О конечной порожденности A-предполных классов в классе линейных автоматов над кольцом двоично-рациональных чисел

Д. В. Ронжин[1]

Исследуются вопросы конечной порожденности найденных ранее A-предполных классов линейных автоматов над кольцом двоично-рациональных чисел. Показано, что два из них не являются A-конечнопорожденными, в то время как остальные являются.

Ключевые слова: конечные автоматы, линейные автоматы, двоично-рациональные числа, А-полнота, предполный класс, конечнопорожденность.

1. Введение

Для систем конечных автоматов [1] одним из подходов к решению вопроса о K-полноте является рассмотрение вопроса об A-полноте [2] этих систем. Также для решения поставленного вопроса нередко рассматриваются задачи полноты систем, содержащих добавки [3]. К тому же, в случае когда вопросы K-полноты не являются разрешимыми для первоначального класса автоматов, могут быть рассмотрены собственные подклассы, для которых задача является разрешимой. Ярким примером является класс линейных автоматов[4, 5], для которого описаны условия полноты конечных систем в терминах предполных классов, несмотря на алгоритмическую неразрешмиость задачи K-полноты для произвольных конечных автоматов [1].

Интересным объектом исследования выступает класс линейных автоматов, алфавиты которых являются бесконечными множествами. В работе [6] исследуются вопросы наличия полных систем по операциям композиции и суперпозиции на множестве линейных автоматов, функционирующих над полем рациональных чисел. В работе [7] исследуется сужение указанного класса до автоматов, функционирующих над подкольцом рациональных чисел - множестве двоично-рациональных чисел. В частно-

[1] *Ронжин Дмитрий Владимирович* — выпускник аспирантуры каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, преподаватель математики в ОАНО "Новая школа e-mail: d.v.ronzhin@gmail.com.

Ronzhin Dmitry Vladimirovich — graduated from Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems, math teacher at non-profit organization "New School".

сти, в работах [7], [8] формулируется ряд A-предполных классов, в терминах которых описываются условия A-полноты систем с добавками.

Настоящая работа посвящена исследованию структуры полученных ранее A-предполных классов, а именно выяснению их конечнопорожденности по операциям A-замыкания.

2. Вспомогательные обозначения

Кольцо двоично-рациональных чисел, которое является подкольцом в поле рациональных чисел обозначим через $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$:

$$\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}} = \left\{ \tfrac{m}{2^n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Далее в настоящей работе элементы $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$ рассматриваем в сокращенном виде. $\forall c \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}, c = \frac{m}{2^n}, \forall k \in \mathbb{Z}$ будем говорить что c кратно k тогда и только тогда, когда m кратно k.

$\forall l, k \in \mathbb{N}$ будем рассматривать конечные автоматы[1] с входным алфавитом $\mathbb{Q}^l_{\frac{m}{2^n}}$, выходным алфавитом $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$ и алфавитом состояний $\mathbb{Q}^k_{\frac{m}{2^n}}$, функции переходов и выходов являются линейными[4, 5]. Множество всех таких автоматов обозначим $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$[7] и будем называть множеством линейных автоматом над кольцом двоично-рациональных чисел.
Заметим, что множество $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ имеет конечный базис по операциям композиции[1], а именно:

$$\mathbf{B} = \{V_+(x,y), V_{\cdot(-\frac{1}{2})}(x), \xi_1(x)\}, \text{ где}$$

1) $V_+(x,y) = x + y$ - сумматор,
2) $V_{\cdot(c)}(x) = c \cdot x$ - умножитель на чило $c \in Q_{\frac{m}{2^n}}$,
3) $\xi_a(x) = \xi \cdot x + a$ - задержка с начальным состоянием a.

