

Использование разреженной структуры матриц Якоби и Гессе для ускорения численного решения задач оптимального планирования траекторий

Д. В. Злобин¹

В данной работе рассматриваются задачи нелинейного программирования, в которых целевой функционал и функции ограничений заданы относительно небольшими выражениями, содержащими переменные с индексами.

За счет анализа зависимости выражений задачи от индексов может быть получена структура разреженных матрицы Якоби ограничений и матрицы Гессе лагранжиана задачи. Это позволяет выписать общие формулы для расчета их ненулевых элементов, использование которых приводит к эффективному применению численного метода для решения задачи нелинейного программирования.

Ключевые слова: планирование траекторий, нелинейное программирование, разреженные матрицы Якоби и Гессе, IpOpt, SymPy

Один из способов планирования траекторий движения шагающих роботов — это сведение задачи оптимального управления к гладкой задаче нелинейного программирования (НЛП) большой размерности [1]. Матрица Якоби для ограничений и матрица Гессе для лагранжиана этой задачи являются сильно разреженными.

Локальные решения такого рода задач могут быть найдены численно. Один из распространенных методов для этого — метод внутренней точки [2]. В нем используются следующие специфичные для конкретной задачи функции:

- целевой функционал задачи и его градиент,
- функции ограничений и матрица Якоби для них,
- матрица Гессе для лагранжиана задачи.

¹Злобин Дмитрий Васильевич — аспирант каф. нелинейных динамических систем и процессов управления ф-та ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: dimz94@mail.ru.

Zlobin Dmitry Vasilevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of Nonlinear Dynamic Systems and Control Processes.

Так как матрицы Якоби и Гессе сильно разреженные, то достаточно вычисления их ненулевых элементов. Сходимость численного метода и скорость поиска решения зависят от точности и эффективности реализации этих функций. Выигрыш в скорости можно получить за счет:

- быстрого вычисления производных,
- уменьшения количества нулевых элементов матриц Якоби и Гессе, которые явно рассчитываются при вычислении этих матриц.

Общий подход для расчета элементов матриц Якоби и Гессе состоит в использовании метода автоматического (алгоритмического) дифференцирования [3]. Однако он не позволяет полностью исключить вычисление тех элементов, которые заведомо равны нулю.

Другой подход — это детальный анализ структуры матриц Якоби и Гессе для конкретной задачи или класса задач, что позволяет добиться выигрыша в скорости [4, 5, 6]. В основном исследуется структура матрицы Якоби, анализ матрицы Гессе для лагранжиана проводится реже в виду большей сложности.

В данной работе анализируется структура матриц Якоби и Гессе для задач НЛП, возникающих при планировании траекторий движения шагающих роботов. Их особенностью является использование относительно небольших выражений, в которые входят переменные с индексами. Именно индексы обуславливают большую размерность этих задач и их разреженную структуру. Переменные с индексами появляются при дискретизации функций времени исходной задачи оптимального управления.

Анализ зависимости выражений задачи от индексов позволяет разбить матрицы Якоби и Гессе на блоки прямоугольной и диагональной формы, содержащие только ненулевые элементы. Значения этих элементов могут быть вычислены по общей для блока формуле, зависящей от индексов.

Эта идея была реализована в программном пакете `sympy2ipropt`. Он написан на языке Python с использованием библиотеки для символьных вычислений `SymPy` [7]. Пакет `sympy2ipropt` позволяет:

- описать задачу НЛП при помощи символьных выражений `SymPy`,
- получить выражения для элементов градиента целевого функционала методом символьного дифференцирования,
- разбить матрицы Якоби и Гессе на блоки из ненулевых элементов и получить для каждого блока общие формулы расчета элементов методом символьного дифференцирования,

- сгенерировать интерфейсные функции на языке C++ для решателя IpOpt (реализация метода внутренней точки). Генерируется эффективный код относительно небольшой длины, использующий только циклы, условия и математические функции.

Исходный код пакета `sympy2ipopt` доступен в репозитории по адресу <https://github.com/zlobin-d/sympy2ipopt>.

