

Верхние оценки переключательной мощности плоских схем, реализующих автономные автоматные функции

А. С. Воротников¹

В работе получена верхняя оценка переключательной мощности реализации периодической последовательности автономной автоматной схемой. Приводится схема, реализующая произвольную наперёд заданную последовательность длины 2^n для натуральных n с переключательной мощностью не более $\frac{2^{n/2}}{n}$.

Ключевые слова: плоские схемы, переключательная мощность, верхние оценки, функция Шеннона.

Впервые понятие схемы из клеточных элементов, далее так же называемой плоской схемой, было введено в работе Кравцова С.С. [1]. В работах [2, 3] Г. В. Калачев показал, что порядок потенциала и переключательной мощности плоской схемы, реализующей булеву функцию от n переменных, составляет $2^{n/2}$.

Вводимое определение несколько расширяет определение *плоской схемы*, введённое в работе [2]. Определения *сети из клеточных элементов*, *графа корректной сети из клеточных элементов*, *входов (выходов)*, *узлов*, *подсхемы* так же присутствуют в указанной работе.

Клеточным элементом будем называть автомат с не более чем двумя состояниями, у которого в сумме не более четырёх входов и выходов, причём каждому его входу и каждому выходу сопоставлена некоторая метка из множества $\{l, r, t, b\}$, причём метки не повторяются.

Клеточный элемент будем изображать в виде единичного квадрата на плоскости.

Метки, присвоенные входам (выходам) автомата будем называть входами (выходами) элемента.

Описывать элемент с одним состоянием будем уравнениями, которые задают его оператор, заменяя все переменные в них на сопоставленные им метки (l, r, t или b). Тогда в левой части каждого уравнения будет стоять выходная метка, а в правую будут входить только входные метки. На рисунке 1 приведены примеры клеточных элементов.

Всюду далее значок $:=$ будет обозначать «по определению равно».

¹Воротников Алексей Сергеевич — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vorotnikov.lexa@yandex.ru.

Vorotnikov Alexey Sergeevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

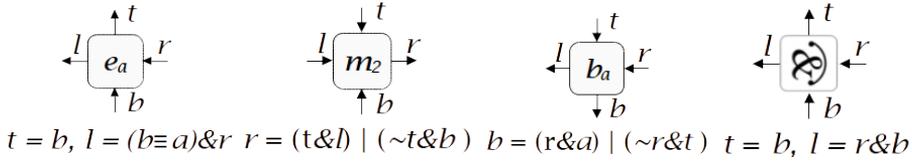


Рис. 1. Примеры логических элементов.

Далее везде используется базис \mathcal{B} , состоящий из всех элементов с одним состоянием и множества элементов с двумя состояниями $\{(E, E, E, \phi, \psi_1), (E, E, E^2, \phi, \psi_2), (E, E, E^3, \phi, \psi_3)\}$, где $E = \{0, 1\}$,

$$\begin{cases} \varphi(1) = 0, \\ \varphi(t+1) = a(t). \end{cases}$$

$$\psi_1(t) = q(t), \quad \psi_2(t) = (q(t), q(t)), \quad \psi_3(t) = (q(t), q(t), q(t)),$$

где $a(t)$ — входной сигнал в момент времени t , $q(t)$ — состояние автомата в момент времени t . Будем называть такие элементы *задержками*.

Плоской автоматной схемой на множестве $M \subset \mathbb{Z}^2$ над базисом $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ будем называть корректную сеть из клеточных элементов, в графе которой все ориентированные циклы содержат хотя бы одну задержку. Множество M будем называть *носителем* схемы K .

Каждой плоской схеме K можно сопоставить структурный автомат $Circ(K)$ следующим образом:

- 1) каждой функции $f_{s,i}$, которую реализует i -й выход элемента s клеточной схемы, сопоставим функциональный элемент $e_{s,i}$, реализующий $f_{s,i}$; если i -й и j -й выходы являются выходами одной и той же функции, то им будет соответствовать один и тот же функциональный элемент;
- 2) если i -й выход s_1 подключен к j -му входу s_2 , то соединим выход элемента $e_{s_1,i}$ с j -ми входами элементов $e_{s_2,k}$ для всех k , для которых $f_{s_2,k}$ зависит от j -го аргумента;
- 3) удалим из схемы все тождественные функции, подсоединив их вход ко всем их выходам;
- 4) аналогично поступаем с задержками.

Сопоставление корректно, так как правила сопоставления вкладываются в правила индуктивного построения структурных автоматов [4]. Правило обратной связи, требующее зависимость со сдвигом от замыкаемой

переменной, так же выполнено в силу наличия задержки в каждом ориентированном цикле. Поскольку только ориентированные циклы могут породить обратную связь, всё верно.

