

Достаточные условия минимальности сетей типа звезда в гиперпространствах

А. М. Тропин¹

Задача Ферма—Штейнера заключается в поиске такой точки метрического пространства Y , что сумма расстояний от нее до точек некоторого конечного фиксированного подмножества $A \subset Y$, называемого границей, минимальна. Минимальную сумму расстояний мы будем называть длиной минимальной астросети. Мы рассматриваем эту задачу в гиперпространстве $Y = H(X)$ непустых, замкнутых и ограниченных подмножеств ограниченно компактного метрического пространства X ; причем на $H(X)$ введена метрика Хаусдорфа. В силу ограниченной компактности X все элементы $H(X)$ являются компактами. Каждое решение задачи Ферма—Штейнера будем называть астрокомпактом Штейнера; их множество разбивается на классы одинаковой взвешенности, каждый из которых соответствует своему вектору расстояний до граничных компактов.

В настоящей статье доказаны три достаточных условия того, что для данной границы предъявленный компакт является астрокомпактом Штейнера. Также эти условия гарантируют единственность класса астрокомпактов Штейнера одинаковой взвешенности. Данная теория применяется для полного решения задачи Ферма—Штейнера для некоторых симметричных вышуклых трехэлементных границ в \mathbb{R}^2 , что демонстрируется примерами.

Ключевые слова: задача Ферма—Штейнера, сеть типа звезда, минимальная астросеть, астрокомпакт Штейнера, гиперпространство, расстояние Хаусдорфа, метрическая проекция, функция расстояния от точки до множества, первая вариация.

1. Введение

Данная статья является продолжением статьи [1], в которой дана предыстория задачи и приводятся необходимые определения из теории экстремальных сетей и задачи Ферма—Штейнера в гиперпространствах.

Напомним, что в метрическом пространстве X метрику $\rho(a, b)$ мы обозначаем через $|ab|$, а расстояние от точки a до множества B через $|aB|$. В гиперпространстве $H(X)$ непустых замкнутых и ограниченных

¹Тропин Александр Михайлович — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: amtropin@gmail.com.

Tropin Alexander Mikhailovich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

подмножеств X в качестве метрики используем расстояние Хаусдорфа $d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} |aB|, \sup_{b \in B} |bA|\}$. Для фиксированной границы $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset H(X)$ длиной минимальной сети типа звезда, или, для краткости, длиной минимальной астросети называется точная нижняя грань величин $S_{\mathcal{A}}(K) := \sum_{i=1}^n d_H(A_i, K)$ по всем $K \in H(X)$. Известно, что в случае ограничено компактного пространства X все элементы $H(X)$ являются компактами, а длина минимальной астросети достигается хотя бы на одном компакте (их будем называть астрокомпактами Штейнера). Задача поиска астрокомпактов Штейнера называется *задачей Ферма—Штейнера*.

Для границы $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ в гиперпространстве над ограничено компактным пространством доказаны три достаточных условия того, что предъявленный компакт K' является астрокомпактом Штейнера. Приведем эти условия:

- 1) для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ существуют такие точки $b_i \in A_i$, что для любого $d_i \in [0, d_H(A_i, K')]$ выполняется

$$d_i + \min_{k \in B_{d_i}(b_i)} \sum_{j \neq i} |kA_j| > S_{\mathcal{A}}(K');$$

- 2) для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ и для любого $d_i \in [0, d_H(A_i, K')]$ выполняется

$$d_i + \sum_{j \neq i} \max_{a_j \in A_j} |a_j B_{d_i}(A_i)| > S_{\mathcal{A}}(K');$$

- 3) для фиксированного $m \in \mathbb{N}$, $2 \leq m < n$, для каждого набора $\{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1, \dots, n\}$ и для любых $d_{i_l} \geq 0$ таких, что $\sum_{l=1}^m d_{i_l} < \sum_{l=1}^m d_H(A_{i_l}, K')$, выполняется

$$\sum_{l=1}^m d_{i_l} + \sum_{j \notin \{i_1, \dots, i_m\}} \max_{a_j \in A_j} |a_j L_{d_{i_1}, \dots, d_{i_m}}| > S_{\mathcal{A}}(K'),$$

где $L_{d_1, \dots, d_l} = \bigcap_{i=1}^l B_{d_i}(A_i)$ при $d_j \geq 0$.

Более того, при выполнении любого из этих условий класс астрокомпактов Штейнера одинаковой взвешенности для \mathcal{A} единственен, и K' ему принадлежит.

Отметим, что для решения задачи Ферма—Штейнера в гиперпространстве мы существенно используем функцию, равную сумме расстояний от точки пространства до фиксированных компактов. Обратим внимание, что эта функция используется в первом достаточном условии. В данной работе исследуются следующие свойства этой функции.

- 1) В $\mathbb{R}^{m'}$ рассматривается граница из $(2m+1)$ -го выпуклого компакта, один из которых — строго выпуклый A_0 — отделен от остальных гиперплоскостью π , а остальные разбиваются на пары $\{A_j, A_{m+j}\}$, $j = 1, \dots, m$, состоящие из компактов, симметричных относительно гиперплоскости π_1 . Для таких компактов показано, что функция $s(k) := \sum_{i=1}^{2m} |kA_i|$, минимизируемая по $k \in A_0$, имеет единственную точку минимума, которая лежит в $\partial(A_0 \cap \pi_1)$.
- 2) Доказана формула первой вариации для длины сети типа звезда в $\mathbb{R}^{m'}$, соединяющей точку k , не лежащую ни в одном из выпуклых компактов A_1, \dots, A_n , с ближайшими точками $c_i(k) \in A_i$ этих компактов. Показано, что производная по направлению \vec{v} функции $s(k)$ равняется (\vec{n}, \vec{v}) , где \vec{n} — сумма единичных векторов, сонаправленных с $\overrightarrow{c_i(k)k}$.

