Представление знания в дискуссивной логике С. Яськовского

М. Юкевич[1]
В.О. Шангин[2]

В статье анализируется представление знания в предложенной С. Яськовским дискуссивной (дискурсивной) логике $\mathbf{D_2}$, которая является одной из первых паранепротиворечивых логик. Показывается возможность упрощения её аксиоматизации и обсуждается решение проблемы независимости аксиом.

Ключевые слова: дискуссивная логика, дискурсивная логика, паранепротиворечивая логика, представление знания.

1. Введение

Статья посвящена представлению знаний в дискуссивной (дискурсивной) логике $\mathbf{D_2}$, предложенной С. Яськовским в 40-е гг. прошлого века [6, 7]. Недовольный *взрывоопасным* характером следования в классической логике (где из противоречия следует все что угодно), он предложил одну из первых *паранепротиворечивых* логик, то есть логику, в которой отношение следования невзрывоопасно. Поскольку наличие противоречия — это обязательный элемент любой дискуссии (где оппоненты придерживаются несовместимых и взаимоисключающих взглядов), С. Яськовский назвал свою логику *дискуссивной* или *дискурсивной*. Содержательно он выдвинул следующие критерии такой логики [6, с. 38]:

> ... Проблема логики противоречивых систем формулируется здесь следующим образом: задача состоит в том, чтобы найти такое пропозициональное исчисление, которое: (1) будучи применённым к противоречивым системам, не всегда приводит к тому, что доказывается все что угодно, (2) было бы довольно богатым для применения в практических рассуждениях, (3) имело бы интуитивное обоснование.

[1] *Юкевич Марчин* — к.т.н., ассистент, отделение психологии и когнитивистики университета им. А. Мицкевича, Познань, Польша, e-mail: marcin.jukiewicz@amu.edu.pl.

Marcin Jukiewicz — PhD, Assistant Professor, Department of Logic and Cognitive Science, Faculty of Psychology and Cognitive Sciences, Adam Mickiewicz University in Poznan.

[2] *Шангин Василий Олегович* — к.филос.н., доцент кафедры логики философского факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, e-mail: shangin@philos.msu.ru.

Shangin Vasily Olegovich — PhD, Associate Professor, Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov MSU.

Не довольный классической и известными неклассическими (прежде всего, табличными трёхвалентными) логиками, С. Яськовский останавливается в конце концов на модальной логике **S5**, определяя дискуссивную импликацию следующим образом: $A \to_d B := \Diamond A \to B$. Вскоре он публикует изменённый вариант $\mathbf{D_2}$, вводя (правую) дискуссивную конъюнкцию: $A \wedge_d B := A \wedge \Diamond B$, которая позволяет (в отличие от первого варианта $\mathbf{D_2}$) стандартно определять дискуссивную эквиваленцию: $A \leftrightarrow_d B := (A \to_d B) \wedge_d (B \to_d A)$. Более того, именно с такой конъюнкцией позитивный фрагмент $\mathbf{D_2}$ совпадает с классическим. В заключении отметим, что С. Яськовский не построил $\mathbf{D_2}$ в виде исчисления, что, по-видимому, привело к тому, что последующая история её развития полна драматическими попытками её аксиоматизировать [9].

2. Аксиоматизация $\mathbf{D_2}$

$\mathbf{D_2}$ задаётся над языком L в алфавите $\{\mathcal{P}, \neg, \vee, \to_d, \wedge_d, \leftrightarrow_d, (,)\}$, где $\mathcal{P} = \{p, q, r, s, p_1, \dots\}$ — это множество пропозициональных переменных. Множество всех L-формул задаётся стандартно и обозначается F. A, B, C и т.д. пробегают по L-формулам. X обозначает множество дискуссивных формул. Язык L_m модальной логики **S5** задаётся в алфавите $\{\mathcal{P}, \neg, \vee, \to, \wedge, \Box, \Diamond, (,)\}$. Множество всех L_m-формул определяется стандартно и обозначается F_m. В обоих языках эквиваленция стандартно (и с соответствующими изменениями) задаётся через импликацию и конъюнкцию. Понятия **S5**-общезначимой формулы и **S5**-следования также стандартны [1, 5]