Аналогично[8] определим множество формальных степенных рядов над $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$:

$$\mathbb{Q}^{\infty}_{\frac{m}{2^n}}(\xi) = \left\{ \alpha = \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \xi^i \mid a_i \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}} \right\}$$

Обозначим множество дробно-рациональных функций от переменной ξ с коэффициентами из $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$ следующим образом[8]:

$$\mathbf{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}) = \left\{ \tfrac{P(\xi)}{Q(\xi)} \mid P(\xi), Q(\xi) \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}[\xi], Q(0) = 1, \gcd(P(\xi),\, Q(\xi)) = 1 \right\}$$

Верны следующие утверждения [8]:

Лемма 1. $\forall V(x_1, ..., x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}), \exists R_0, R_1, ..., R_l \in \boldsymbol{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$, *такие что:*

$$V(x_1, ..., x_l) = R_0 + \sum_{i=1}^{l} R_i \cdot x_i.$$

Лемма 2. $\forall V(x_1, ..., x_l) \colon (\mathbb{Q}^{\infty}_{\frac{m}{2^n}})^l \ \to \mathbb{Q}^{\infty}_{\frac{m}{2^n}}$, *такого что:*

$$V(x_1, ..., x_l) = R_0 + \sum_{i=1}^{l} R_i \cdot x_i,$$
$$R_i \in \boldsymbol{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}), i \in [0, l]$$

верно, что $V(x_1, ..., x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$.

Множители R_k будем называть коэффициентами отображения. Через $R_k[t]$ будем обозначать t-й член последовательности R_k. Переменная x_i называется непосредственной, если соответствующий $R_i[0] \neq 0$. Автомат называется существенным если у него не менее двух непосредственных переменных.

A - замыкание [2] системы M будем обозначать через $A(M)$, замыкание системы M по операциям композиции через $K(M)$, замыкание по операциям суперпозиции через $\Sigma(M)$. Множество линейных автоматов M, $M \subset M' \subset L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ будет называться A-полным в M', если $\forall V \in M'$ и $\forall \tau \in \mathbb{N}$, в $K(M)$ существует автомат V', совпадающий с автоматом V на словах длины τ.

Ранее был сформулирован ряд K-замкнутых классов, а так же доказана их A-предполнота в $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ [7], [8]. Ниже представлено неформальное описание данных классов:

1) Для фиксированного $k \in \mathbb{N}$ и множества

$$\mathbf{P} = \{p_i | p_i \neq 2 - \text{простое число}, \, i \in [1, k]\},$$

определяется замкнутый класс автоматов $V_{\mathbf{P}}$. В данный класс входят все не существенные автоматы, а также автоматы, у которых все коэффициенты при переменных в первый такт либо кратны некоторому фиксированному $p \in \mathbf{P}$, либо все кроме одного коэффициента при переменных в первый такт кратны произведению всех элементов $\mathbf{P}$.

2) Определяется класс D, в который входят все не существенные автоматы, а также автоматы, у которых коэффициенты при переменных в первый такт не взаимно просты (с точки зрения числителей в неприводимых дробях).

3) $\forall p > 2$, где p – простое число, определяется класс M_p, в который входят все автоматы, у которых коэффициенты при переменных во второй такт кратны p.

4) $\forall p > 2$, где p – простое число, определяется класс T_p, в который входят все автоматы, у которых свободный коэффициент в первый такт кратен p.

5) Определяется класс T_{int}, в который входят все автоматы, у которых коэффициенты при переменных в первый такт являются целочисленными.

6) Определяется класс $T_{\geq 0}$, в который входят все автоматы, у которых коэффициенты при переменных в первый такт являются неотрицательными.

Далее в настоящей работе без ограничения общности не будем различать автоматы из $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ и отображения, которые они реализуют.

3. Основной результат

Теорема 1. *Для A-предполных классов $T_p, M_p, T_{int}, T_{\geq 0}, D, V_{\boldsymbol{P}}$, $\forall p, \forall \boldsymbol{P}$, где p - простые, отличные от двойки и $\boldsymbol{P}$ - непустые конечные подмножества простых чисел, отличных от двойки верны следующие утверждения:*

1) Классы T_p, M_p, $T_{\geq 0}$ и $V_{\boldsymbol{P}}$, являются конечнопорожденными по операциям A-замыкания.

2) Классы T_{int} и D не являются конечнопорожденными по операциям A-замыкания.