В статье демонстрируются конкретные примеры границ в $H(\mathbb{R}^2)$, для которых удается полностью решить задачу Ферма—Штейнера с использованием приведенных выше достаточных условий, а также экстремальных свойств функции $s(k)$. Также в некоторых случаях граничных элементов исследовано поведение функции длины минимальной астросети при естественных 1-параметрических деформациях границы. Кроме того, на данных примерах проиллюстрирована техника, описанная в [1] и позволяющая деформировать границы с неувеличением длины минимальной астросети: деформации граничных компактов относительно редукции и переход к подмножествам, выпуклые оболочки которых равны граничным компактам.

Автор благодарит своих научных руководителей профессоров А.А. Тужилина и Э.Э. Гасанова, а также профессора А.О. Иванова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2. Основные определения и предварительные результаты

Необходимые сведения из теории сетей и геометрии пространства компактов с расстоянием по Хаусдорфу приведены в первой части статьи [1].

2.1. Структура астрокомпактов Штейнера в ограниченно компактных пространствах

Мы будем изучать минимальные астросети, соединяющие конечные границы $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ в $(H(X), d_H)$. Длина ребра $e = BC$ сети опреде-

ляется как расстояние Хаусдорфа $d_H(B, C)$. Напомним, что длину параметрической сети типа звезда, соединяющей границу \mathcal{A} с компактом K , мы обозначаем через $S_{\mathcal{A}}(K)$, а длину минимальной астросети, соединяющей \mathcal{A} , — через $S_{\mathcal{A}}$.

Пусть сначала X — произвольное метрическое пространство. Множество всех астрровершин Штейнера мы обозначим через $\Sigma(\mathcal{A})$. Положим $d(x, \mathcal{A}) = (\rho(x, a_1), \dots, \rho(x, a_n))$ и $\Omega(\mathcal{A}) = \{d(y, \mathcal{A}) : y \in \Sigma(\mathcal{A})\}$. Для каждого $d \in \Omega$ мы определим *класс астрровершин Штейнера одинаковой взвешенности* $\Sigma_d(\mathcal{A}) = \{y \in \Sigma(\mathcal{A}), d(y, \mathcal{A}) = d\}$. Таким образом, множество $\Sigma(\mathcal{A})$ разбивается на классы $\Sigma_d(\mathcal{A})$, $d \in \Omega$. Заметим, что, в общем случае, множество $\Sigma(\mathcal{A})$ может быть пустым, однако в случае ограниченной компактности X это множество непусто.

При этом астрровершины Штейнера не всегда определяются однозначно. *Минимальным* и *максимальным астрровершинами Штейнера* в классе одинаковой взвешенности $\Sigma_d(\mathcal{A})$ назовем соответственно минимальный и максимальный элементы в $\Sigma_d(\mathcal{A})$ в смысле естественного порядка по включению.

Каноническим расширением компакта K из класса $\Sigma_d(\mathcal{A})$ относительно семейства \mathcal{A} назовем множество $K_d(\mathcal{A}) := \bigcap_{i=1}^n B_{d_i}(A_i)$, где $d = (d_1, \dots, d_n)$ и $d_i = d_H(K, A_i)$. Доказано, что множество $K_d(\mathcal{A})$ является компактом.

Пусть теперь X — ограниченно компактное метрическое пространство с метрикой ρ , в нем все замкнутые и ограниченные множества являются компактами. Астрровершины Штейнера в этом случае будем называть *астрокомпактами Штейнера*. В работе [2] описана структура класса $\Sigma_d(\mathcal{A})$ в случае ограниченно компактного X , мы напомним здесь основные результаты.

Лемма 1 (существование и единственность максимального астрокомпакта Штейнера). *Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство, $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset H(X)$. Тогда $\Sigma(\mathcal{A})$ и $\Omega(\mathcal{A})$ непусты, и для любого $d \in \Omega(\mathcal{A})$ множество $\Sigma_d(\mathcal{A})$ содержит единственный максимальный астрокомпакт Штейнера, и этот астрокомпакт Штейнера равен $K_d(\mathcal{A})$.*

Теорема 1 (структура $\Sigma_d(\mathcal{A})$ в ограниченно компактном пространстве). *Пусть X — ограниченно компактное пространство, $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset H(X)$. Тогда $\Sigma(\mathcal{A})$ и $\Omega(\mathcal{A})$ непусты, и для любого $d \in \Omega(\mathcal{A})$ компакт K лежит в классе $\Sigma_d(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда $K_\lambda \subset K \subset K_d(\mathcal{A})$ для некоторого минимального астрокомпакта Штейнера $K_\lambda \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ и единственного максимального астрокомпакта Штейнера $K_d(\mathcal{A})$ из $\Sigma_d(\mathcal{A})$.*

Напомним результаты, сформулированные в [1].

Лемма 2. Если метрическое пространство (X, ρ) ограничено компактно, то пространство $(H(X), d_H)$ также ограничено компактно.

Следствие 1. Пусть X — ограничено компактное метрическое пространство, и \mathcal{A} — непустое конечное подмножество $H(X)$. Тогда $\Sigma(\mathcal{A})$ непусто.

2.2. Некоторые свойства расстояния от точки до выпуклого множества

Пусть даны точка a и множество B в метрическом пространстве (X, ρ) . Напомним, что мы обозначаем $\rho(a, b)$ через $|ab|$, а $\inf_{b \in B} |ab|$ — через $|aB|$.

Введем функцию $r_B(a) := |aB|$ и напомним некоторые ее свойства.

Лемма 3. При $B \subset X$ функция $r_B(a)$ является непрерывной.