Работа поддержана проектом РФФИ № 19-07-01226 А

Список литературы

- [1] Alexander W. Winkler, Dario C. Bellicoso, Marco Hutter, Jonas Buchli, “Gait and Trajectory Optimization for Legged Systems through Phase-based End-Effector Parameterization”, *IEEE Robotics and Automation Letters (RA-L)*, **3** (July 2018), 1560-1567.
- [2] A. Wächter, L. T. Biegler, “On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Filter Line Search Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming”, *Mathematical Programming*, **106**:1 (2006), 25–57.
- [3] Joel A E Andersson, Joris Gillis, Greg Horn, James B Rawlings, Moritz Diehl, “CasADi – A software framework for nonlinear optimization and optimal control”, *Mathematical Programming Computation*, **11**:1 (2019), 1–36.
- [4] M. Sagliano, S. Theil, “Hybrid Jacobian Computation for Fast Optimal Trajectories Generation”, AIAA Guidance, Navigation, and Control (GNC) Conference (August 19–22, 2013, Boston, MA).
- [5] Ayonga Hereid, Christian Hubicki, Eric Cousineau, Aaron Ames, “Dynamic Humanoid Locomotion: A Scalable Formulation for HZD Gait Optimization”, *IEEE Transactions on Robotics*, **34**:2 (2018), 370–387.
- [6] Daniel Cardona-Ortiz, Alvaro Paz, Gustavo Arechavaleta, “Exploiting sparsity in robot trajectory optimization with direct collocation and geometric algorithms”, IEEE International Conference on Robotics and Automation (31 May – 31 August, 2020, Paris, France), 469–475.
- [7] Aaron Meurer, Christopher P. Smith, Mateusz Paprocki, Ondřej Čertík, “SymPy: symbolic computing in Python”, *PeerJ Computer Science*, **3**:e103 (January 2017).

Exploiting Jacobian and Hessian of the Lagrangian Sparse Structure for Optimal Trajectory Planning Speed Up Zlobin D.V.

This paper deals with nonlinear programming problems, in which the cost function and constraints are relatively small expressions containing variables with indices.

Analysis of problem expressions dependence on indices gives sparsity structure of Jacobian and Hessian of the Lagrangian. This allows to get general formulas for calculating their non-zero elements and leads to effective numerical solving the nonlinear programming problem.

Keywords: trajectory planning, nonlinear programming, sparse Jacobian and Hessian of the Lagrangian, IpOpt, SymPy

References

- [1] Alexander W. Winkler, Dario C. Bellicoso, Marco Hutter, Jonas Buchli, “Gait and Trajectory Optimization for Legged Systems through Phase-based End-Effector Parameterization”, *IEEE Robotics and Automation Letters (RA-L)*, **3** (July 2018), 1560-1567.
- [2] A. Wächter, L. T. Biegler, “On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Filter Line Search Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming”, *Mathematical Programming*, **106**:1 (2006), 25–57.
- [3] Joel A E Andersson, Joris Gillis, Greg Horn, James B Rawlings, Moritz Diehl, “CasADi – A software framework for nonlinear optimization and optimal control”, *Mathematical Programming Computation*, **11**:1 (2019), 1–36.
- [4] M. Sagliano, S. Theil, “Hybrid Jacobian Computation for Fast Optimal Trajectories Generation”, AIAA Guidance, Navigation, and Control (GNC) Conference (August 19–22, 2013, Boston, MA).
- [5] Ayonga Hereid, Christian Hubicki, Eric Cousineau, Aaron Ames, “Dynamic Humanoid Locomotion: A Scalable Formulation for HZD Gait Optimization”, *IEEE Transactions on Robotics*, **34**:2 (2018), 370–387.
- [6] Daniel Cardona-Ortiz, Alvaro Paz, Gustavo Arechavaleta, “Exploiting sparsity in robot trajectory optimization with direct collocation and geometric algorithms”, IEEE International Conference on Robotics and Automation (31 May – 31 August, 2020, Paris, France), 469–475.
- [7] Aaron Meurer, Christopher P. Smith, Mateusz Paprocki, Ondřej Čertík, “SymPy: symbolic computing in Python”, *PeerJ Computer Science*, **3**:e103 (January 2017).