Будем говорить, что схема K реализует автомат A_K , если схема из автоматных элементов $Circ(K)$ реализует A_K .

Далее рассматриваем только плоские автоматные схемы без входов с единственным выходом — автономные автоматные схемы.

Рассмотрим плоскую автоматную схему K , реализующую периодическую последовательность длины $l \in \mathbb{N}$. Последовательность, реализуемую схемой K обозначим α_K . Для каждой такой схемы K зафиксируем некоторую нумерацию её узлов. На i -м узле реализуется некоторая автоматная функция g_i .

Состоянием схемы K на такте t назовём вектор $s_K(t) := (g_1(t), \dots, g_h(t))$.

Величину $c_K(t) := |s_K(t) \oplus s_K(t+1)|$ назовём *затратой энергии на переключение схемы* с такта t на $t+1$. Длина вектора понимается как сумма целых чисел его компонент: $a = (a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$, $|a| = \sum_{i=1}^n a_i$.

Схема K *функционирует циклически* с периодом l , если последовательность на её выходе имеет период l .

Переключательной мощностью схемы K , функционирующей циклически с периодом l , назовём $W(K) = \frac{1}{l} \sum_{t=0}^{l-1} c_K(t)$.

Переключательной мощностью последовательности α назовём величину $W(\alpha) = \min_{\alpha_K = \alpha} W(K)$.

Функцией Шеннона для переключательной мощности последовательностей из класса $\{0, 1\}^l$ назовём $W(l) = \max_{\alpha \in \{0, 1\}^l} W(\alpha)$.

Теорема 1. Для произвольного $k \in [\frac{n}{4} + \frac{1}{2} \log_2 n, \frac{n}{2} - \log_2 n] \cap \mathbb{N}$ верно

$$W(2^n) \lesssim \begin{cases} 50 \frac{2^{n/2}}{n}, & \text{если } k = \frac{n}{4} + \frac{1}{2} \log_2 n, \\ 12 \frac{2^{n/2}}{k}, & \text{если } k \in (\frac{n}{4} + \frac{1}{2} \log_2 n, \frac{n}{2} - \log_2 n), \text{ при } n \rightarrow \infty \\ 36 \frac{2^{n/2}}{n}, & \text{если } k = \frac{n}{2} - \log_2 n, \end{cases}$$

причём существует реализация плоской автоматной схемы, требующая не более $n + k + \log_2 k$ задержек.

В работе приводятся схемы, удовлетворяющие таким условиям. При построении схем активно применялись идеи, возникавшие ранее в работах Г. В. Калачёва [2].

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н. профессору Э. Э. Гасанову за научное руководство и помощь в работе, а также к.ф.-м.н., м.н.с. Г. В. Калачёву и А. А. Ефимову за ценные замечания и предложения по тексту работы.

Список литературы

- [1] Кравцов С. С., “О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов”, *Проблемы кибернетики*, **19** (1967), 285–293.
- [2] Г. В. Калачев, “Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции”, *Дискрет. матем.*, **26**:1 (2014), 49–74.
- [3] Г. В. Калачев, “Нижние оценки мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **18**:2 (2014), 279–322.
- [4] Кудрявцев В. Б., Гасанов Э. Э., Подколзин А. С., *Теория интеллектуальных систем: в 4 кн. Книга четвертая. Теория автоматов.*, Издательские решения, Москва, 2018, ISBN: 978-5-4493-5160-9.

Upper bounds of plane circuits implemented autonomous automaton functions switchable power

Vorotnikov A. S.

Switchable power of flat automatic schema without inputs implementation by periodical sequence is recieved in this work. A scheme is given that implements arbitrary pre-defined sequence of length 2^n for positive integer n with switchable power no more than $\frac{2^{n/2}}{n}$.

Keywords: plain circuits, switchable power, upper bounds, Shannon function.

References

- [1] Kravtsov S. S., “About implementation functions of the logic algebras in one class of circuits consisting of functional and commutational elements”, *Cybernetics problems*, **19** (1967), 285–293.
- [2] G. V. Kalachev, “Plain circuit implemented boolean functions power by the order”, *Discrete Math*, **26**:1 (2014), 49–74.
- [3] G. V. Kalachev, “Lower bounds of the plain circuits implemented partial boolean operators power”, *Intelligent systems*, **18**:2 (2014), 279–322.
- [4] Kudryavtsev V.B., Alyoshin S.V., Podkolzin A.S., *Introduction to automata theory*, 2, Moscow university, Moscow, 2019, ISBN: 978-5-19-011370-9.