Доказательство. Фиксируем точку a и $\delta > 0$. По определению инфимума, для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $b \in B$ такая, что $|ab| - r_B(a) < \varepsilon$. Значит, для каждой точки $a' \in U_\delta(a)$ и любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$r_B(a') \leq |a'b| \leq |ab| + |aa'| < |ab| + \delta \leq r_B(a) + \varepsilon + \delta.$$

Аналогично получаем неравенство $r_B(a) < r_B(a') + \varepsilon + \delta$, откуда $|r_B(a') - r_B(a)| < \delta + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, поэтому окончательно $|r_B(a') - r_B(a)| < \delta$. Значит, функция r_B является непрерывной. \square

Лемма 4. Пусть K — выпуклый компакт в \mathbb{R}^n . Тогда функция $r_K(a)$ является выпуклой.

Доказательство. Хорошо известно, функция расстояния $\rho: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является выпуклой, то есть для $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $t \in [0, 1]$ справедливо неравенство $\rho\left((1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2)\right) \leq (1-t)\rho(x_1, y_1) + t\rho(x_2, y_2)$.

Поскольку K — компакт, для точек $a, b \in \mathbb{R}^m$ существуют $k_a \in P_K(a)$ и $k_b \in P_K(b)$, то есть $r_K(a) = \rho(a, k_a)$ и $r_K(b) = \rho(b, k_b)$. Поскольку K — выпуклый, при $t \in [0, 1]$ точка $(1-t)k_a + tk_b$ принадлежит K . Тогда справедливо

$$r_K\left((1-t)a + tb\right) \leq \rho\left((1-t)a + tb, (1-t)k_a + tk_b\right) \leq (1-t)r_K(a) + tr_K(b).$$

Утверждение доказано. \square

Следствие 2. Если $r_K(a)$ определена на выпуклом подмножестве $L \subset \mathbb{R}^n$, то $r_K(a)$ является выпуклой на нем. В частности, это верно для $L = \mathbb{R}^m$, $m \leq n$.

Метрической проекцией $P_B(a)$ точки a на множество B называется множество $\{b \in B : |ab| = r_B(a)\}$. Следующее утверждение вытекает из свойства компакта.

Лемма 5. Если K — компакт в \mathbb{R}^n , и a — произвольная точка, то $P_K(a)$ не пусто.

Лемма 6. Если K — выпуклый компакт в \mathbb{R}^n со строго выпуклой нормой, то $P_K(a)$ состоит из одной точки.

Доказательство. Если $a \in K$, то утверждение очевидно. Пусть $a \notin K$, тогда предположим, что $P_K(a)$ содержит хотя бы две различные точки k_1 и k_2 , то есть $|ak_1| = |ak_2| = d > 0$. Из строгой выпуклости нормы получаем, что середина отрезка $[k_1, k_2]$, которую мы обозначим через k_3 , обладает свойством $|ak_3| < d$. Из выпуклости K следует, что $k_3 \in K$. Получили противоречие с тем, что $r_K(a) = d$. \square

В случаях, когда метрическая проекция $P_B(a)$ одноточечная, будем обозначать ее элемент через $c_B(a)$. Если к тому же точка $a = a(d)$ однозначно задается некоторым параметром d , то будем также использовать обозначения $P_B(d)$ и $c_B(d)$.

Следующий результат хорошо известен и упоминается, к примеру, в [3].

Лемма 7. Пусть в \mathbb{R}^n с евклидовой метрикой дан выпуклый компакт K . Тогда отображение $c_K(a)$ как функция точки a является непрерывным.

Также нам потребуется результат из [4]. Нормированный вектор $\frac{\vec{ab}}{|ab|}$ будем обозначать через \vec{e}_{ab} .

Лемма 8. Пусть в \mathbb{R}^n с евклидовой метрикой даны выпуклый компакт K и точка $a \notin K$. Тогда функция $r_K(a)$ дифференцируема по направлениям, и ее производная по направлению \vec{v} в точке a_0 равна

$$\frac{\partial r_K(a_0)}{\partial v} = \left(\frac{a_0 - c_K(a_0)}{r_K(a_0)}, \vec{v} \right) = \left(\overrightarrow{\partial_{c_K(a_0)a_0}}, \vec{v} \right).$$

2.3. Некоторые свойства расстояния Хаусдорфа и астростей

Пусть A, B — компакты в метрическом пространстве (X, ρ) . Введем также обозначение $d_{AB} := \min\{d : A \subset B_d(B)\} = \sup_{a \in A} |aB|$. По определению, что $d_H(A, B) = \max\{d_{AB}, d_{BA}\}$.

Следующий результат опубликован в [2].

Лемма 9. Пусть A и B — непустые компакты в метрическом пространстве X . Тогда для любой точки $a \in A$ существует точка $b \in B$ такая, что $|ab| \leq d_H(A, B)$.

Сформулируем и докажем более сильное утверждение.

Лемма 10. Пусть A и B — непустые компакты в метрическом пространстве X . Тогда для любой точки $a \in A$ существует точка $b \in B$ такая, что $|ab| \leq d_{AB}$.

Доказательство. Для любой точки $a \in A$ справедливо неравенство $|aB| \leq \sup_{a_1 \in A} |a_1B| = d_{AB}$. Поскольку B — компакт, то существует точка $b \in B$ такая, что $|ab| = |aB|$. Утверждение доказано. \square

Пусть a_1, \dots, a_n — точки в метрическом пространстве X . Введем функцию $\sigma_{a_1 \dots a_n}(k) := \sum_{i=1}^n |a_i k|$ для $k \in X$. Тогда, как показано в [1], верен следующий результат.

