Поиск ближайшего соседа на плоскости с помощью клеточного автомата с локаторами

Д. И. Васильев[1]

В данной статье описывается клеточный автомат с локаторами, решающий задачу поиска ближайшего соседа. Задача заключается в том, чтобы из конечного множества точек выделить одну, самую близкую к заранее определенной "центральной" точке. В отличие от классической модели клеточного автомата, в рассматриваемой модели допускается мгновенная передача сигналов через эфир на произвольное расстояние. Показано, что такая возможность позволяет решить задачу за константное время, что в корне отличается от одномерного случая, где получена логарифмическая по искомому расстоянию нижняя оценка сложности.

Ключевые слова: клеточные автоматы с локаторами, однородные структуры, поиск ближайшей точки.

Клеточным автоматом с локаторами на $\mathbb{Z}^n$ называется восьмерка $\sigma = (\mathbb{Z}^n, E_n, V, E_q, +, L, \varphi, \psi)$, где $\mathbb{Z}^n$ — множество целочисленных векторов размерности n, $E_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $V = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1})$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}^n$, $E_q = \{0, 1, \ldots, q-1\}$, $+$ — коммутативная полугрупповая операция, заданная на E_q, $L = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ — упорядоченный набор попарно различных телесных углов в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат, φ — функция, зависящая от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}, z_1, \ldots, z_m$, $\varphi : E_n^h \times E_q^m \to E_n$, $\varphi(0, \ldots, 0) = 0$, ψ — функция, зависящая от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}, z_1, \ldots, z_m$, $\psi : E_n^h \times E_q^m \to E_q$. Элементы множества $\mathbb{Z}^n$ называются *ячейками* клеточного автомата σ; элементы множества E_n называются *состояниями ячейки* клеточного автомата σ; набор V называется *шаблоном соседства* клеточного автомата σ; элементы множества E_q называются *сигналами вещания*; набор L называется *шаблон локаторов* клеточного автомата σ; функция φ называется *локальной функцией переходов* автомата σ; функция ψ называется *функцией вещания* автомата σ; переменные $x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}$ принимают значения из E_n, переменные $z_1, \ldots, z_m$ принимают значения из E_q. Состояние 0 интерпретируется как *состояние покоя*, а условие $\varphi(0, \ldots, 0) = 0$ — как условие сохранения состояния покоя.

[1] *Васильев Денис Игоревич* — м.н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: denis.vasilev.igor@gmail.com.

Vasilev Denis Igorevich —Junior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Данное определение было введено Гасановым Э.Э. [1] и усовершенствовано Калачевым Г.В. [2].

Сформулируем задачу поиска ближайшего соседа. Пусть на пространстве $\mathbb{Z}^n$ задано начальное состояние I клеточного автомата, удовлетворяющее следующим критериям: a) Любой ячейке присвоено одно из трех состояний $\{q_S; q_{C_0}, *\}$; b) Есть лишь одна ячейка, которой присвоено состояние q_{C_0}; c) Есть лишь конечное и непустое множество ячеек, которым присвоено состояние q_S. Решением задачи поиска ближайшего соседа, соответствующей начальному состоянию I назовем состояние автомата, удовлетворяющее следующим критериям: a) Ячейке, которой в I было присвоено состояние q_{C_0} присвоено состояние q_{CF};b) Ближайшей к ячейке в состоянии q_{CF} ячейке из тех, которым в I было присвоено состояние q_S, присвоено состояние q_{SF}. Если таких ячеек несколько, то одной (произвольной) из них присваивается состояние q_{SF}, а остальным - $*$; c) Остальные ячейки находятся в состоянии $*$.

Определим, что клеточный автомат с локаторами σ решает задачу поиска ближайшего соседа, если его начальное состояние удовлетворяет условиям, описанным выше, и его финальное состояние существует и соответствует решению задачи поиска ближайшего соседа для его начального состояния. При этом такой автомат, перейдя в состояние, соответствующее решению какой-либо задачи поиска ближайшего соседа должен в нем оставаться во всех дальнейших тактах.

В статье [3] для одномерного случая была доказана теорема:

Теорема 1. *Существует клеточный автомат σ с 25 состояниями и с мощностью алфавита вещания 12, который решает задачу поиска ближайшего соседа за время, не превосходящее $\log_2 s+7$, где s — расстояние от центральной ячейки с начальным состоянием q_{C_0} до её ближайшего соседа с начальным состоянием q_S.*

В редакцию журнала Вестник МГУ была отправлена статья с аналогичной нижней оценкой:

Теорема 2. *Для любого клеточного автомата с локаторами σ с мощностью алфавита вещания M и любого общего положения задачи поиска ближайшего соседа I выполнено $T_I^\sigma > \log_M(\frac{s}{5})$, где s - расстояние от ячейки в состоянии q_{C_0} до ближайшей ячейки в состоянии q_S в задаче I, а T_I^σ - количество тактов, за которое автомат σ решает задачу I.*

Таким образом, для одномерного случая задачи поиска ближайшего соседа получен порядок сложности задачи.

Оказалось, что для размерности $n \geq 2$ аналогичные оценки неверны, поскольку для таких задач удалось построить автомат с локаторами, решающий их за константное время. Приведем пример такого автомата для случая $n = 2$:

Теорема 3. *Существует клеточный автомат σ с* 15 *состояниями и с мощностью алфавита вещания* 40, *который решает двумерную задачу поиска ближайшего соседа за время, не превосходящее* 13.

