Об алгебраической теории автоматов

И. Б. Кожухов[1], А. В. Михалев[2]

В работе кратко изложены основные идеи алгебраической теории автоматов и её связь с алгебраической теорией полугрупп. Автомат рассматривается как полигон над полугруппой. Указаны основные направления развития теории полигонов.

Ключевые слова: автомат, полугруппа, полигон над полугруппой, алгебраическая теория автоматов.

В классической теории *автомат Мили* определяется как пятёрка $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ где Q – множество состояний, A и B – входной и выходной алфавиты, $\varphi : Q \times A \to Q$, $\psi : Q \times A \to B$ – функция переходов и функция выходов соответственно. С помощью расширения множества состояний до $Q' = Q \times B$ и замены функции φ функцией $\varphi' : Q' \times A \to Q'$, $\varphi'((q, b), a) = (\varphi(q, a), \psi(q, a))$ мы приходим к *автомату Мура* $V' = (Q', A, \varphi')$ (автомату без выхода). При этом, как нетрудно видеть, автомат V' воспроизводит без искажений работу автомата V. Автомат V' может рассматриваться как *унарная алгебра*, в ней для каждого $a \in A$ отображения $q' \mapsto \varphi'(q', a)$ являются унарными операциями. Отображение $\varphi' : Q' \times A \to Q'$ очевидным образом может быть продолжено до отображения $\delta : Q' \times A^* \to Q'$, где A^* – полугруппа всех слов с буквами из A. Таким образом мы приходим к концепции *действия полугруппы на множестве.*

Полигоном над полугруппой (см. [1]) называется множество X на котором действует полугруппа S т.е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$ такое, что $x(st) = (xs)t$ при всех $x \in X$, $s, t \in S$. Если полугруппа S имеет единицу 1 и $x \cdot 1 = x$ для всех $x \in X$, то полигон X называется унитарным.

В такой общей форме автомат рассматривается в алгебраической теории автоматов. Основы этой теории излагались в ряде статей, учебных пособий и монографий, из которых упомянем работы [2, 3, 4]. Понятие полигона весьма широко, полигоны можно встретить во многих разделах математики. Приведём некоторые примеры. 1. Любая полугруппа S

[1] *Кожухов Игорь Борисович* — д.ф.-м.н., профессор, НИУ МИЭТ, механико-математический факультет МГУ, Моск. Центр ФПМ МГУ, e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru.

Kozhukhov Igor Borisovich — Doctor of Science, professor, NRU MIET, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics.

[2] *Михалев Александр Васильевич* — д.ф.-м.н., профессор, механико-математический факультет МГУ, Моск. Центр ФПМ МГУ, e-mail: anastaciy27@gmail.com.

Mikhalev Alexander Vasilyevich — Doctor of Science, professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics.

является полигоном над собой. 2. Любая алгебра A является полигоном над полугруппой End$A$ эндоморфизмов этой алгебры. 3. Если множество X наделено какой-либо математической структурой, то X можно рассматривать как полигон над полугруппой End$X$ всех отображений $X \to X$, сохраняющих эту структуру (для топологических пространств это непрерывные отображения, для частично упорядоченных множеств — изотонные отображения и т.д.). 4. Правый модуль M над ассоциативным кольцом R является полигоном над мультипликативной полугруппой $(R, \cdot)$ этого кольца. То же для полумодуля над полукольцом. 5. Унар X, т.е. алгебра с одной унарной операцией $f : X \to X$, является полигоном над бесконечной циклической полугруппой $S = \{a, a^2, a^3, ...\}$, достаточно положить $xa = f(a)$ для $x \in X$.

Понятие полигона тождественно понятию представления полугруппы преобразованиями множества. Действительно, обозначим через $T(X)$ множество всех отображений $\alpha : X \to X$, $x \mapsto x\alpha$ с умножением, определённым правилом $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ для $x \in X$. Пусть X — полигон над полугруппой S. Для каждого элемента $a \in S$ обозначим через φ_a отображение $\varphi_a : X \to X, x\varphi_a = xa$. Нетрудно проверить, что отображение $\Phi : S \to T(X), a \mapsto \varphi_a$ является гомоморфизмом полугрупп и называется *представлением полугруппы S преобразованиями множества X*. Ясно, что верно и обратное: если задано представление полугруппы S преобразованиями множества X, то X будет полигоном над S.