Лемма 11. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$, и $K \in H(X)$. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, для любой точки $a_i \in A_i$ существуют точки $k \in K$ и $a_j \in A_j$, $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, такие, что $d_H(A_l, K) \geq |a_l k|$ для любого $l \in \{1, \dots, n\}$. В частности, $S_{\mathcal{A}}(K) \geq \sigma_{a_1 \dots a_n}(k)$.

Утверждение 11 с учетом утверждения 10 можно усилить следующим образом.

Лемма 12. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$, и K — некоторый компакт. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, для любой точки $a_i \in A_i$ существуют точки $k \in K$ и $a_j \in A_j$, $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, такие, что $d_{A_i K} \geq |a_i k|$ и $d_{K A_j} \geq |a_j k|$ для любого $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$. В частности, $d_{A_i K} + \sum_{j \neq i} d_{K A_j} \geq \sigma_{a_1 \dots a_n}(k)$.

2.4. Деформации границы с неувеличением длины минимальной астросети

Напомним определения и результаты из [1].

Выпуклой оболочкой подмножества A линейного пространства X называется наименьшее по включению выпуклое множество в X , содержащее A . Будем обозначать её через $\text{conv}(A)$. Рассмотрим границу $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset H(X)$. Через $\text{conv}(\mathcal{A})$ обозначим границу, состоящую из компактов $\text{conv}(A_i)$, $i = 1, \dots, n$. Справедливо следующее утверждение.

Следствие 3. Для t -мерного нормированного пространства X и границы $\mathcal{A} \subset H(X)$ выполняется $S_{\text{conv}(\mathcal{A})} \leq S_{\mathcal{A}}$.

Назовем множество $B \subset X$ порождающим для множества $A \subset X$, если $A = \text{conv}(B)$. Очевидно, что множество A , для которого существует порождающее множество, является выпуклым. Границу $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\} \subset H(X)$ назовем порождающей для границы $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset H(X)$, если B_i является порождающим для A_i , $i = 1, \dots, n$. Границу $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset H(X)$ назовем выпуклой, если все A_i — выпуклые, $i = 1, \dots, n$. Очевидно, что если граница \mathcal{B} является порождающей для \mathcal{A} , то \mathcal{A} является выпуклой.

Следствие 4. Для t -мерного нормированного пространства X и границ $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset H(X)$ таких, что \mathcal{B} является порождающей для \mathcal{A} , выполняется $S_{\mathcal{A}} \leq S_{\mathcal{B}}$.

Применение следствия 4 для нахождения множества астрокомпактов Штейнера будет продемонстрировано на границах из теорем 11 и 13.

Пусть теперь A, K — компакты в ограниченно компактном пространстве X . Определим следующие подмножества компактов A и K :

$$\text{to}_K(A) := A \setminus U_{d_{AK}}(K), \quad \text{from}_A(K) := K \cap B_{d_{AK}}(\text{to}_K(A)),$$

$$\text{to}_A(K) := K \setminus U_{d_{KA}}(A), \quad \text{from}_K(A) := A \cap B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)).$$

Введенные понятия проиллюстрированы на рис. 1. Компакт $\text{from}_K(A) \cup \text{to}_K(A)$ обозначим через $R_K(A)$ и будем называть *редукцией компакта A относительно компакта K* . Также введем множество (см. рис. 2)

$$F_K(A) := R_K(A) \cup \left(U_{d_{AK}}(K) \setminus B_{d_{KA}}(\text{to}_A(K)) \right),$$

которое будем называть *K -облаком компакта A* .

Будем говорить, что компакт $B \in H(X)$ является *K -деформацией* компакта A , если $R_K(A) \subset B \subset F_K(A)$. Будем говорить, что компакт A обладает *свойством from-покрытия* компакта K , если

$$(K \setminus \text{to}_A(K)) \subset U_{d_{KA}}(\text{from}_K(A)).$$

Перейдем к деформации границ и оценке длины минимальной астро-сети. Пусть K — некоторый компакт, и даны границы $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ и $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$. Границу \mathcal{B} назовем *K -деформацией* границы \mathcal{A} , если B_i является K -деформацией компакта A_i для каждого $i = 1, \dots, n$. Скажем, что граница \mathcal{A} обладает *свойством from-покрытия K* , если каждый A_i обладает свойством from-покрытия K . Тогда справедлива следующая теорема.

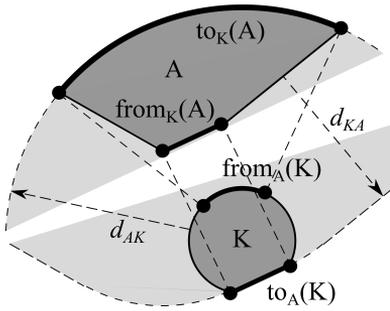


Рис. 1. Компакты A , K (закрашены темно-серым) и множества $\text{from}_K(A)$, $\text{to}_K(A)$, $\text{from}_A(K)$, $\text{to}_A(K)$.

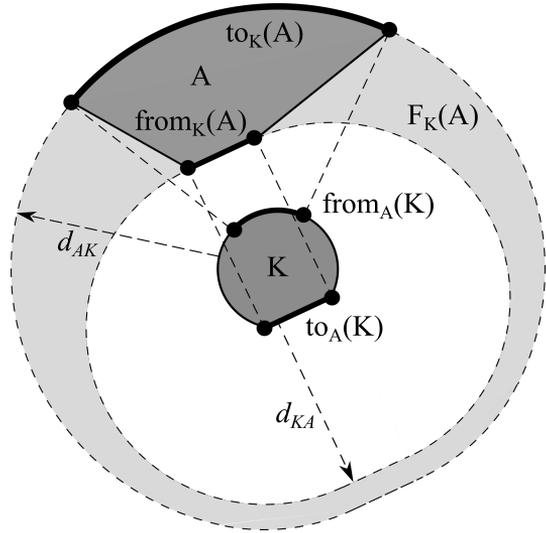


Рис. 2. Компакты A и K (закрашены темно-серым) и множество $F_K(A)$ (закрашено светло-серым).

