

Construction of a hyperplane arrangement with a specific set of simple paths in a graph and its properties

А. И. Болотников¹

С помощью характеристического многочлена пучка гиперплоскостей можно посчитать количество регионов пучка. Это позволяет использовать пучки гиперплоскостей в решении сложных комбинаторных задач.

В работе изучается пучок гиперплоскостей, построенный по подмножеству множества всех простых путей графа. Полученные результаты связывают этот пучок с задачей о нахождении паросочетания с наибольшим весом в графе, а также позволяют найти характеристический многочлен построенного пучка для некоторых графов.

Ключевые слова: пучок гиперплоскостей, графический пучок, задача о максимальном паросочетании.

1. Введение

В работе [1] был получен результат, позволяющий найти количество регионов пучка гиперплоскостей с помощью его характеристического многочлена. Этот результат позволяет использовать пучки гиперплоскостей в комбинаторике. Например, с их использованием было подсчитано количество пороговых функций [2].

В работе [3] по множеству всех ребер графа был построен пучок, названный графическим, и были доказаны его свойства. В частности, было доказано, что характеристический многочлен графического пучка равен хроматическому многочлену графа, а количество регионов графического пучка равно количеству ациклических ориентаций в графе.

В данной работе строится пучок по подмножеству множества всех простых путей графа. Показана связь пучка с задачей о максимальном паросочетании и изучена возможность наличия одинаковых пучков у неизоморфных графов. Также получены значения характеристического многочлена пучка для некоторых графов.

При получении результатов использовались определения и теоремы о пучках гиперплоскостей, взятые из [4].

¹*Болотников Алексей Игоревич* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: bolotnikov-94@mail.ru.

Bolotnikov Aleksey Igorevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

2. Основные понятия и результаты

Пучок гиперплоскостей - конечное множество гиперплоскостей в некотором векторном пространстве. *Регион* пучка - связная компонента дополнения к объединению гиперплоскостей пучка. *Ранг* пучка - размерность линейного пространства, натянутого на вектора нормалей к гиперплоскостям пучка.

Для произвольного пучка гиперплоскостей A следующим образом определяется частично упорядоченное множество $L(A)$: элементы $L(A)$ - всевозможные непустые пересечения гиперплоскостей пучка, частичный порядок \leq таков: $x \leq y \Leftrightarrow x \supseteq y$.

Функция Мёбиуса частично упорядоченного множества P определяется так:

$$1) \mu(x, x) = 1 \quad \forall x \in P$$

$$2) \mu(x, y) = - \sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) \quad \forall x < y \in P$$

Функция Мёбиуса от одного элемента $\mu(x) = \mu(\hat{0}, x)$, где $\hat{0}$ - наименьший элемент частично упорядоченного множества, т.е. элемент, меньший любого другого элемента частично упорядоченного множества.

Характеристический многочлен пучка A определяется следующей формулой:

$$\chi_A(t) = \sum_{x \in L(A)} \mu(x) t^{\dim(x)}$$

Пусть $G(V, E)$, $|E|=n$ - граф без петель и кратных ребер. Рассмотрим в пространстве R^n следующие гиперплоскости: для любой последовательности ребер $(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$, образующей простой незамкнутый путь или простой цикл четной длины в графе G , берем гиперплоскость $x_1 - x_2 + x_3 - \dots x_n = 0$. Все такие гиперплоскости образуют некоторый пучок. Данный пучок будет далее обозначаться $PA(G)$.

Для пучка $PA(G)$ получены следующие результаты:

Утверждение 1. Пусть $G(V, E)$, $|E|=n$ - граф без петель и кратных ребер. Выберем произвольный регион пучка $PA(G)$ и выберем два вектора из этого региона. Для каждого вектора рассмотрим задачу о максимальном паросочетании в графе G с этим вектором в качестве вектора весов на ребрах. Утверждается, что эти две задачи имеют одно и то же решение, т.е. для обоих векторов одно и то же паросочетание будет иметь наибольший вес.