Доказательство. Рассмотрим все указанные A-предполные классы, и для каждого из них либо представим конечную A-полную систему, либо докажем отсутствие такой системы.

1) Рассмотрим классы T_p. Зафиксируем $p > 2$ простое, и рассмотрим следующее конечное множество автоматов:

$$B_p = \{V_+(x,y), V_{\cdot\frac{1}{2}}(x), V_{\cdot(-1)}(x), \xi \cdot x, \xi, p\}.$$

Заметим, что $B_p \subset T_p$. Покажем, что $A(B_p) = T_p$.

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}$:

$$V_{\cdot n}(x) = \underbrace{V_+(x, V_+(x, V(.., V_+(x,x)..))}_{(n-1)\text{ раз } V_+} = n \cdot x, \tag{1}$$

$$V_{\cdot\frac{1}{2^n}}(x) = \underbrace{V_{\cdot\frac{1}{2}}(V_{\cdot\frac{1}{2}}(V_{\cdot\frac{1}{2}}(.., V_{\cdot\frac{1}{2}}(x)..))}_{n \text{ раз } V_{\cdot\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^n} \cdot x, \tag{2}$$

$$\forall c = \frac{m}{2^k} > 0, V_{\cdot c}(x) = V_{\cdot\frac{1}{2^k}}(V_{\cdot m}(x)) = c \cdot x, \tag{3}$$

$$\forall c = \frac{m}{2^k} < 0, V_{\cdot c}(x) = V_{\cdot(-1)}(V_{\cdot|c|}(x)), \tag{4}$$

$$0 = V_+(x, V_{\cdot(-1)}(x)), \tag{5}$$

$$\forall c = \frac{m}{2^k}, c \cdot p = V_{\cdot c}(p). \tag{6}$$

Заметим, что $\forall m \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{m} x_i \in \Sigma(\{V_+(x,y), 0\})$.

В силу приведенных равенств и упомянутого замечания, очевидно что

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in [1,n], \forall a_i, b \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}},$$
$$\{\textstyle\sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot x_i) + b \cdot p, b \cdot p\} \subset \Sigma(\{V_+(x,y), V_{\cdot\frac{1}{2}}(x), V_{\cdot(-1)}(x), p\}).$$

Заметим, что

$$\{a \cdot \xi, b \cdot \xi \cdot x | \forall a, b \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}\} \subset \Sigma(\{V_+(x,y), V_{\cdot\frac{1}{2}}(x), V_{\cdot(-1)}(x), \xi, \xi \cdot x\})$$

Таким образом, для заданного автомата $V(x_1, x_2, .., x_l) \in T_p$:

$$V(x_1, .., x_l) = R_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{l} R_i \cdot x_i,$$
$$\forall i \in [0, l], R_i \in \mathbf{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}),$$

и фиксированного такта $\tau \geq 0$ используя сумматор арности не более $(l+1) \cdot \tau$ естественным образом сможем получить до такта τ автомат $V(x_1, x_2, .., x_l)$, поскольку операциями суперпозиции можем получить из B_p автоматы:

$$R_0[j] \cdot \xi^j, R_i[j] \cdot \xi^j \cdot x, \forall i \in [1, l], j \in [0, \tau].$$

2) $M_p, \forall p$ - простых, отличных от двойки. Зафиксируем $p > 2$ простое, и рассмотрим следующее конечное множество автоматов:

$$B'_p = \{V_+(x,y), V_{\cdot\frac{1}{2}}(x), V_{\cdot(-1)}(x), p \cdot \xi \cdot x, \xi^2 \cdot x, \xi^3 \cdot x, \xi, 1\}.$$

Заметим, что $B'_p \subset M_p$. Покажем, что $A(B'_p) = M_p$.