Теория полигонов над полугруппами развивалась под большим влиянием теории модулей над кольцами, многие определения и формулировки утверждений теории полигонов взяты из теории колец и модулей, однако, доказательства могут существенно различаться. Например, хорошо известные конструкции инъективной оболочки и проективного накрытия модуля переносится на полигоны (см. [1, §III.1, III.17]). Как и в случае модулей, инъективная оболочка существует у всякого полигона, а проективное накрытие не у всякого. Исследования в теории полигонов осуществлялись в следующих направлениях:

1) структурная теория полигонов;

2) гомологическая теория полигонов и полугрупп;

3) полигоны специального вида;

4) линейные представления полугрупп;

5) полигоны с дополнительной структурой;

6) логические аспекты теории полигонов;

7) обобщения полигонов.

Структурная теория включает описание полигонов над теми или иными классами полугрупп, их подполигонов, конгруэнций, выяснение строения полигонов, удовлетворяющих определённым условиям и т.д. В работе [5] были описаны полигоны над вполне простой полугруппой $M(G, I, \Lambda, P)$ и полигоны с нулём над вполне 0-простой полугруппой $M^0(G, I, \Lambda, P)$ (здесь мы пользуемся матричным представлением таких полугрупп – см. [6, глава 3]). Описание полигонов над вполне (0-)простыми полугруппами позволило решить ряд вопросов для таких полигонов. В частности, были описаны инъективные и проективные полигоны над этими полугруппами.

Гомологическая теория рассматривает категорию Act-S всех полигонов над полугруппой S. Её часто называют гомологической теорией моноидов, так как в большинстве работ на эту тему требуется наличие единицы у полугруппы, а полигоны над ней предполагаются унитарными. Гомологическим вопросам посвящена бóльшая часть монографии [1]. В этой теории осуществляется классификация моноидов по свойствам категории полигонов над ним.

Важную роль в общей алгебре играют конгруэнции. Знание конгруэнций алгебры означает знание всех гомоморфных образов этой алгебры. Конгруэнции полигонов возникают в теории автоматов в связи с распознаваемостью языка автоматом. А именно, пусть A – конечное множество (алфавит), A^* – полугруппа слов, $L \subseteq A^*$– язык. Отношение $\Theta_L = \{(x, y) | \forall z, xz \in L \leftrightarrow yz \in L\}$ называется *синтаксической конгруэнцией.* Оно является конгруэнцией полигона A^* (или, что эквивалентно, правой конгруэнцией полигона A^*). Хорошо известно, что язык L распознаваем некоторым конечным автоматом в том и только том случае, если Θ_L конечного индекса. Более того, это не единственное использование синтаксической конгруэнции в классификации формальных языков.

Полигоны с теми или иными условиями на конгруэнции изучались в ряде работ. В работе [7] условия дистрибутивности и модулярности решётки конгруэнций произвольного полигона сведён к аналогичному вопросу для связного полигона. Дистрибутивные и модулярные полигоны над прямоугольной связкой были описаны в работе [8]. Интересно заметить, что решётка конгруэнций модуля всегда модулярна, тогда как модулярность решётки конгруэнций полигона является редким явлением.

Аналогично теории колец и модулей, в теории полигонов изучаются полигоны с теми или иными условиями конечности – артиновы, нётеровы, конечно порождённые, локально конечные, резидуально конечные, хопфовы и т.д. При этом, скажем, артиновость можно понимать поразному: как отсутствие бесконечных убывающих последовательностей подполигонов и как аналогичное условие на конгруэнции. Нётеровым и артиновым полугруппам, т.е. полугруппам, являющимся нётеровыми или артиновыми полигонами над собой, посвящена работа [9] (правда, в этой работе полигоны левые, а не правые), более свежие результаты о нётеровых полугруппах см. в [10].

Алгебра A называется *хопфовой (кохопфовой)*, если любой её сюръективный (соотв., инъективный) энломорфизм является автоморфизмом. Алгебра A *канторова (коканторова)*, если для любой алгебры B наличие инъективных (соотв., сюръективных) гомоморфизмов $A \to B$ и $B \to A$ влечёт изоморфизм $A \cong B$. Очевидно,

$$\text{нётеровость} \Rightarrow \text{хопфовость} \Rightarrow \text{коканторовость}$$

и

$$\text{артиновость} \Rightarrow \text{кохопфовость} \Rightarrow \text{канторовость}.$$

В работе [11] было доказано, что полигоны над коммутативной полугруппой (или, более общо: коммутативный полигон) является хопфовым, если он конечно порождён. В работе [12] были описаны хопфовы и кохопфовы унитарные полигоны над группой, а в работе [13] было доказано, что все унитарные полигоны над группой являются канторовыми.