Теорема 2. *Если для границ $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$, $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$ и астрокомпакта Штейнера $K_{\mathcal{A}}$ для границы \mathcal{A} верно, что \mathcal{B} является $K_{\mathcal{A}}$ -деформацией \mathcal{A} , и \mathcal{A} обладает свойством from-покрытия компакта $K_{\mathcal{A}}$, то $S_{\mathcal{B}} \leq S_{\mathcal{A}}$.*

Применение теоремы 2 будет продемонстрировано на границе из теоремы 9.

3. Достаточные условия того, что данный компакт является астрокомпактом Штейнера. Единственность класса одинаковой взвешенности

В данном разделе мы докажем три достаточных условия принадлежности компакта множеству астрокомпактов Штейнера для данной границы, которые также гарантируют единственность класса астрокомпактов Штейнера одинаковой взвешенности.

3.1. Первое условие

В доказательстве первого условия будет использовано тривиальное неравенство

$$S_{\mathcal{A}}(K) \geq d_{A_1 K} + \sum_{j=2}^n d_{KA_j}.$$

Лемма 13. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Пусть $b_1 \in A_1$ и $d_1 \geq 0$ таковы, что для некоторого компакта K' выполняется

$$d_1 + \min_{k \in B_{d_1}(b_1)} \sum_{j=2}^n |kA_j| > S_{\mathcal{A}}(K').$$

Тогда не существует астрокомпакта Штейнера K для \mathcal{A} такого, что $d_{A_1 K} = d_1$.

Доказательство. Предположим, что компакт K такой, что $d_{A_1 K} = d_1$, является астрокомпактом Штейнера. Тогда, по лемме 12, для любой точки $b_1 \in A_1$ существуют точки $k \in K$ и $a_j \in A_j$, $j \in \{2, \dots, n\}$, такие, что $d_1 = d_{A_1 K} \geq |b_1 k|$ и $d_{KA_j} \geq |a_j k|$, $j = 2, \dots, n$ и, следовательно, $d_{A_1 K} + \sum_{j=2}^n d_{KA_j} \geq d_1 + \sigma_{a_2 \dots a_n}(k)$. Поскольку $k \in B_{d_1}(b_1)$, то, минимизируя правую часть по таким k , получаем

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{A}}(K) &\geq d_{A_1 K} + \sum_{j=2}^n d_{KA_j} \geq d_1 + \min_{a_j \in A_j, j > 1, k \in B_{d_1}(b_1)} \sigma_{a_2 \dots a_n}(k) = \\ &= d_1 + \min_{k \in B_{d_1}(b_1)} \sum_{j=2}^n |kA_j| > S_{\mathcal{A}}(K'). \end{aligned}$$

Получили противоречие с тем, что K является астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} . Утверждение доказано. \square

Следствие 5. Используя в доказательстве леммы 13 свойство из леммы 11 вместо свойства из леммы 12, аналогично получаем, что не существует астрокомпакта Штейнера K для \mathcal{A} такого, что $d_H(A_1, K) = d_1$.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Пусть для некоторого компакта K' и для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ существуют такие точки $b_i \in A_i$, что для любого $d_i \in [0, d_H(A_i, K')]$ выполняется

$$d_i + \min_{k \in B_{d_i}(b_i)} \sum_{j \neq i} |kA_j| > S_{\mathcal{A}}(K').$$

Тогда существует единственный класс астрокомпактов Штейнера одинаковой взвешенности для \mathcal{A} , и K' ему принадлежит.

Доказательство. Пусть K — некоторый компакт. Если хотя бы для одного i выполняется $d_i := d_H(A_i, K) < d_H(A_i, K')$, то из данного по условию неравенства по лемме 13 и следствию 5 следует, что K не является астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} . Если же для всех i справедливо $d_H(A_i, K) \geq d_H(A_i, K')$ и K является астрокомпактом Штейнера, то $S_{\mathcal{A}}(K) \geq S_{\mathcal{A}}(K')$, и K' тоже является астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} . Поскольку все неравенства обращаются в равенства, то для всех i справедливо $d_H(A_i, K) = d_H(A_i, K')$, следовательно, класс одинаковой взвешенности единственный. Теорема доказана. \square

Пример границы, для которой можно найти астрокомпакты Штейнера с помощью теоремы 3, будет построен в разделе 5.1.

3.2. Второе условие

В доказательстве второго условия будет использовано тривиальное неравенство

$$S_{\mathcal{A}}(K) \geq d_{KA_1} + \sum_{j=2}^n d_{A_j K}$$

Лемма 14. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Пусть для некоторых $d_1 \geq 0$ и компакта K' выполняется

$$d_1 + \sum_{j=2}^n \max_{a_j \in A_j} |a_j B_{d_1}(A_1)| > S_{\mathcal{A}}(K').$$

Тогда не существует астрокомпакта Штейнера K для \mathcal{A} такого, что $d_{KA_1} = d_1$.