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}$ могут быть применены равенства 1, 2, 3, 4, 5. Произвольные ненулевые константы могут быть получены следующим образом:

$$\forall c = \frac{m}{2^n}, c = V_{\cdot c}(1).$$

Заметим что $\Sigma(\{V_+(x,y), V_{\cdot\frac{1}{2}}(x), V_{\cdot(-1)}(x), 1\})$ содержит автоматы, реализующие произвольные линейные функции с коэффициентами из $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$. Из этого следует, что:

$$\forall l \in \mathbb{N}, \forall i \in [1,l], a_i, b \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}, a_i \,\vdots\, p :$$

$$\sum_{j=1}^{l} a_i \cdot \xi \cdot x_j + b \cdot \xi \in \Sigma(\{V_+(x,y), V_{\cdot\frac{1}{2}}(x), V_{\cdot(-1)}(x), p \cdot \xi \cdot x, \xi, 1\}). \quad (7)$$

$$\forall l \in \mathbb{N}, \forall i \in [1,l], a_i, b \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}, \forall \tau \in \mathbb{N}, \tau \geq 2 :$$

$$\sum_{j=1}^{l} a_i \cdot \xi^\tau \cdot x_j + b \cdot \xi^\tau \in \Sigma(\{V_+(x,y), V_{\cdot\frac{1}{2}}(x), V_{\cdot(-1)}(x), \xi^2 \cdot x, \xi^3 \cdot x, 1\}). \quad (8)$$

Таким образом, для заданного автомата $V(x_1, x_2, .., x_l) \in M_p$:

$$V(x_1, .., x_l) = R_0 + \sum_{i=1}^{l} R_i \cdot x_i,$$
$$\forall i \in [0,l], R_i \in \mathbf{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}),$$

и фиксированного такта $\tau \geq 0$ используя сумматор арности не более τ и автоматы вида 7, 8 естественным образом сможем получить в $A(B'_p)$ до такта τ автомат $V(x_1, x_2, .., x_l)$.

3) Для $T_{\geq 0}$ рассмотрим следующее конечное множество автоматов:

$$B_{\geq 0} = \{V_+(x,y), V_{\cdot\frac{1}{2}}(x), -\xi \cdot x, \xi \cdot x, 1, -1\}$$

Заметим, что $B_{\geq 0} \subset T_{\geq 0}$. Покажем, что $A(B_{\geq 0}) = T_{\geq 0}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}$ могут быть применены равенства 1, 2, 3. Произвольные константы могут быть получены следующим образом:

$$0 = V_+(1, -1),$$

$$\forall c = \frac{m}{2^n} > 0, c = V_{\cdot c}(1),$$

$$\forall c = \frac{m}{2^n} < 0, c = V_{\cdot|c|}(-1).$$

Таким образом $\Sigma(\{V_+(x,y), V_{\cdot\frac{1}{2}}(x), 1, -1\})$ содержит автоматы, реализующие произвольные линейные функции с неотрицательными коэффициентами при переменных. Из этого следует, что:

$$\forall l \in \mathbb{N}, \forall i \in [1,l], a_i, b \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}, \forall \tau \in \mathbb{N}:$$

$$\sum_{j=1}^{l} a_i \cdot \xi^\tau \cdot x_j + b \cdot \xi^\tau \in \Sigma(B_{\geq 0}). \tag{9}$$

Таким образом, для заданного автомата $V(x_1, x_2, .., x_l) \in T_{\geq 0}$:

$$V(x_1, .., x_l) = R_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{l} R_i \cdot x_i,$$
$$\forall i \in [0,l], R_i \in \mathbf{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}),$$

и фиксированного такта $\tau \geq 0$ используя сумматор арности не более τ и автоматы вида 9 в $A(B_{\geq 0})$ получим до такта τ автомат $V(x_1, x_2, .., x_l)$.

4) Рассмотрим случай $|\mathbf{P}| = 1$. Для произвольного простого $p > 2$ зафиксируем множество $\mathbf{P} = \{p\}$. Для класса $V_\mathbf{P}$ рассмотрим следующее конечное множество автоматов:

$$B_\mathbf{P} =$$
$$\{V_{\cdot\frac{1}{2}}(x), -x, x-1, x+1, x+\xi\cdot y, x+p\cdot y, V_{\cdot 2}(x), V_{\cdot 3}(x), ...V_{\cdot(p-1)}(x), 0\}.$$

Заметим, что $B_\mathbf{P} \subset V_\mathbf{P}$. Покажем, что $A(B_\mathbf{P}) = V_\mathbf{P}$.