Аксиоматизация $\mathbf{D_2}$ задаётся следующим образом [4]:

1) $A \to_d (B \to_d A)$,
2) $(A \to_d (B \to_d C)) \to_d ((A \to_d B) \to_d (A \to_d C))$,
3) $((A \to_d B) \to_d A) \to_d A$,
4) $(A \wedge_d B) \to_d A$,
5) $(A \wedge_d B) \to_d B$,
6) $A \to_d (B \to_d (A \wedge_d B))$,
7) $A \to_d (A \vee B)$,
8) $B \to_d (A \vee B)$,
9) $(A \to_d C) \to_d ((B \to_d C) \to_d ((A \vee B) \to_d C))$,

10) $\neg\neg A \to_d A$,

11) $A \to_d \neg\neg A$,

12) $\neg(A \vee \neg A) \to_d B$,

13) $\neg(A \vee B) \to_d \neg(B \vee A)$,

14) $\neg(A \vee B) \to_d (\neg A \wedge_d \neg B)$,

15) $\neg(\neg\neg A \vee B) \to_d \neg(A \vee B)$,

16) $(\neg(A \vee B) \to_d C) \to_d ((\neg A \to_d B) \vee C)$,

17) $\neg((A \vee B) \vee C) \to_d \neg(A \vee (B \vee C))$,

18) $\neg((A \to_d B) \vee C) \to_d (A \wedge_d \neg(B \vee C))$,

19) $\neg((A \wedge_d B) \vee C) \to_d (A \to_d \neg(B \vee C))$,

20) $\neg(\neg(A \vee B) \vee C) \to_d (\neg(\neg A \vee C) \vee (\neg(\neg B \vee C)))$,

21) $\neg(\neg(A \to_d B) \vee C) \to_d (A \to_d \neg(\neg B \vee C))$,

22) $\neg(\neg(A \wedge_d B) \vee C) \to_d (\neg(\neg B \vee C) \wedge_d A)$.

Единственное правило вывода — модус поненс.

$$\frac{A \quad A \to_d B}{B} \tag{MP}$$

Теорема 1. *[4, Теорема 34]* $\vdash_{\mathbf{D_2}} A$ *т.т.т.* $\models_{\mathbf{D_2}} \sigma(A)$.

Доказательство. Используется тот факт, что $\vdash_{\mathbf{D_2}}$ A *т.т.т.* $\vdash_{\Diamond-\mathbf{S5}}$ $\sigma(A)$, где $\Diamond - \mathbf{S5}$– это адекватная аксиоматизация $\Diamond$-фрагмента логики **S5**, предложенная Е. Пержановским [10]. □

3. Проблема упрощения аксиоматизации $\mathbf{D_2}$

В силу того, что аксиоматизация $\mathbf{D_2}$ получается в результате взаимных переводов между L и L_m, подавляющее большинство аксиом для отрицания выглядят громоздко. Более того, Н. да Коста и Л. Дубикайтис, авторы первой аксиоматизации $\mathbf{D_2}$ в L (исторически первая аксиоматизация $\mathbf{D_2}$, предложенная Е. Котасом, была в L_m [8]), поставили задачу создания независимой аксиоматизации $\mathbf{D_2}$ [4]. Позднее Г. Ачтелик, Л. Дубикайтис, Э. Дудек и Я. Конёр не полностью решили эту проблему заменой части аксиом 10)–22), то есть аксиом, содержащих $\neg$, на другие негативные аксиомы и показали, что в их аксиоматизации $\mathbf{D_2}$

каждая негативная аксиома является *независимой* [3, Теорема 2]. (Подмножество X множества всех аксиом данной аксиоматической теории называется *независимым*, если какая-нибудь формула из X не может быть выведена с помощью правил вывода из аксиом, не входящих в X [2].) Таким образом, остаётся нерешённой проблема независимости аксиом 1)–9), то есть аксиом, не содержащих $\neg$. Давно известно, что данные аксиомы взаимно независимы [11], однако специфика $\mathbf{D_2}$ состоит в том, что при наличии негативных аксиом некоторые из них перестают быть независимыми. В докладе планируется обсудить способы решения этой проблемы, а также возможность построения (автоматической) процедуры поиска $\mathbf{D_2}$-вывода.

