Сложность задачи удовлетворения ограничениям и её вариаций

Д. Н. Жук[1]

Многие задачи, такие как раскраска графа или решение систем линейных уравнений, могут быть представлены как задачи удовлетворения ограничениям для какого-то языка допустимых ограничений. При этом некоторые из этих задач решаются за полиномиальное время, а некоторые являются NP-полными. В 2017 году сложность задачи удовлетворения ограничениям была описана для любого языка ограничений, но осталось много вариаций этой задачи, для которых сложность по-прежнему неизвестна. Например, можно разрешить кроме квантора существования использовать квантор всеобщности или потребовать, чтобы найденное решение было сюръективным или сбалансированным. Также можно потребовать, чтобы входные данные удовлетворяли какому-то наперед заданному условию, как если нам надо покрасить граф в 100 цветов, если известно, что его можно покрасить в 3 цвета. В работе мы обсудим как обычную задачу удовлетворения ограничениям, так и сложность этих и некоторых других вариаций и обобщений этой задачи. **Ключевые слова:** Задача удовлетворения ограничениям, вычислительная сложность, кванторная задача удовлетворения ограничениям.

1. Задача удовлетворения ограничениям

Задача удовлетворения ограничениям, по англ. Constraint Satisfaction Problem (CSP), это массовая проблема, где на вход подаётся набор ограничений и нужно проверить можно ли переменным сопоставить значения так, чтобы все ограничения выполнялись. В общем случае (на конечном множестве) задача является NP-полной, но если ограничить множество допустимых ограничений, например, линейными уравнениями, то задача решается за полиномиальное время. Через CSP(Γ) мы обозначим задачу удовлетворения ограничения со множеством допустимых ограничений Γ, которую можно сформулировать так. На вход подаётся формула вида $R_1(\dots) \wedge \dots \wedge R_s(\dots)$, где каждое R_i — предикат из множества Γ, а за $(\dots)$ скрывается произвольный набор переменных; надо проверить выполнима ли формула. Ещё в 1993 [12] в работе Федера и Варди была

[1] *Жук Дмитрий Николаевич* — с.н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: zhuk@intsys.msu.ru.

Zhuk Dmitriy Nikolaevich — Senior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

высказана гипотеза, что для любого языка допустимых ограничений задача либо решается за полиномиальное время, либо является NP-полной, и долгое время именно эта пролема была основной в этой области. В 2017 году эта гипотеза была доказана независимо Андреем Булатовым и Дмитрием Жуком, при этом классификация языков ограничений по сложности оказалась совсем простой и может быть сформулирована в терминах функций, сохраняющих предикат.

Функцию f будем называть слабой функцией почти-единогласия, если она удовлетворяет следующим тождествам

$$f(y, x, \dots, x) = f(x, y, x, \dots, x) = \dots = f(x, x, \dots, x, y).$$

В качестве примера слабой функции единогласия можно рассмотреть любую константу, $x \vee y$, $x + y + z$, $xy \vee yz \vee xz$, $min(x, y)$ и т.д.

Теорема 1. *[6, 7, 16, 15] Пусть* Γ *— конечное множество предикатов на конечном множестве* A*. Тогда* $\mathrm{CSP}(\Gamma)$ *решается за полиномиальное время, если найдется слабая функция почти единогласия, которая сохраняет каждый предикат из* Γ*;* $\mathrm{CSP}(\Gamma)$ *является NP-полной в остальных случаях.*

2. Дополнительное глобальное ограничение

Одной их вариацией обычной задачи удовлетворения ограничениям может быть добавление глобального ограничения. Например, мы можем потребовать, чтобы решение было сюръективным (содержало каждый элемент множества A)[1] или сбалансированным (каждый элемент встречался бы одинаковое количество раз) [11].

Проблема 1 *Какова сложность* $\mathrm{CSP}(x + y \neq 2)$ *на множестве* $\{0, 1, 2\}$*, если требуется найти сюръективное решение?*

Проблема 2 *Какова сложность* $\mathrm{CSP}(x \leq y)$ *на* $\{0, 1\}$*, если требуется найти сбалансированное решение?*

Нетрудно найти тривиальное решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ для каждой из них, но как проверить, что есть сюръективное или сбалансированное решение. Удивительно, но каждая из этих двух задач является NP-трудной [1, 11], то есть дополнительное ограничение делает тривиальную задачу сложной. При этом сложность этих задач в общем случае остается открытой проблемой [17].

