Детские рисунки и их приложения

Е. М. Крейнес[1]

Обсуждается соответствие между детскими рисунками Гротендика и парами Белого на приводимых кривых. Особое внимание будет уделено приложениям.

Ключевые слова: детские рисунки, вложенные графы, пары Белого.

Детским рисунком называется граф Г, вложенный в компактную гладкую ориентированную поверхность M без границы таким образом, что теоретико-множественное дополнение $M \setminus \Gamma$ гомеоморфно несвязному объединению открытых дисков. Это понятие было впервые введено Александром Гротендиком в [8], оттуда же пришло название "детский рисунок". Вдохновленный теоремой Г. Белого [4] Гротендик положил начало систематическому изучению таких графов и их связей с алгебраическими кривыми χ, на которых существует непостоянная мероморфная функция $\beta : \chi \to \mathbb{C}P^1$ с не более чем тремя критическими значениями. Здесь под критическим значением понимается такая точка многообразия $\mathbb{C}P^1$, которая имеет меньше прообразов относительно действия β, чем общая точка. Функции с не более чем тремя критическими значениями называются *функциями Белого*, а пары алгебраическая кривая и функция Белого на ней — *парами Белого*. В работе [14] Воеводским и Шабатом установлена эквивалентность подходящим образом введенных категорий детских рисунков и пар Белого. Выявленные связи объектов столь различной природы приводят к обнаружению новых и нетривиальных взаимосвязей между различными структурами в теории категорий, алгебре, алгебраической геометрии, комплексном анализе, теоретической физике и информатике, см. работы [1, 2, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16] и приведенные в них ссылки. В последнее время обнаружились даже нетривиальные приложения в генетике [3, 5], поскольку оказалось, что рекомбинация кусков ДНК при удвоении моделируется детскими рисунками специального вида и описывается в их терминах.

Основная цель настоящего исследования — ввести детские рисунки и пары Белого на приводимых кривых и изучить связи между ними. В качестве *допустимых* детских рисунков будем рассматривать объединение нескольких детских рисунков, которое либо является несвязным,

[1] *Крейнес Елена Михайловна* — к.ф.-м.н., ст.н.с. каф. теоретической информатики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: elena.kreines@math.msu.ru.

Kreines Elena Mikhailovna — senior scientific researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Informatics.

либо несколько рисунков имеют общую вершину или центр грани, причем дополнение поверхности до графа может являться объединением как открытых дисков, так и наборов открытых дисков, у которых все диски в каждом наборе имеют единственную общую точку. *Допустимые* пары Белого представляют собой пары Белого на полных кривых, возможно, особых и/или приводимых. При этом все значения в особых точках по определению относятся к критическим значениям.

Допустимые детские рисунки и пары Белого возникают естественным образом при решении систем уравнений, определяющих пары Белого, см. [1, 2, 9]. Также они важны для приложений. Целью доклада является аккуратное определение допустимых детских рисунков и изучение соответствия, возникающего между ними и допустимыми парами Белого, аналогичного классическому случаю. Также мы обсудим преимущества использования допустимых детских рисунков в приложениях.

Доклад основан на серии совместных результатов с Н.Я. Амбург и Г.Б. Шабатом.

Список литературы

[1] N. M. Adrianov, Ya N. Amburg, V. A. Dremov, Yu A. Levitskaya, E. M. Kreines, Yu Yu Kochetkov, V. F. Nasretdinova, G. B. Shabat, “Catalog of dessins d’enfants with no more than 4 edges”, *Journal of Mathematical Sciences*, **158**:1 (2009), 22–80.

[2] Н.Я. Амбург, Е.М. Крейнес, Г.Б. Шабат, “Паразитические решения систем уравнений, определяющие функции Белого плоских деревьев”, *Вестник Моск. Университета*, **1** (2004), 20-25.

[3] A. Angeleska, N. Jonoska, M. Saito DNA recombinations through assembly graphs, *Discrete Applied Mathematics*, **157** (2009), 3020–3037.

[4] Г.В. Белый, “О расширениях Галуа максимального кругового поля”, *Изв. Акад. Наук СССР*, **43** (1979), 269-276.

[5] J. Burns, E. Dolzhenko, N. Jonoska, T. Muche, M. Saito, “Four-Regular Graphs with Rigid Vertices Associated to DNA Recombination”, *Discrete Applied Mathematics*, **161** (2013), 1378-1394.

[6] J. Bètrèma, D. Pérè, A. Zvonkin, “Plane Trees and their Shabat Polynomials, Catalog”, *Bordeaux: Rapport Interne de LaBRI*, 1992.

[7] Ph. L. Bowers, K. Stefenson, “Uniformizing dessins and Belyi maps via circle packing”, *Memoirs of the AMS*, **805**:107 (2004).