Благодарности В.О. Шангин поддержан РФФИ, грант 20-011-00698 А.

Список литературы

[1] Ивлев Ю.В., *Модальная логика*, Издательство Московского университета, Москва, 1991, 222 с.

[2] Мендельсон Э., *Введение в математическую логику*, «Наука», Москва, 1976, 320 с.

[3] Achtelik, G., Dubikajtis, L., Dudek, E., Kanior, J., “On independence of axioms in Jaśkowski discussive propositional calculus”, *Reports on Mathematical Logic*, **11** (1981), 3–11

[4] da Costa N.C.A., Dubikajtis, L., “On Jaśkowski's discussive logic”, *Non-classical logics, model theory and computability*, 1977, 37–56

[5] Garson J.W., *Modal logic for philosophers*, Cambridge University Press, 2006, 506 c.

[6] Jaśkowski S., “A propositional calculus for inconsistent deductive systems”, *Logic and Logical Philosophy*, **7** (1999), 35–56

[7] Jaśkowski S., “On the discussive conjunction in the propositional calculus for inconsistent deductive systems”, *Logic and Logical Philosophy*, **7** (1999), 57–59

[8] Kotas J., “The axiomatization of S. Jaśkowski's discussive system”, *Studia Logica*, **33**:2 (1974), 195–200

[9] Omori H., Alama J., “Axiomatizing Jaśkowski's discussive logic D_2”, *Studia Logica*, **106** (2018), 1163–1180

[10] Perzanowski J., “On M-fragments and L-fragments of normal modal propositional calculi”, *Reports on Mathematical Logic*, **5** (1975), 63–72

[11] Robinson T.T., “Independence of two nice sets of axioms for the propositional calculus”, *Journal of Symbolic Logic*, **33**:2 (1968), 265–270

Knowledge representation in S. Jaśkowski's discussive logic

Jukiewicz M., Shangin V.

In the paper, one analyzes knowledge representation in S. Jaśkowski's discussive (discursive) logic $\mathbf{D_2}$ which is one of the pioneering paraconsistent logics. One shows an opportunity to simplify its axiomatization and suggests some decision of the axioms' independence problem.

Keywords: discussive logic, discursive logic, paraconsistent logic, knowledge representation.

References

[1] Ivlev Yu.V., *Modal logic*, MSU Publishers, Moscow, 1991 (In Russian), 222 c.

[2] Mendelson E., *Introduction to mathematical logic*, Nauka Publishers, Moscow, 1976 (In Russian), 320 c.

[3] Achtelik, G., Dubikajtis, L., Dudek, E., Kanior, J., "On independence of axioms in Jaśkowski discussive propositional calculus", *Reports on Mathematical Logic*, **11** (1981), 3–11

[4] da Costa N.C.A., Dubikajtis, L., "On Jaśkowski's discussive logic", *Non-classical logics, model theory and computability*, 1977, 37–56

[5] Garson J.W., *Modal logic for philosophers*, Cambridge University Press, 2006, 506 c.

[6] Jaśkowski S., "A propositional calculus for inconsistent deductive systems", *Logic and Logical Philosophy*, **7** (1999), 35–56

[7] Jaśkowski S., "On the discussive conjunction in the propositional calculus for inconsistent deductive systems", *Logic and Logical Philosophy*, **7** (1999), 57–59

[8] Kotas J., "The axiomatization of S. Jaśkowski's discussive system", *Studia Logica*, **33**:2 (1974), 195–200

[9] Omori H., Alama J., "Axiomatizing Jaśkowski's discussive logic D_2", *Studia Logica*, **106** (2018), 1163–1180

[10] Perzanowski J., "On M-fragments and L-fragments of normal modal propositional calculi", *Reports on Mathematical Logic*, **5** (1975), 63–72

[11] Robinson T.T., "Independence of two nice sets of axioms for the propositional calculus", *Journal of Symbolic Logic*, **33**:2 (1968), 265–270