Заметим, что $\forall n, l, r \in \mathbb{N}$:

$$V(x, x_{i,1}, x_{i,2}, ..., x_{i,r}) =$$
$$x + \textstyle\sum_{i=1}^{l} \xi \cdot x_{i,1} + \sum_{i=1}^{l} \xi^2 \cdot x_{i,2} + ... + \sum_{i=1}^{l} \xi^r \cdot x_{i,r} \in \Sigma(\{x + \xi \cdot y, 0\}).$$

Поскольку класс $V_\mathbf{P}$ при $\mathbf{P} = \{p\}$ представляет множество автоматов, у которых все кроме, возможно, одного коэффициенты при переменных кратны p в первый такт, достаточно показать что

$$L_1 = \{c_1 \cdot x + c_2 | \forall c_1, c_2 \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}\} \subset A(B_\mathbf{P}).$$

В таком случае произвольный линейный автомат из $V_\mathbf{P}$ будет моделироваться до любого такта r при помощи функции $V(x, x_{i,1}, x_{i,2}, ..., x_{i,r})$ и множества автоматов L_1 при помощи операций суперпозиции.

Элементы множества L_1 могут быть получены в силу следующих очевидных утверждений:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, x + n \in \Sigma(\{x+1, x-1\}), \tag{10}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \cdot x \in \Sigma(\{x + p \cdot y, 2 \cdot x, 3 \cdot x, ..., (p-1) \cdot x, -x, 0\}), \tag{11}$$

$$\forall c \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}, x + c \in \Sigma(\{x + n, \frac{1}{2} \cdot x, 2 \cdot x | \forall n \in \mathbb{Z}\}), \tag{12}$$

$$\forall c \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}, x \cdot c \in \Sigma(\{x \cdot n, \frac{1}{2} \cdot x | \forall n \in \mathbb{Z}\}). \tag{13}$$

Таким образом верно, что $L_1 \subset A(B_{\mathbf{P}})$, следовательно $V_{\mathbf{P}}$ при $\mathbf{P} = \{p\}$, где $p > 2$ - простое, является конечнопорожденной.

5) Рассмотрим случай $|\mathbf{P}| > 1$. Для произвольного $r \in \mathbb{N}, r > 1$ зафиксируем множество нечетных простых чисел $\mathbf{P} = \{p_1, p_2, ..., p_r\}$. Для класса $V_{\mathbf{P}}$ рассмотрим следующее конечное множество автоматов:

$$B'_{\mathbf{P}} = \{V_{\cdot\frac{1}{2}}(x), V_{\cdot(-1)}(x), V_{\cdot 2}(x), V_{\cdot 3}(x), ..., V_{\cdot(p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r - 1)}(x), x - 1, x + 1, x + \xi \cdot y, x + p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r \cdot y, p_i \cdot (x_1 + x_2 + x_3), 0 | \forall i \in [1, r]\}$$

Покажем, что $A(B_{\mathbf{P}}) = V_{\mathbf{P}}$.

Заметим, что $\forall n, l, r \in \mathbb{N}$:

$$V(x, x_{i,1}, x_{i,2}, ..., x_{i,r}) = x + \sum_{i=1}^{l} \xi \cdot x_{i,1} + \sum_{i=1}^{l} \xi^2 \cdot x_{i,2} + ... + \sum_{i=1}^{l} \xi^r \cdot x_{i,r} \in \Sigma(\{x + \xi \cdot y, 0\}).$$

В силу определения класса $V_{\mathbf{P}}$ для доказательства утверждения необходимо показать, что

$$L_0 = \{x + p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r \cdot (\textstyle\sum_{j=1}^{q} x_j), p_i \cdot (\sum_{j=1}^{q} x_j) | \forall i \in [1, r], \forall q \in \mathbb{N})\} \subset A(B'_{\mathbf{P}}),$$

$$L_1 = \{c_1 \cdot x + c_2 | \forall c_1, c_2 \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}\} \subset A(B'_{\mathbf{P}}).$$

В таком случае произвольный линейный автомат из $V_{\mathbf{P}}$ будет получаться до любого такта r при помощи функции $V(x, x_{i,1}, x_{i,2}, ..., x_{i,r})$ и множеств автоматов L_0 и L_1 при помощи операций суперпозиции.