Проблема 3 *Какова сложность* $\mathrm{CSP}(\Gamma)$ *для произвольного языка ограничений* Γ*, если нам нужно найти сюръективное решение?*

Проблема 4 *Какова сложность* $\mathrm{CSP}(\Gamma)$ *для произвольного языка ограничений* Γ*, если нам нужно найти сбалансированное решение?*

Рассмотрим другой пример на множестве $\{0, 1\}$. Мы знаем, что система линейных уравнений в поле $\mathbb{Z}_2$ решается за полиномиальное время. А что если мы добавим глобальное ограничение, что сумма всех переменных равна k. Оказывается, что в этом случае задача становится NP-трудной [11]. Но, например, сложность следующей задачи до сих пор неизвестна [4].

Проблема 5 *Какова сложность решения системы линейных уравнений по модулю 2 в $\{0, 1\}$ с одним дополнительным уравнением по модулю 24?*

3. Кванторная задача удовлетворения ограничениям

Обычная задача удовлетворения ограничениям может быть сформулировна как проверка истинности утверждения, где по всем переменным добавлены кванторы существования. Если разрешить использовать дополнительно квантор всеобщности, то получится кванторная задача удовлетворения ограничениям (по англ. Quantified CSP) [3, 9, 10, 14]. Для произвольного множества предикатов Γ через QCSP(Γ) обозначим задачу, в которой на вход поступает утверждение вида

$$\forall x_1 \exists y_1 \dots \forall x_n \exists y_n \; R_1(\dots) \wedge \dots \wedge R_s(\dots),$$

где все предикаты R_i из Γ; надо проверить верно ли утверждение. Известны следующие факты:

- Если Γ состоит из линейных уравнений в поле, то задача QCSP(Γ) решается за полиномиальное время [3].
- Если Γ состоит из всех предикатов, то задача QCSP(Γ) является PSpace-полной [3].
- Существуют языки Γ, для которых задача QCSP(Γ) является NP-полной, coNP-полной, DP-полной, и Θ_2^P-полной [18].
- Для любого Γ на трехэлементном множестве, содержащем все предикаты вида $x = a$, задача QCSP(Γ) либо решается за полиномиальное время, либо является NP-полной, либо coNP-полной, либо PSpace-полной [18].

Таким образом остаётся очень много открытых вопросов:

Проблема 6 *Какие классы сложности могут быть выражены как* QCSP(Γ) *для какого-то* Γ*?*

Проблема 7 *Какова сложность задачи* QCSP(Γ) *для произвольного* Γ *на трехэлементном множестве?*

Проблема 8 *Для каких* Γ *задача* QCSP(Γ) *решается за полиномиальное время?*

4. Задача удовлетворения ограничениям с обещаниями

Естественным обобщение задачи удовлетворения ограничениям является задача удовлетворения ограничениям с обещаниями (по англ. Promise CSP) [5, 8]. Здесь есть две версии каждого предиката — сильная и слабая — и нам даётся обещание, что либо сильная версия выполняется, либо даже слабая не выполняется. В качестве примера рассмотрим язык ограничений на множестве $\{0, 1\}$ состоящий из одной пары предикатов $(1\mathrm{IN}3, \mathrm{NAE})$, где сильный предикат $1\mathrm{IN}3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ и слабый предикат $\mathrm{NAE} = \{0,1\}^3 \setminus \{(0,0,0),(1,1,1)\}$. В этом случае на вход подается две формулы, которые отличаются только заменой 1IN3 на NAE. Например это могут быть формулы

$$1\mathrm{IN}3(x_1, x_2, x_2) \wedge 1\mathrm{IN}3(x_3, x_1, x_4) \wedge 1\mathrm{IN}3(x_1, x_4, x_2),$$
$$\mathrm{NAE}(x_1, x_2, x_2) \wedge \mathrm{NAE}(x_3, x_1, x_4) \wedge \mathrm{NAE}(x_1, x_4, x_2).$$

При этом нам обещают, что либо обе формулы выполнимы, либо обе формулы невыполнимы; нам надо проверить выполнимы ли они. Удивительно, но несмотря на то, что задачи CSP(1IN3) и CSP(NAE) являются NP-полными, данная задача удовлетворения ограничениям с обещаниями решается за полиномиальное время. Тем не менее, даже на двухэлементном множестве и близко нет описания сложности задачи удовлетворения ограничениям с обещаниями для произвольного языка ограничений.

Проблема 9 *Какова сложность задачи удовлетворения ограничениям с обещаниями для произвольного языка ограничений на множестве* $\{0, 1\}$*?*

Пожалуй самой популярной задачей удовлетворения ограничениям с обещаниями является задача о (k, l)-раскраске графа. Она формулируется так. Дан граф, и нам дано обещание, что либо его можно покрасить в k цветов, либо нельзя даже в l цветов. Надо ответить на вопрос можно ли его покрасить в k цветов. Другим вариантом этой задачи является задача о покраске графа в l цветов, если известно, что его можно покрасить в k цветов. Удивительно, но из здесь у нас сплошные открытые вопросы, хотя все и уверены, что для любых $2 < k \leq l$ задача о (k, l)-раскраске графа является NP-полной.