Подпрямо неразложимые алгебры, т.е. алгебры, неразложимые в нетривиальное подпрямое произведение, всегда привлекали внимание специалистов благодаря замечательной теореме Биркгофа о том, что всякая нетривиальная алгебра изоморфна подпрямому произведению подпрямо неразложимых алгебр. Условие на алгебру "быть подпрямо неразложимой" является условием на решётку конгруэнций, а именно, решётка конгруэнций содержит наименьший нетривиальный элемент. Подпрямо неразложимые полигоны над произвольными полугруппами были охарактеризованы в работе [14]. В ряде работ описывались подпрямо неразложимые полигоны над полугруппами того или иного класса (например, над группами).

Обобщением модулярности и дистрибутивности алгебры является требование, чтобы решётка конгруэнций удовлетворяла какому-нибудь нетривиальному решёточному тождеству. Так как всякая конечная решётка удовлетворяет нетривиальному тождеству, то вышеназванное условие является условием конечности. В работе [15] доказано, что над конечной полугруппой решётка конгруэнций полигона X удовлетворяет нетривиальному тождеству в том и только том случае, если X конечен. Из полигонов специального вида отметим диагональный полигон, т.е. множество $S \times S$, на котором полугруппа S действует следующим образом: $(a, b)s = (as, bs)$. Этим полигонам посвящён ряд работ отечественных и зарубежных авторов, в основном занимающихся условиями, при которых данный полигон будет циклическим или конечно порождённым.

В теории частичных полигонов один из центральных вопросов — возможно ли продолжение частичной операции до полной? Оказывается, что это возможно не всегда, однако, есть полугруппы, над которыми всякий частичный полигон продолжается – например, вполне простые полугруппы (а значит, и группы).

Соединение нескольких автоматов в один или разложение автомата на ряд более простых соответствует алгебраическим конструкциям прямого и подпрямого произведения, копроизведения, сплетения. Сплетения сыграли важную роль в теории групп для описания некоторых групповых расширений. В теории полугрупп и полигонов над полугруппами их значение также весьма велико (см. [16]). Некоторые задачи теории автоматов, требуют для своего разрешения привлечение весьма тонких алгебраических методов. В статье С.В. Алёшина [17] обсуждаются данные вопросы.

В заключение упомянем недавно опубликованный авторами обзор теории полигонов над полугруппами [18], в котором освещены результаты, полученные в этой теории в последние десятилетия, относящиеся в основном к структурной теории полигонов и затрагивающий некоторые другие аспекты.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2019-1621.

Список литературы

[1] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V., “Monoids, acts and categories”, *N.Y. – Berlin, W. de Gruyter*, **xvii** (2000), 529 pp.

[2] Глушков В.М., “Абстрактная теория автоматов”, *Успехи мат. наук*, **16**:5 (1961), 3–62

[3] Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А., “Элементы алгебраической теории автоматов”, *М., Высш. школа*, 1994, 191

[4] “Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп”, Сб. статей под ред. М. Арбиба, *М., Статистика*, 1975, 335

[5] Avdeyev A.Yu., Kozhukhov I.B., “Acts over completely 0-simple semigroups”, *Acta Cybernetica*, **14**:4 (2000), 523–531

[6] Клиффорд А., Престон Г., “Алгебраическая теория полугрупп, тт. 1, 2. Перевод с английского”, *М., Мир*, **1, 2** (1972), 286(1), 423(2)

[7] Птахов Д.О., Степанова А.А., “Решётки конгруэнций полигонов”, *Дальневост. матем. ж.*, **13**:1 (2013), 107–115

[8] Кожухов И.Б., Пряничников А.М., Симакова А.Р., “Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над прямоугольной связкой”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **84**:2 (2020), 90–125

[9] Kozhukhov I.B., “On semigroups with minimal or maximal condition on left congruences”, *Semigroup Forum*, **21** (1980), 337–350

[10] Miller C., Ruškuc N., “Right noetherian semigroups”, *International Journal of Algebra and Computation*, **30**:1 (2020), 13–48

[11] Карташов В.К., “Независимые системы порождающих и свойство Хопфа для унарных алгебр”, *Дискретн. матем.*, **20**:4 (2008), 79–84

[12] Кожухов И.Б., Колесникова К.А., “О хопфовости и кохопфовости полигонов над группами”, *Фундам. и прикл. матем.*, **23**:3 (2020), 131–139