Рассмотрим клеточный автомат с локаторами σ с набором локаторов, состоящем из локаторов из Рис. 1 и одного развернутого локатора, который считывает сумму сигналов всех ячеек клеточного пространства. Определим алфавит вещания как некоторое подмножество $\{0; 1\}^{20}$ и полугрупповую операцию покомпонентного максимума на нем. Для удобства будем обозначать сигналы ячеек одним или несколькими числами - номерами ненулевых позиций в эфирном сигнале. Так сигнал $(0, 1, 0, 1, 0, ..., 0, 0, 0)$ будем записывать как пару сигналов 2 и 4.

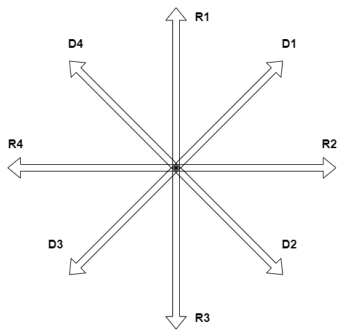

Рис. 1. Расположение и названия локаторов

Зададим на клеточном пространстве систему координат с центром в центральной ячейке. Центральная ячейка в построенном автомате постоянно отправляет в эфир сигнал 1. Ячейки, получивший такой сигнал с локатора $R3$ поймут, что находятся на верхней координатной полуоси. Аналогичным образом каждая ячейка может идентифицировать свое нахождение на остальных трех координатных полуосях. Ячейки, находящиеся на полуосях постоянно отправляют в эфир сигнал с номером своей полуоси (верхняя — 2, правая — 3, нижняя — 4 и левая — 5). По этим сигналам каждая ячейка может распознать, в какой координатной четверти она находится. Например, получив сигнал 2 с локатора $R4$ и сигнал 3 с локатора $R3$, можно однозначно определить, что рассматриваемая ячейка находится в первой координатной четверти. Идея функционирования построенного автомата состоит в том, чтобы спроецировать вдоль манхэттенской окружности все точки из задачи на одну полуось, найти ближайшую к центру проекцию, а затем восстановить её прообраз. Например, точка из первой четверти может послать специальный сигнал, считываемый только правой полуосью. Точка из правой полуоси, получив такой сигнал с локатора $D4$ поймет, что является проекцией одной из точек задачи (Рис. 2 слева). Повторив такую итерацию 4 раза, можно спроецировать все точки на верхнюю полуось (Рис. 2 справа).

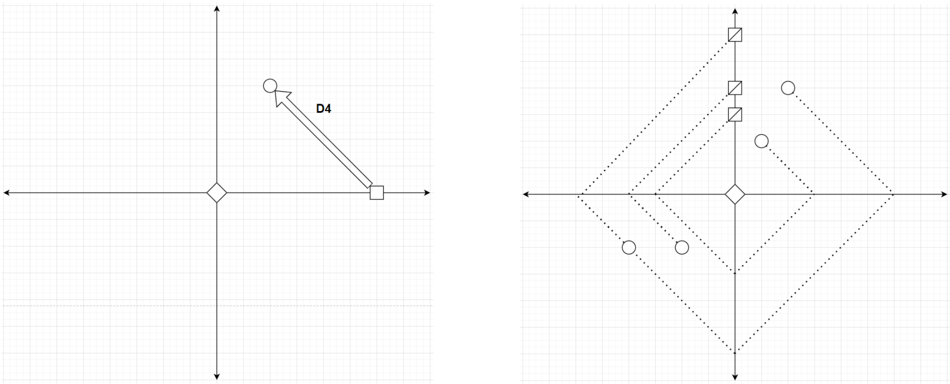

Рис. 2. Слева пример проецирования одной точки на полуось. Справа ход проецирования задачи на верхнюю полуось.

Чтобы найти ближайшего соседа на верхней полуоси, каждому кандидату достаточно послать в эфир специальный сигнал, и получив такой сигнал с локатора $R3$ самоустраниться (т.е. перейти в состояние по умолчанию). После того, как ближайшая проекция найдена, достаточно обратным ходом описанного алгоритма восстановить её прообраз.

Список литературы

[1] Гасанов Э.Э., “Клеточные автоматы с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **20**:2 (2020), 121–133.

[2] Калачев Г.В., “Замечания к определению клеточного автомата с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:4 (2020), 47–57.

[3] Васильев Д.И., “Поиск ближайшего соседа на прямой с помощью клеточного автомата с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:3 (2020), 99–120.

The closest neighbour problem on a plane solution using the cellular automata with locators model

Vasilev D.I.

This paper describes a cellular automaton with locators which solves the closest neighbor search problem. The problem itself is about finding the closest point from a given finite set to the so-called central cell. Unlike the classic cellular automaton model, cellular automata with locators allow fast signal transmission to any distance. It is proven

that such a possibility allows us to solve the problem in a constant time which is fundamentally different from the one dimensional case: the lower complexity estimate for this case is proven to be logarithmic.

Keywords: cellular automaton with locators, homogeneous structures, the closest neighbour search.

References

[1] Gasanov E.E., “Cellular automata with locators”, *Intelligent systems*, **20**:2 (2020), 121–133.

[2] Kalachev G.V., “Remarks on the definition of a cellular automaton with locators”, *Intelligent systems*, **24**:4 (2020), 47–57.

[3] Vasilev D.I., “The closest neighbour problem solution using the cellular automata with locators model”, *Intelligent systems*, **24**:3 (2020), 99–120.