вхождения x_i в $z_j, j \geq 2i+1, i < k,\ j \geq 2(k-i), i > k$ одни и те же. Взяв образующие

$$z_1 = x_1, z_2 = x_{k+1}, z_3 = x_1^{n-1} x_{k+1} x_2, z_4 = x_1^{n-1} x_{k+1} x_{2+k},$$

$z_5 = x_1^{n-1} x_{k+1} x_2^{n-1} x_{2+k} x_3, ...$(5)
получим стандартные образующие Клиффорда

$$z_i z_j = \theta z_j z_i, i < j.$$

Верно и обратное, если алгебра имеет $2k$ образующих Клиффорда, то она имеет и образующие Дарбу и тем самым представляет бигрупповую алгебру группы $G = (Z_n)^k$. Обобщенной теоремой Поттера является утверждение:

Теорема 1. *Соотношение () выполняется, если a_i с точностью до нумерации являются подмножеством образующих Клиффорда, с соотношениями (4) для бигрупповой алгебры $(Z_n)^k,\ k \geq [(m+1)/2]$.*

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $m = 2$. Пусть $a_2 a_1 = \theta a_1 a_2$. Определим для них квантовые биномиальные коэффициенты, определяемые рекурентно:

$$(a_1 + a_2)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}_\theta a_1^i a_2^{m-i}.$$

Следовательно, $\binom{1}{0}_\theta = 1 = \binom{1}{1}_\theta$, и

$$\binom{m}{i}_\theta = \theta^{m-i}\binom{m-1}{i-1}_\theta + \binom{m-1}{i}_\theta, i > 0, \binom{m}{0}_\theta = 1.$$

Из рекурсии получаем:

$$\binom{m}{i}_\theta = \sum_{l=1}^{m-i+1} \theta^{m-l}\binom{m-l}{i-1}_\theta.$$

Вводя обозначения $m_\theta = 1+\theta+...+\theta^{m-1} = (m-1)_\theta+\theta^{m-1}, m!_\theta = \prod_{i=1}^m i_\theta$ получаем формулу

$$\binom{m}{i}_\theta = \frac{m!_\theta}{i!_\theta(m-i)!_\theta}.$$

Отметим, что $m_\theta = 0 \Leftrightarrow \theta^m = 0$, в нашем случае ($\theta$ примитивный корень из 1) это эквивалентно $n|m$. При $m < n$ ни один из биномиальных коэффициентов не равен 0, а при $m = n$ все коэффициенты за исключением крайних равны нулю. Это доказывает случай $m = 2$ - (2).

Когда $m > 1$ переносим влево все a_1, соответствующее z_1 в соотношении (4). Так как a_1 одинаково коммутирует со всеми остальными членами получим

$$(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}_{\theta_1} a_1^i(a_2 + ... + a_m)^{n-i} = (a_2 + ... + a_m)^n + a_1^n.$$

Далее, перенося все степени a_2 влево получим выражение без a_1, a_2 и $a_1^+ a_2^n$. Продолжая процесс получим

$$(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n = ... = \sum_{i=1}^{m-2} a_i^n + (a_{m-1} + a_m)^n = \sum_{i=1}^{m} a_i^n.$$

□

Легко устанавливается необходимость условия примитивности корней θ_1. Сложнее показать необходимость условия (4) для справедливости теоремы. Несколько проще доказывается необходимость этого условия при $m = 3$. Далее, если $m > 3$, то среди них найдутся три, которых нельзя упорядочить так, чтобы они составляли подмножество образующих Клиффорда. Пусть это a_1, a_2, a_3, обозначим через $b = a_1 + a_2 + a_3$ их сумму. Тогда

$$(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n = b^n + \sum_{i=1}^n P_i(a_1, a_2, a_3, ..., a_m),$$

где P_i многочлены с суммарной степенью $n - i$ по переменным a_1, a_2, a_3. Соответственно, оставшийся не нулевой член, отличный от a_1^n, a_2^n, a_3^n докажет необходимость условия (4) и для случая $m > 3$.

Список литературы

[1] R.Loewy, V.Mehrmann, "A note on Potter's theorem for quasi commutative matrices", *Linear algebra and its Applications*, **430** (2009), 1812–1825.

[2] Игнатьев М.В., "Квантовая комбинаторика", *Математическое просвещение*, **18** (2014), 66–111.

[3] Айдагулов Р.Р., "Бигрупповые алгебры и квантовая комбинаторика", *Эл. журнал Дневник науки*, **1** (2019), 7.

[4] Айдагулов Р.Р., "Бигрупповые алгебры и их автоморфизмыБигрупповые алгебры и их автоморфизмы", *Эл. журнал Дневник науки*, **1** (2019), 20.

Bigroup algebras and Potter's theorem

Aidagulov R.R.

Cluster analysis has a very wide range of applications; its methods are used in medicine, chemistry, archeology, marketing, geology and other disciplines. Clustering consists of grouping similar objects together, and this task is one of the fundamental tasks in the field of data mining. Usually, clustering is understood as a partition of a given set of points of a certain metric space into subsets in such a way that close points fall into one group, and distant points fall into different ones. In this paper, we offer a local averaging method for calculating the distribution density of data as points in a metric space. Choosing further sections of the set of points at a certain level of density, we get a partition into clusters. The proposed method offers a stable partitioning into clusters and is free from a number of disadvantages inherent in known clustering methods.

Keywords: cluster, algorithm, density, averaging method.

References

[1] R.Loewy, V.Mehrmann, "A note on Potter's theorem for quasi commutative matrices", *Linear algebra and its Applications*, **430** (2009), 1812–1825.

[2] Ignatiev M.V., "Quantum combinatorics", *Mathematical education*, **18** (2014), 66–111 (In Russian).

[3] Aidagulov R.R., "Bigroup algebras and quantum combinatorics.", *Electronic journal "Diary of Science"*, **1** (2019) (In Russian), 7 pp.

[4] Aidagulov R.R., “Bigroup algebras and their automorphisms.”, *Electronic journal “Diary of Science"*, **1** (2019) (In Russian), 20 pp.