Доказательство. Предположим, что компакт K такой, что $d_{KA_1} = d_1$, является астрокомпактом Штейнера. Тогда $K \subset B_{d_1}(A_1)$ и для каждого $j = 2, \dots, n$ справедливо

$$d_H(A_j, K) \geq d_{A_j K} = \max_{a_j \in A_j} |a_j K| \geq \max_{a_j \in A_j} |a_j B_{d_1}(A_1)|.$$

Значит,

$$S_{\mathcal{A}}(K) \geq d_{KA_1} + \sum_{j=2}^n d_{A_j K} \geq d_1 + \sum_{j=2}^n \max_{a_j \in A_j} |a_j B_{d_1}(A_1)| > S_{\mathcal{A}}(K').$$

Получили противоречие с тем, что K является астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} . Утверждение доказано. \square

Следствие 6. *Используя в доказательстве леммы 14 свойство из леммы 11 вместо свойства из леммы 12, аналогично получаем, что не существует астрокомпакта Штейнера K для \mathcal{A} такого, что $d_H(A_1, K) = d_1$.*

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Пусть для некоторого компакта K' , для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ и для любого $d_i \in [0, d_H(A_i, K')]$ выполняется*

$$d_i + \sum_{j \neq i} \max_{a_j \in A_j} |a_j B_{d_i}(A_i)| > S_{\mathcal{A}}(K').$$

Тогда существует единственный класс астрокомпактов Штейнера одинаковой взвешенности для \mathcal{A} , и K' ему принадлежит.

Доказательство. Пусть K — некоторый компакт. Если хотя бы для одного i выполняется $d_i := d_H(A_i, K) < d_H(A_i, K')$, то из данного по условию неравенства по лемме 14 и следствию 6 следует, что K не является астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} . Если же для всех i справедливо $d_H(A_i, K) \geq d_H(A_i, K')$ и K является астрокомпактом Штейнера, то $S_{\mathcal{A}}(K) \geq S_{\mathcal{A}}(K')$, и K' тоже является астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} . Поскольку все неравенства обращаются в равенство, то для всех i справедливо $d_H(A_i, K) = d_H(A_i, K')$, следовательно, класс одинаковой взвешенности единственный. Теорема доказана. \square

Рассмотрим пример границы, для которой можно найти астрокомпакты Штейнера с помощью теоремы 4.

Пусть в \mathbb{R}^2 дан правильный $\triangle a_1 a_2 a_3$ со стороной 1. Рассмотрим границу $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\} \subset H(\mathbb{R}^2)$ такую, что $A_i = \{a_j, a_k\}$ для $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ (см. рисунок 3). Построим точки $y_{j,k}$ как середины отрезков $[a_j, a_k]$ и определим компакт $Y = \{y_{1,2}, y_{2,3}, y_{1,3}\}$.

Теорема 5 (пример четырехэлементного множества компактов Штейнера). *В принятых выше обозначениях для границы \mathcal{A} :*

- 1) *длина минимального дерева Штейнера $S_{\mathcal{A}}$ равняется $\frac{3}{2}$;*
- 2) *множество $\Sigma(\mathcal{A})$ компактов Штейнера состоит из одного класса $\Sigma_d(\mathcal{A})$ такого, что $d = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, и содержит четыре элемента;*

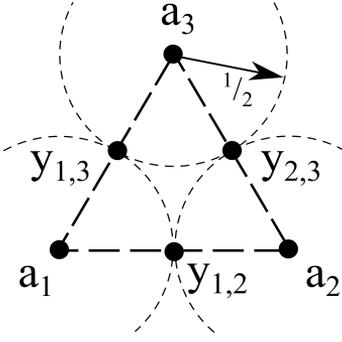


Рис. 3. Граница \mathcal{A} и компакт Y .

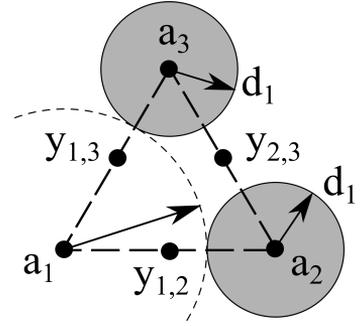


Рис. 4. Окрестность $B_{d_1}(A_1)$ (закрашена серым).

- 3) максимальным компактом Штейнера является компакт Y ;
- 4) минимальных компакта Штейнера три: $\{y_{1,2}, y_{2,3}\}$, $\{y_{2,3}, y_{1,3}\}$, $\{y_{1,2}, y_{1,3}\}$.

Доказательство. Заметим сначала, что $d_H(A_i, Y) = \frac{1}{2}$. Пусть $d_1 \in [0, \frac{1}{2})$. Очевидно (см. рис. 4), что для $j = 2, 3$ справедливо

$$\max_{a_j \in A_j} |a_j B_{d_1}(A_1)| = |a_1 B_{d_1}(A_1)| = 1 - d_1.$$

Следовательно,

$$d_1 + \sum_{j \neq i} \max_{a_j \in A_j} |a_j B_{d_1}(A_1)| = 2 - d_1 > \frac{3}{2} = S_{\mathcal{A}}(Y).$$

С учетом имеющихся симметрий, получаем аналогичные неравенства для остальных индексов. Значит, по теореме 4, существует единственный класс астрокомпактов Штейнера одинаковой взвешенности для \mathcal{A} , и Y ему принадлежит.

По построению, Y совпадает со своим каноническим расширением относительно \mathcal{A} , поэтому является максимальным компактом в классе $\Sigma_d(\mathcal{A})$. Удаление из компакта Y ровно одной точки сохраняет сумму расстояний до граничных компактов, удаление двух — увеличивает. Поэтому в классе $\Sigma_d(\mathcal{A})$ имеется три минимальных компакта Штейнера: $\{y_{1,2}, y_{2,3}\}$, $\{y_{2,3}, y_{1,3}\}$, $\{y_{1,2}, y_{1,3}\}$ и, значит, в этом классе содержится ровно четыре элемента.

□

Теперь докажем обобщение теоремы 4.

3.3. Третье условие

В доказательстве третьего условия будет использовано тривиальное неравенство

$$S_{\mathcal{A}}(K) \geq \sum_{i=1}^m d_{KA_i} + \sum_{j=m+1}^n d_{A_j K}$$

Для чисел d_1, \dots, d_l , где $d_j \geq 0$ и $l \geq 2$, обозначим компакт $\bigcap_{i=1}^l B_{d_i}(A_i)$ через L_{d_1, \dots, d_l} . Заметим, что он может быть пуст; в этом случае определим расстояние до него от любого другого компакта равным ∞ .