Утверждение 2. Пусть G_1, G_2 -графы без петель, кратных ребер и изолированных вершин, и $PA(G_1) = PA(G_2)$ Тогда G_1 и G_2 изоморф-

ны, за исключением случая, когда один из графов содержит компоненту связности, изоморфную K_3 , а другой - компоненту, изоморфную $K_{1,3}$.

Утверждение 3. Пусть G - граф без петель, кратных ребер и изолированных вершин, G_1, G_2, \dots, G_k - его компоненты связности.

Тогда $\chi_{PA(G)}(t) = \chi_{PA(G_1)} \cdot \chi_{PA(G_2)} \cdot \dots \cdot \chi_{PA(G_k)}$

Утверждение 4. Пусть G - дерево.

Тогда $\chi_{PA(G)}(t) = (t-1)(t-2)\dots(t-n)$

Утверждение 5. Пусть G_1, G_2 - графы без петель и кратных ребер, причем существуют подграфы $H_1 \subset G_1, T_1 \subset G_1, H_2 \subset G_2, T_2 \subset G_2$ такие, что:

- 1) $G_1 = H_1 \cup T_1, G_2 = H_2 \cup T_2$
- 2) $H_1 \cap T_1 = \{u\}, H_2 \cap T_2 = \{v\}$, где u - вершина в G_1 , v - вершина в G_2
- 3) существует изоморфизм из H_1 в H_2 , переводящий u в v
- 4) T_1 и T_2 - деревья с одинаковым ненулевым количеством ребер

Тогда $\chi_{PA(G_1)} = \chi_{PA(G_2)}$

Утверждение 6. Пусть G_1 - граф из утверждения 5, в котором $H_1 = K_3$.

Тогда

$$\chi_{PA(G_1)} = (t-1)(t-3)(t-4)\dots(t-(n-2))(t-(n-1))(t-(n-1))(t-n),$$

где n - количество ребер в графе G_1

Утверждение 7 Пусть G - граф, состоящий из одного простого цикла, n - количество ребер в G .

Тогда

- 1) $\chi_{PA(G)} = (t-1)(t-n)^{n-1}$, если n - четное,
- 2) $\chi_{PA(G)} = (t-1)(t-3)(t-5)\dots(t-(2k-1))\dots(t-(2n-3))(t-(n-1))$, если n - нечетное.

Список литературы

- [1] Т. Zaslavsky, "Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes", *Memoirs of the American Mathematical Society*, **1**:154 (1975).
- [2] Ирматов А.А., "Arrangement of Hyperplanes and the Number of Threshold Functions", *Acta Applicandae Mathematicae*, **68**:1 (2001), 211-226.

- [3] C.Green, T. Zaslavsky, “On the interpretation of Whitney numbers through arrangements of hyperplanes, zonotopes, non-radon partitions, and orientations of graphs.”
Transactions of the American Mathematical Society, **280**:1 (1983), 97–126.
- [4] R.P.Stanley, *Enumerative Combinatorics*. V. 1, 2, Cambridge University Press, 2011.

Bolotnikov A.I.

Построение пучка гиперплоскостей по определенному множеству простых путей графа и его свойства

There exists a way to calculate the amount of regions of a hyperplane arrangement using its characteristic polynomial. This allows using hyperplane arrangements in solutions of combinatorial problems.

This paper considers a hyperplane arrangement constructed with a subset of a set of all simple paths in a graph. Results in this paper connect this arrangement to the maximum matching problem and allow to calculate its characteristic polynomial for specific cases of the initial graph.

Keywords: hyperplane arrangement, graphical arrangement, maximum matching problem.

References

- [1] T. Zaslavsky, “Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes”, *Memoirs of the American Mathematical Society*, **1**:154 (1975).
- [2] Irmatov A.A., “Arrangement of Hyperplanes and the Number of Threshold Functions”, *Acta Applicandae Mathematicae*, **68**:1 (2001), 211–226.
- [3] C.Green, T. Zaslavsky, “On the interpretation of Whitney numbers through arrangements of hyperplanes, zonotopes, non-radon partitions, and orientations of graphs.”
Transactions of the American Mathematical Society, **280**:1 (1983), 97–126.
- [4] R.P.Stanley, *Enumerative Combinatorics*. V. 1, 2, Cambridge University Press, 2011.