Совсем недавно было показано [8], что задача является NP-трудной для $l = 2k - 1$ и $k \geq 3$, но например открытыми остаются следующие вопросы.

Проблема 10 *Какова сложность* $(3, 6)$*-раскраски графа?*

Проблема 11 *Какова сложность* $(3, 100000000)$*-раскраски графа?*

5. Другие вариации задачи удовлетворения ограничениям

Кроме рассмотренных выше вариаций существует много других. Например, мы можем потребовать, чтобы каждая переменная в формуле встречалась ровно два раза, тогда мы получим так называемую реберную задачу удовлетворения ограничениям (по англ. Edge CSP), так как она эквивалентная тому, что переменные у нас находятся в ребрах графа, а ограничения в вершинах [13]. Можно рассматривать данные задачи на бесконечном множестве [2], где уже возникает вопрос как задавать язык ограничений, а для некоторых языков можно получить даже алгоритмически неразрешимую задачу. Этот список можно продолжать ещё долго, что даёт нам большое количество очень любопытных открытых вопросов.

Список литературы

[1] Manuel Bodirsky, Jan Kára, and Barnaby Martin. The complexity of surjective homomorphism problems - a survey. *Discrete Applied Mathematics*, 160(12):1680–1690, 2012.

[2] Manuel Bodirsky and Marcello Mamino. Constraint satisfaction problems over numeric domains. In *Dagstuhl Follow-Ups*, volume 7. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2017.

[3] Ferdinand Börner, Andrei A. Bulatov, Hubie Chen, Peter Jeavons, and Andrei A. Krokhin. The complexity of constraint satisfaction games and QCSP. *Inf. Comput.*, 207(9):923–944, 2009.

[4] Joshua Brakensiek, Sivakanth Gopi, and Venkatesan Guruswami. CSPs with global modular constraints: Algorithms and hardness via polynomial representations. In *Proceedings of the 51st Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, pages 590–601, 2019.

[5] Joshua Brakensiek and Venkatesan Guruswami. Promise constraint satisfaction: Structure theory and a symmetric boolean dichotomy. In *Proceedings of the Twenty-Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 1782–1801. SIAM, 2018.

[6] Andrei A. Bulatov. A dichotomy theorem for nonuniform CSPs. In *2017 IEEE 58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 319–330, 2017.

[7] Andrei A Bulatov. A dichotomy theorem for nonuniform CSPs. *arXiv preprint arXiv:1703.03021*, 2017.

[8] Jakub Bulín, Andrei Krokhin, and Jakub Opršal. Algebraic approach to promise constraint satisfaction. In *Proceedings of the 51st Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, pages 602–613. ACM, 2019.

[9] Hubie Chen. The complexity of quantified constraint satisfaction: Collapsibility, sink algebras, and the three-element case. *SIAM J. Comput.*, 37(5):1674–1701, 2008.

[10] Hubie Chen. Meditations on quantified constraint satisfaction. In *Logic and Program Semantics - Essays Dedicated to Dexter Kozen on the Occasion of His 60th Birthday*, pages 35–49, 2012.

[11] Nadia Creignou, Henning Schnoor, and Ilka Schnoor. Non-uniform boolean constraint satisfaction problems with cardinality constraint. In *International Workshop on Computer Science Logic*, pages 109–123. Springer, 2008.

[12] Tomás Feder and Moshe Y Vardi. Monotone monadic SNP and constraint satisfaction. In *Proceedings of the twenty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 612–622, 1993.

[13] Alexandr Kazda, Vladimir Kolmogorov, and Michal Rolínek. Even delta-matroids and the complexity of planar boolean csps. *ACM Transactions on Algorithms (TALG)*, 15(2):1–33, 2018.

[14] Barnaby Martin. Quantified Constraints in Twenty Seventeen. In Andrei Krokhin and Stanislav Zivny, editors, *The Constraint Satisfaction Problem: Complexity and Approximability*, volume 7 of *Dagstuhl Follow-Ups*, pages 327–346. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, Dagstuhl, Germany, 2017.

[15] D. Zhuk. A proof of CSP dichotomy conjecture. In *2017 IEEE 58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 331–342, Oct 2017.

[16] Dmitriy Zhuk. A proof of the CSP dichotomy conjecture. *Journal of the ACM (JACM)*, 67(5):1–78, 2020.

[17] Dmitriy Zhuk. No-rainbow problem and the surjective constraint satisfaction problem. In *2021 36th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, pages 1–7. IEEE, 2021.