Лемма 15. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Пусть для фиксированного $m \in \mathbb{N}$, $2 \leq m < n$, для некоторых чисел d_1, \dots, d_l , где $d_j \geq 0$, и компакта K' выполняется

$$\sum_{i=1}^m d_i + \sum_{j=m+1}^n \max_{a_j \in A_j} |a_j L_{d_1, \dots, d_m}| > S_{\mathcal{A}}(K').$$

Тогда не существует астрокомпакта Штейнера K для \mathcal{A} такого, что $d_{KA_i} = d_i$, $i = 1, \dots, m$.

Доказательство. Предположим, что компакт K такой, что $d_{KA_i} = d_i$, $i = 1, \dots, m$, является астрокомпактом Штейнера. Тогда $K \subset L_{d_1, \dots, d_m}$ и для каждого $j = m+1, \dots, n$ справедливо

$$d_H(A_j, K) \geq d_{A_j K} = \max_{a_j \in A_j} |a_j K| \geq \max_{a_j \in A_j} |a_j L_{d_1, \dots, d_m}|.$$

Значит,

$$S_{\mathcal{A}}(K) \geq \sum_{i=1}^m d_{KA_i} + \sum_{j=m+1}^n d_{A_j K} \geq \sum_{i=1}^m d_i + \sum_{j=m+1}^n \max_{a_j \in A_j} |a_j L_{d_1, \dots, d_m}| > S_{\mathcal{A}}(K').$$

Получили противоречие с тем, что K является астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} . Утверждение доказано. \square

Следствие 7. Используя в доказательстве леммы 15 свойство из леммы 11 вместо свойства из леммы 12, аналогично получаем, что не существует астрокомпакта Штейнера K для \mathcal{A} такого, что $d_H(A_i, K) = d_i$, $i = 1, \dots, m$.

Теорема 6. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Пусть для некоторого компакта K' , для фиксированного $m \in \mathbb{N}$, $2 \leq m < n$, для каждого набора $\{i_1, \dots, i_m\} \subset$

$\{1, \dots, n\}$ и для любых $d_i \geq 0$ таких, что $\sum_{l=1}^m d_{i_l} < \sum_{l=1}^m d_H(A_{i_l}, K')$, выполняется

$$\sum_{l=1}^m d_{i_l} + \sum_{j \notin \{i_1, \dots, i_m\}} \max_{a_j \in A_j} |a_j L_{d_{i_1}, \dots, d_{i_m}}| > S_A(K').$$

Тогда существует единственный класс астрокомпактов Штейнера одинаковой взвешенности для \mathcal{A} , и K' ему принадлежит.

Доказательство. Пусть K — некоторый компакт, и пусть $d_i := d_H(A_i, K)$. Если хотя бы для одного набора $\{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1, \dots, n\}$ выполняется $\sum_{l=1}^m d_{i_l} < \sum_{l=1}^m d_H(A_{i_l}, K')$, то из данного по условию неравенства по лемме 15 и следствию 7 следует, что K не является астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} . Если же для всех наборов $\{i_1, \dots, i_m\}$ справедливо $\sum_{l=1}^m d_{i_l} \geq \sum_{l=1}^m d_H(A_{i_l}, K')$ и K является астрокомпактом Штейнера, то сложив все эти неравенства и поделив на C_{n-1}^{m-1} , получим, что $S_A(K) \geq S_A(K')$, и что K' тоже является астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} . Поскольку все неравенства обращаются в равенство, то для всех наборов $\{i_1, \dots, i_m\}$ справедливо $\sum_{l=1}^m d_H(A_{i_l}, K) = \sum_{l=1}^m d_H(A_{i_l}, K')$.

Рассмотрим набор $\{i_1, \dots, i_{m+1}\}$, он имеет $m+1$ различных m -элементных подмножеств вида $\{j_1, \dots, j_m\}$, для каждого из которых выполняется равенство $\sum_{l=1}^m d_H(A_{j_l}, K) = \sum_{l=1}^m d_H(A_{j_l}, K')$. Сложив все такие равенства и поделив на m , получим равенство $\sum_{l=1}^{m+1} d_H(A_{i_l}, K) = \sum_{l=1}^{m+1} d_H(A_{i_l}, K')$, из которого, с учетом $\sum_{l=1}^m d_H(A_{i_l}, K) = \sum_{l=1}^m d_H(A_{i_l}, K')$, получаем равенство $d_H(A_{i_{m+1}}, K) = d_H(A_{i_{m+1}}, K')$. Аналогично получаем $d_H(A_i, K) = d_H(A_i, K')$ для всех i , следовательно, класс одинаковой взвешенности единственный. Теорема доказана. \square

Если числа d_1, \dots, d_l , где $d_j \geq 0$, таковы, что для любого $j = 1, \dots, l$ выполняется $A_j \subset B_{d_j} \left(\bigcap_{i=1, i \neq j}^l B_{d_i}(A_i) \right)$, то набор (d_1, \dots, d_l) будем называть *астровектором весов* для границы $\{A_1, \dots, A_l\}$.

Следствие 8. Если для некоторого компакта K выполняется $d_i = d_H(A_i, K)$ для любого $i = 1, \dots, l$, то набор (d_1, \dots, d_l) является астровектором весов для границы $\{A_1, \dots, A_l\}$. Таким образом, в лемме 15 и теореме 6 можно ограничиться астровекторами весов $(d_{i_1}, \dots, d_{i_m})$ для границы $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_m}\}$.