Элементы множества L_1 могут быть получены в силу 10, 12 и 13, а также того, что:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, x \cdot n \in \Sigma(\{x + p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r \cdot y, 2 \cdot x, 3 \cdot x, ..., (p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r - 1) \cdot x, -x, 0\}).$$

Покажем как могут быть получены элементы L_0. Очевидно, что:

$$x + p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r \cdot (\textstyle\sum_{j=1}^{q} x_j) \in \Sigma(x + p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r \cdot y), \forall q \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что:

$$\{p_i \cdot (\textstyle\sum_{j=1}^{q} x_j) | \forall i \in [1, r], \forall q \in \mathbb{N}\} \subset A(L_1 \cup \{0, p_i \cdot (x_1 + x_2 + x_3) | \forall i \in [1, r]\}).$$

Доказательство будем проводить индукцией по числу входов q. Для базы индукции $q \in [1, 3]$ утверждение очевидно верно.

Пусть утверждение верно для некоторого $q \geq 3$, покажем что оно будет верно для $q+1$. В самом деле, в силу расширенного алгоритма Евклида для фиксированной пары различных простых чисел p_i, p_j:

$$\exists a, b \in \mathbb{Z} : a \cdot p_i + b \cdot p_j = 1.$$

В таком случае $\forall i \in [1, r]$, зафиксировав $j \neq i, j \in [1, r]$ и используя автоматы из L_1 искомый автомат получается в силу следующего равенства:

$$p_i \cdot (\textstyle\sum_{j=1}^{q+1} x_j) = p_i \cdot (a \cdot p_i \cdot (x_1 + x_2 + x_{q+1}) + b \cdot p_j \cdot (x_1 + x_2 + x_{q+1}) + x_3 + ... + x_q).$$

Таким образом $L_0, L_1 \subset A(B'_{\mathbf{P}})$, следовательно $V_{\mathbf{P}}$ при $\mathbf{P} = \{p_1, p_2, ..., p_r\}$, где $r > 1, p_r > 2$ - простые, является A-конечнопорожденной.

6) Доказательство того, что T_{int} не является A-конечнопорожденным предполным классом будем проводить от противного. Предположим наличие конечного множества $M = \{V_1, V_2, ..., V_k\} \subset T_{int}$, такого что $A(M) = T_{int}$.

Через $U'(M)$ обозначим множество константных слагаемых автоматов во множестве M, т.е.:

$$U'(M) = \{R_0^{(i)} | V_i = \textstyle\sum_{j=1}^{l_i} (R_j^{(i)} \cdot x_j) + R_0^{(i)}, V_i \in M\}.$$

В силу конечности множества M обозначим через n следующую величину:

$$n = max\{n_i | \frac{m_i}{2^{n_i}} = R_i[0], R_i \in U'(M)\}.$$

Заметим, что автомат, реализующий константу $\frac{1}{2^{n+1}} \in T_{int}$ не принадлежит $A(M)$, поскольку в первый момент времени операциями суперпозиции над автоматами из T_{int} знаменатель константных слагаемых не может быть увеличен. Таким образом получаем противоречие.

7) Доказательство того, что D не является A-конечнопорожденным предполным классом будем проводить от противного. Предположим наличие конечного множества $M = \{V_1, V_2, ..., V_k\} \subset D$, такого что $A(M) = D$.

Рассмотрим множество P' состоящее из простых чисел:

$$P' = \{p | R[0] \vdots p, R \in U(M), p > 2 \text{ - простое}\}.$$

Из опредения множества D следует, что все непосредственные входы автоматов из D кратны некоторому простому числу в первый такт, либо непосредственный вход единственен.