[18] Dmitriy Zhuk and Barnaby Martin. QCSP monsters and the demise of the Chen conjecture. In *Proceedings of the 52nd Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, pages 91–104, 2020.

Complexity of the Constraint Satisfaction Problem and its variations

Zhuk D.N.

Many combinatorial problems, such as graph coloring and solving of linear equations, can be expressed as the constraint satisfaction problem for some constraint language. Some of these problems are solvable in polynomial time, while others are NP-complete. In 2017 the complexity of the constraint satisfaction problem was described for any constraint language on a finite set, but there are many other variants of this problem whose complexity is still not known. For instance, we could allow to use both universal and existential quantifiers, or require the solution to be surjective or balanced. Another variant is to require

the input to satisfy an additional condition. As an example we could consider the problem of coloring a graph in 100 colors if we know that the graph is colorable in 3 colors. In the paper we discuss the usual constraint satisfaction as well as the complexity of these and other variants of the constraint satisfaction problem.

Keywords: constraint satisfaction problem, computational complexity, CSP, quantified CSP.

References

[1] Manuel Bodirsky, Jan Kára, and Barnaby Martin. The complexity of surjective homomorphism problems - a survey. *Discrete Applied Mathematics*, 160(12):1680–1690, 2012.

[2] Manuel Bodirsky and Marcello Mamino. Constraint satisfaction problems over numeric domains. In *Dagstuhl Follow-Ups*, volume 7. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2017.

[3] Ferdinand Börner, Andrei A. Bulatov, Hubie Chen, Peter Jeavons, and Andrei A. Krokhin. The complexity of constraint satisfaction games and QCSP. *Inf. Comput.*, 207(9):923–944, 2009.

[4] Joshua Brakensiek, Sivakanth Gopi, and Venkatesan Guruswami. CSPs with global modular constraints: Algorithms and hardness via polynomial representations. In *Proceedings of the 51st Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, pages 590–601, 2019.

[5] Joshua Brakensiek and Venkatesan Guruswami. Promise constraint satisfaction: Structure theory and a symmetric boolean dichotomy. In *Proceedings of the Twenty-Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 1782–1801. SIAM, 2018.

[6] Andrei A. Bulatov. A dichotomy theorem for nonuniform CSPs. In *2017 IEEE 58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 319–330, 2017.

[7] Andrei A Bulatov. A dichotomy theorem for nonuniform CSPs. *arXiv preprint arXiv:1703.03021*, 2017.

[8] Jakub Bulín, Andrei Krokhin, and Jakub Opršal. Algebraic approach to promise constraint satisfaction. In *Proceedings of the 51st Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, pages 602–613. ACM, 2019.

[9] Hubie Chen. The complexity of quantified constraint satisfaction: Collapsibility, sink algebras, and the three-element case. *SIAM J. Comput.*, 37(5):1674–1701, 2008.

[10] Hubie Chen. Meditations on quantified constraint satisfaction. In *Logic and Program Semantics - Essays Dedicated to Dexter Kozen on the Occasion of His 60th Birthday*, pages 35–49, 2012.

[11] Nadia Creignou, Henning Schnoor, and Ilka Schnoor. Non-uniform boolean constraint satisfaction problems with cardinality constraint. In *International Workshop on Computer Science Logic*, pages 109–123. Springer, 2008.

[12] Tomás Feder and Moshe Y Vardi. Monotone monadic SNP and constraint satisfaction. In *Proceedings of the twenty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 612–622, 1993.

[13] Alexandr Kazda, Vladimir Kolmogorov, and Michal Rolínek. Even delta-matroids and the complexity of planar boolean csps. *ACM Transactions on Algorithms (TALG)*, 15(2):1–33, 2018.

[14] Barnaby Martin. Quantified Constraints in Twenty Seventeen. In Andrei Krokhin and Stanislav Zivny, editors, *The Constraint Satisfaction Problem: Complexity and Approximability*, volume 7 of *Dagstuhl Follow-Ups*, pages 327–346. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, Dagstuhl, Germany, 2017.

[15] D. Zhuk. A proof of CSP dichotomy conjecture. In *2017 IEEE 58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 331–342, Oct 2017.

[16] Dmitriy Zhuk. A proof of the CSP dichotomy conjecture. *Journal of the ACM (JACM)*, 67(5):1–78, 2020.

[17] Dmitriy Zhuk. No-rainbow problem and the surjective constraint satisfaction problem. In *2021 36th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, pages 1–7. IEEE, 2021.

[18] Dmitriy Zhuk and Barnaby Martin. QCSP monsters and the demise of the Chen conjecture. In *Proceedings of the 52nd Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, pages 91–104, 2020.