[8] A. Grothendieck, “Esquisse d’un programme”, *London Math. Soc. Lecture Notes Series*, **242** (1997), 5-48.

[9] E. M. Kreines, “On families of geometric parasitic solutions for Belyi systems of genus zero”, *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, **128**:6 (2005), 3396-3401.

[10] G. A. Jones, D. Singerman, “Belyi functions, hypermaps and Galois groups”, *Bull. London Math. Soc.*, **28** (1996), 561-590.

[11] S. K. Lando, A. K. Zvonkin, *Graphs on surfaces and their applications, with an appendix by D. Zagier.*, Encycl. of Math. Sciences, **141**, Springer, 2004.

[12] P. Lochak, L. Schneps, "Geometric Galois Actions, 1, 2", *London Math. Soc. Lecture Notes Series 242 — 243*, 1997.

[13] L. Schneps (ed.), "The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants", *London Math. Soc. Lecture Notes Series*, **200** (1994).

[14] G. B. Shabat, V. A. Voevodsky, "Drawing curves over number fields. The Grothendieck Festschrift, III", *Progress in Mathematics*, **88** (1990), 199-227.

[15] G. Shabat, A. Zvonkin, "Plane trees and algebraic numbers", *Contemporary Mathematics*, **178** (1994), 233-275.

[16] A. Zvonkin, "How to draw a group?", *Discrete Math.*, **180** (1998 403-413).

Dessins d'enfants and their applications

Kreines E.M.

The correspondence between Grothendieck dessins d'enfants and Belyi pairs on reducible curves is discussed. Much attention is paid for the applications.

Keywords: dessin d'enfants, embedded graphs, Belyi pairs.

References

[1] N. M. Adrianov, Ya N. Amburg, V. A. Dremov, Yu A. Levitskaya, E. M. Kreines, Yu Yu Kochetkov, V. F. Nasretdinova, G. B. Shabat, "Catalog of dessins d'enfants with no more than 4 edges", *Journal of Mathematical Sciences*, **158**:1 (2009), 22–80.

[2] N. Ya. Amburg, E. M. Kreines, G. B. Shabat, "Parasitical solutions of systems of equations determining Belyi pairs for plane trees", *Vestnik Mosk. Universiteta*, **1** (2004), 20-25 (in Russian).

[3] A. Angeleska, N. Jonoska, M. Saito DNA recombinations through assembly graphs, *Discrete Applied Mathematics*, **157** (2009), 3020–3037.

[4] G. V. Belyi, "On Galois extensions of a maximal cyclotomic field", *Izv. Akad. Nauk SSSR*, **43** (1979), 269-276 (in Russian).

[5] J. Burns, E. Dolzhenko, N. Jonoska, T. Muche, M. Saito, "Four-Regular Graphs with Rigid Vertices Associated to DNA Recombination", *Discrete Applied Mathematics*, **161** (2013), 1378-1394.

[6] J. Bètrèma, D. Pérè, A. Zvonkin, "Plane Trees and their Shabat Polynomials, Catalog", *Bordeaux: Rapport Interne de LaBRI*, 1992.

[7] Ph. L. Bowers, K. Stefenson, "Uniformizing dessins and Belyi maps via circle packing", *Memoirs of the AMS*, **805**:107 (2004).

[8] A. Grothendieck, "Esquisse d'un programme", *London Math. Soc. Lecture Notes Series*, **242** (1997), 5-48.

[9] E. M. Kreines, "On families of geometric parasitic solutions for Belyi systems of genus zero", *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, **128**:6 (2005), 3396-3401.

[10] G. A. Jones, D. Singerman, "Belyi functions, hypermaps and Galois groups", *Bull. London Math. Soc.*, **28** (1996), 561-590.

[11] S. K. Lando, A. K. Zvonkin, *Graphs on surfaces and their applications, with an appendix by D. Zagier.*, Encycl. of Math. Sciences, **141**, Springer, 2004.

[12] P. Lochak, L. Schneps, “Geometric Galois Actions, 1, 2”, *London Math. Soc. Lecture Notes Series 242 — 243*, 1997.

[13] L. Schneps (ed.), “The Grothendieck Theory of Dessins d’Enfants”, *London Math. Soc. Lecture Notes Series*, **200** (1994).

[14] G. B. Shabat, V. A. Voevodsky, “Drawing curves over number fields. The Grothendieck Festschrift, III”, *Progress in Mathematics*, **88** (1990), 199-227.

[15] G. Shabat, A. Zvonkin, “Plane trees and algebraic numbers”, *Contemporary Mathematics*, **178** (1994), 233-275.

[16] A. Zvonkin, “How to draw a group?”, *Discrete Math.*, **180** (1998 403-413).