Зафиксируем простое число $p > 2$, такое что $p \notin P'$. Рассмотрим автомат $p \cdot (x+y)$. Утверждается что $p \cdot (x+y) \notin A(M)$. В самом деле, поскольку автомат $p \cdot (x+y)$ имеет два непосредственных входа, операциями суперпозиции он может быть получен из множества M только с использованием как минимум одного автомата с числом непосредственных входов больше единицы, однако все такие автоматы из M в первый такт кратны некоторым простым числам. В силу того, что рассматриваемые автоматы функционируют над двоично-рациональными числами, операциями суперпозиции в первый такт невозможно избавиться от кратности некоторому $p' > 2$, $p' \in P'$.

□

Автор выражает признательность своему научному руководителю, кандидату физ.-мат. наук, доценту кафедры МаТИС Часовских Анатолию Александровичу за помощь в постановке и решении задачи. Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (грант № 075-15-2020-801).

Список литературы

[1] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., *Введение в теорию автоматов*, НАУКА, Москва, 1985, 320 с.

[2] Буевич В.А., “О полноте, А-полноте и t-полноте в классе автоматных отображений”, *Интеллектуальные системы*, **10**:1-4 (2006), 613–638

[3] Бабин Д.Н., Летуновский А.А., “О возможностях суперпозиции, при наличии в базисе автоматов фиксированной добавки из булевых функций и задержки”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **19**:3 (2015), 15–22

[4] Часовских А.А., “Проблема полноты для класса линейно-автоматных функций”, *Дискретная математика*, **27**:2 (2015), 134–151

[5] Chasovskikh A.A., “Completeness problem for the class of linear automata functions”, *Discrete Mathematics and Applications*, **26**:2 (2016), 89–104

[6] Ронжин Д.В., “Линейные автоматы над полем рациональных чисел”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21**:4 (2017), 144–155

[7] Ронжин Д.В., “Об условиях А-полноты линейных автоматов над двоично-рациональными числами”, *Дискретная математика*, **32**:2 (2020), 45–62

[8] Ронжин Д.В., “Распознавание А-полноты конечных систем линейных автоматов с добавками над кольцом двоично-рациональных чисел”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **25**:1 (2021), 149–163

About finitely generated A maximum-subclasses in the class of linear automata over dyadic rationals

Ronzhin D.V.

This work concerns property of being finitely generated by operations of A-closing of found earlier maximum subclasses in the class of linear automata over the ring of dyadic rationals. We present the proof of the fact that two of them are not finitely generated, while others are finitely generated.

Keywords: finite state automata, linear automata, dyadic rationals, A-completeness, maximum subclasses, finitely generated.

References

[1] Kudryavcev V.B., Aleshin S.V., Podkolzin A.S., *Introduction to automata theory*, Nauka, Moscow, 1985 (In Russian), 320 c.

[2] Buyevich V.A., “About completeness, A-completeness and t-completness in the class of automata mappings.”, *Intellectual systems.*, **10**:1-4 (2006), 613–638 (In Russian)

[3] Babin D.N., Letunovskiy A.A., “About superposition potential, with having boolean functions and delay element as an addition to basis.”, *Intellectual systems. Theory and applications.*, **19**:3 (2015), 15–22 (In Russian)

[4] Chasovskikh A.A., “Completeness problem for the class of linear automata functions”, *Discrete Mathematics*, **27**:2 (2015), 134–151 (In Russian)

[5] Chasovskikh A.A., “Completeness problem for the class of linear automata functions.”, *Discrete Mathematics and Applications*, **26**:2 (2016), 89–104

[6] Ronzhin D.V., “Linear automata over the field of rational numbers.”, *Intellectual systems. Theory and applications.*, **21**:4 (2017), 144–155 (In Russian)

[7] Ronzhin D.V., “About A-completeness conditions for the automata over dyadic rationals.”, *Discrete Mathematics*, **32**:2 (2020), 45–62 (In Russian)

[8] Ronzhin D.V., “A-completeness recognition for finite systems with additives of linear automata over the ring of dyadic rationals.”, *Intellectual systems. Theory and applications.*, **25**:1 (2021), 149–163 (In Russian)