

# О формульном представлении характеристической функции булевского решения линейного уравнения с целыми коэффициентами

М. В. Носов<sup>1</sup>

В работе представлен ряд формул характеристической функции булевского решения линейного уравнения с целыми коэффициентами. Аргументами функции выступают двоичные разложения этих коэффициентов.

**Ключевые слова:** линейное уравнение, булевское решение, характеристическая функция.

Дано линейное уравнение с целыми коэффициентами от  $n$  переменных, которые принимают значения из множества  $\{0, 1\}$ . Заменой переменных  $t$  на  $1 - t$  можно добиться того, что коэффициенты уравнения будут натуральными числами. Таким образом, рассматривается уравнение следующего вида

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + \dots + a_n x_n &= a_0, \\ a_1, \dots, a_n, a_0 &\in N. \end{aligned}$$

Все коэффициенты  $m$ -разрядные двоичные числа

$$a_i = \sum_{j=0}^{m-1} 2^j a_{ij},$$

$$a_{ij} \in \{0, 1\}, i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m - 1.$$

Ниже представлены формулы  $\Xi(a_1, \dots, a_n, a_0)$  - характеристической функции решения уравнения на множестве  $\{0, 1\}^n$ . Далее используется известное равенство

$$\int_0^1 \exp\{2\pi ikt\} dt = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \in Z \setminus \{0\}. \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Носов Михаил Васильевич — с.н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mvnosov@mail.ru.

Nosov Michail Vasilevich — senior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Следовательно, если  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , то выражение

$$\sum_{x \in E_2^n} \int_0^1 \exp\{2\pi i (\sum_{j=1}^n a_j x_j - a_0)t\} dt$$

задает количество булевых решений. Перепишем его в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta \subseteq \{1, \dots, n\}} \int_0^1 \exp\{2\pi i (\sum_{j \in \beta} a_j - a_0)t\} dt = \\ & \int_0^1 (\sum_{\beta} \exp\{-2\pi i a_0 t\} \prod_{j \in \beta} \exp\{2\pi i a_j t\}) dt = \\ & \int_0^1 (\exp\{-2\pi i a_0 t\} \prod_{j=1}^n (1 + \exp\{2\pi i a_j t\})) dt. \end{aligned}$$

Характеристическая функция имеет вид

$$\Xi(a_1, \dots, a_n, a_0) =$$

$$1 - \int_0^1 \exp\{-2\pi i \left( \int_0^1 (\exp\{-2\pi i a_0 t\} \prod_{j=1}^n (1 + \exp\{2\pi i a_j t\})) dt \right) \tau\} d\tau.$$

В этом представлении выполняется свойство

$$(1 - \Xi(a_1, \dots, a_n, a_0)) \cdot (1 - \Xi(b_1, \dots, b_n, b_0)) =$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \exp\{-2\pi i \left( \int_0^1 ((\exp\{-2\pi i a_0 t\} \prod_{j=1}^n (1 + \exp\{2\pi i a_j t\})) + \right. \\ & \left. (\exp\{-2\pi i b_0 t\} \prod_{j=1}^n (1 + \exp\{2\pi i b_j t\})) \right) dt \right) \tau\} d\tau. \end{aligned}$$

Другое представление, если уравнение имеет решение, то

$$\prod_{x \in E_2^n} (\sum_{j=1}^n a_j x_j - a_0) = \prod_{\beta \subseteq \{1, \dots, n\}} (\sum_{j \in \beta} a_j - a_0) = 0.$$

Значит

$$\Xi(a_1, \dots, a_n, a_0) = \int_0^1 \exp\{-2\pi i \left( \prod_{\beta \subseteq \{1, \dots, n\}} \left( \sum_{j \in \beta} a_j - a_0 \right) \right) t\} dt.$$

В этом представлении произведение имеет вид

$$\Xi(a_1, \dots, a_n, a_0) \cdot \Xi(b_1, \dots, b_n, b_0) = \int_0^1 \exp\{-2\pi i \left( \prod_{\beta \subseteq \{1, \dots, n\}} \left( \sum_{j \in \beta} a_j - a_0 \right)^2 + \prod_{\beta \subseteq \{1, \dots, n\}} \left( \sum_{j \in \beta} b_j - b_0 \right)^2 \right) t\} dt.$$

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект».

**On the formula representation of the characteristic function of the Boolean solution of a linear equation with integer coefficients**  
Nosov M.V.

The paper presents a number of formulas for the characteristic function of the Boolean solution linear equation with integer coefficients. The function arguments are binary expansions of these coefficients.

*Keywords:* linear equation, Boolean solution, characteristic function.