[13] Сотов А.С., “Теорема Кантора – Бернштейна для полигонов над группами”, *Материалы VI Межд. конф. Соврем. информ. технологии в образов. и научн. иссл., ДонНТУ, Донецк*, 2019, 120–123

[14] Халиуллина А.Р., “Характеризация подпрямо неразложимых полигонов”, *Прик. дискр. матем.*, **1**:27 (2015), 5–16

[15] Кожухов И.Б., Пряничников А.М., “Полигоны с тождествами в решётке конгруэнций (в печати)”

[16] Meldrum J.D.P., “Wreath products of groups and semigroups”, *John Wiley and Sons Inc.*, 1995

[17] Алёшин С.В., “Автоматы в алгебре”, *Фундам. и прикл. матем.*, **15**:3 (2002), 23–32

[18] Кожухов И.Б., Михалёв А.В., “Полигоны над полугруппами”, *Фундам. и прикл. матем.*, **23**:3 (2020), 141–199

On algebraic automata theory

Kozhukhov I.B., Mikhalev A.V.

The paper briefly describes the main ideas of the algebraic theory of automata and its connection with the algebraic theory of semigroups. An automaton is considered as a polygon over a semigroup. The main directions to develop polygon theory are indicated.

Keywords: automaton, semigroup, polygon over a semigroup, algebraic theory of automata.

References

[1] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V., “Monoids, acts and categories”, *N.Y. – Berlin, W. de Gruyter*, **xvii** (2000), 529 pp.

[2] Glushkov V.M., “Abstract Theory of Automata”, *Uspekhi mat. nauk*, **16**:5 (1961), 3–62 (In Russian)

[3] Plotkin B.I., Greenglaz L.Y., Gvaramiya A.A., “Elements of algebraic automata theory”, *M., Vysh. shkola*, 1994, 191 (In Russian)

[4] “Algebraic theory of automata, languages, and semigroups”, Collected Articles, ed. by M. Arbib, *M., Statistika*, 1975, 335 (In Russian)

[5] Avdeyev A.Yu., Kozhukhov I.B., “Acts over completely 0-simple semigroups”, *Acta Cybernetica*, **14**:4 (2000), 523–531

[6] Clifford A., Preston G., “Algebraic theory of semigroups, vols. 1, 2. Translation from English”, **1, 2** (1972), 286(1), 423(2) (In Russian)

[7] Ptakhov D.O., Stepanova A.A., “Lattices of polygon congruences”, *Dalnevost. matem. jur.*, **13**:1 (2013), 107–115 (In Russian)

[8] Kozhukhov I.B., Pryanichnikov A.M., Simakova A.R., “Conditions of modularity of the congruence lattice of an act over a rectangular band”, *Izvestiya: Mathematics*, **84**:2 (2020), 90–125 (In Russian)

[9] Kozhukhov I.B., “On semigroups with minimal or maximal condition on left congruences”, *Semigroup Forum*, **21** (1980), 337–350

[10] Miller C., Ruškuc N., “Right noetherian semigroups”, *International Journal of Algebra and Computation*, **30**:1 (2020), 13–48

[11] Kartashov V.K., “Independent systems of generators and the Hopf property for unary algebras”, *Discrete Math.*, **20**:4 (2008), 79–84 (In Russian)

[12] Kozhukhov I.B., Kolesnikova K.A., “On the Hopf and Cohopf of Polygons Over Groups”, *Fundamen. and prikl. matem.*, **23**:3 (2020), 131–139 (In Russian)

[13] Sotov A.S., “The Cantor–Bernstein theorem for polygons over groups”, *Proc. of the 6th Int. Conf. on Modern Inf. Tech. in Edu. and Sci. Research, DonNTU, Donetsk*, 2019, 120–123 (In Russian)

[14] Khaliullina A.R., “Characterization of indirectly indecomposable polygons”, *Prik. discr. matem.*, **1**:27 (2015), 5–16 (In Russian)

[15] Kozhukhov I.B., Pryanishnikov A.M., “Polygons with identities in a lattice of congruences (in press)” (In Russian)

[16] Meldrum J.D.P., “Wreath products of groups and semigroups”, *John Wiley and Sons Inc.*, 1995

[17] S.V. Aleshin., “Automata in Algebra”, *Fundam. and prik. matem.*, **15**:3 (2002), 23–32 (In Russian)

[18] Kozhukhov I.B., Mikhalev A.V., “Polygons over semigroups”, *Fundam. and prik. matem.*, **23**:3 (2020), 141–199 (In Russian)