Следствие 9. Метод, описанный в теоремах 3, 4 и 6, особенно хорошо работает для грани, симметричных относительно поворота на угол $\frac{2\pi}{n}$, поскольку для них перебор наборов индексов длины m сокращается с точностью до симметрии.

4. Некоторые экстремальные свойства симметричных выпуклых границ в $H(\mathbb{R}^m)$

В данном разделе изучаются экстремальные свойства выпуклых границ в $H(\mathbb{R}^m)$, обладающих определенной симметрией относительно гиперплоскости. Кроме того, в \mathbb{R}^m рассматривается задача Ферма—Штейнера для частично свободной границы, точки которой принадлежат фиксированным строго выпуклым компактам, и доказывается формула первой вариации длины астросети.

4.1. Свойства симметричных выпуклых границ в $H(\mathbb{R}^m)$

Пусть π — гиперплоскость в \mathbb{R}^m , отделяющая выпуклые компакты A_1, \dots, A_n от компакта A_0 . Для $a \in A_0$ определим функцию $s(a) := \sum_{i=1}^n r_{A_i}(a)$.

Лемма 16. *Во введенных выше обозначениях:*

- 1) функция $s(a)$ непрерывна;
- 2) точка минимума функции $s(a)$ лежит на ∂A_0 ;
- 3) если компакт A_0 — выпуклый, то функция $s(a)$ выпуклая;
- 4) если компакт A_0 — строго выпуклый, то точка минимума функции $s(a)$ единственна.

Доказательство. 1. Следует из непрерывности функций $r_{A_i}(a)$, см. лемму 3.

2. Предположим, что точка минимума a_0 функции $s(a)$ при $a \in A_0$ является внутренней точкой компакта A_0 , то есть лежит в нем вместе с некоторой окрестностью $B_\varepsilon(a_0)$. Пусть l' — прямая, проходящая через a_0 перпендикулярно π . Рассмотрим точку $c_i \in P_{A_i}(a_0)$, она существует по лемме 5. Тогда для точки $a'_0 \in l' \cap B_\varepsilon(a_0)$, взятой между a_0 и гиперплоскостью π , и каждого $i = 1, \dots, n$ верно $|a'_0 c_i| < |a_0 c_i|$ (см. рис. 5). Кроме того, $|a'_0 A_i| \leq |a'_0 c_i|$. Таким образом, $s(a'_0) < s(a_0)$, что противоречит минимальности функции $s(a)$ в точке a_0 . Значит, $a_0 \in \partial A_0$.

3. Следует из выпуклости функций $r_{A_i}(a)$ на выпуклом множестве A_0 , см. следствие 2.

4. Предположим, что точек минимума функции $s(a)$ хотя бы две: a_1 и a_2 . Из выпуклости функции $s(a)$ получаем, что любая точка отрезка $[a_1, a_2]$ является точкой минимума функции $s(a)$. Поскольку компакт A_0 — строго выпуклый, то любая точка из интервала (a_1, a_2) является внутренней точкой A_0 , что противоречит пункту 1. □

Пусть теперь к тому же $n = 2m$, а π_1 — гиперплоскость в $\mathbb{R}^{m'}$, перпендикулярная π и такая, что строго выпуклый компакт A_0 симметричен относительно π_1 , а компакты A_i и A_{m+i} симметричны относительно π_1 для всех $i = 1, \dots, m$ (см. рис. 6).

Лемма 17. *Во введенных выше обозначениях, точка минимума функции $s(a)$ при $a \in A_0$ лежит в $\partial(A_0 \cap \pi_1)$.*

Доказательство. Предположим, что точка минимума a_0 функции $s(a)$ при $a \in A_0$ не лежит в π_1 . Тогда, в силу имеющихся симметрий, точка a'_0 , симметричная a_0 относительно π_1 , также лежит в A_0 и является точкой минимума $s(a)$. Однако, по лемме 16, точка минимума функции $s(a)$ на строго выпуклом компакте A_0 единственна. Полученное противоречие показывает, что $a_0 \in A_0 \cap \pi_1$. Тогда, по лемме 16, a_0 лежит в $\partial(A_0 \cap \pi_1)$. \square

Лемма 18. *Во введенных выше обозначениях, если норма в $\mathbb{R}^{m'}$ строго выпуклая, a_0 — точка минимума функции $s(a)$ при $a \in A_0$, то точки $c_{A_i}(a_0)$ и $c_{A_{m+i}}(a_0)$ симметричны относительно π_1 , $i = 1, \dots, m$.*

Доказательство. Предположим, что $c_{A_i}(a_0)$ и $c_{A_{m+i}}(a_0)$ не симметричны относительно π_1 , и построим точку $c'_i \in A_{m+i}$, симметричную $c_{A_i}(a_0)$ относительно π_1 . В силу имеющихся симметрий, $|a_0 c'_i| = |a_0 A_{m+i}|$, что, по лемме 6, противоречит единственности точки, в которой достигается $|a_0 A_{m+i}|$. \square

Далее рассматриваем случай $m' = 2$. В этом случае π и π_1 являются прямыми, и справедливо следующее утверждение.

Лемма 19. *Пусть в \mathbb{R}^2 даны перпендикулярные прямые l и l_1 , выпуклые компакты A_1, \dots, A_{2m} отделены от строго выпуклого компакта A_0 прямой l , компакт A_0 симметричен относительно l_1 , и компакты A_i и A_{m+i} симметричны относительно l_1 при $i = 1, \dots, m$. Тогда единственной точкой минимума функции $s(a)$ при $a \in A_0$ является одна из двух точек множества $\partial A_0 \cap l_1$, ближайшая к точке $l \cap l_1$.*

Доказательство. По лемме 17, точка минимума функции $s(a)$ при $a \in A_0$ лежит в компакте $\partial(A_0 \cap l_1)$, который является отрезком $[a_0, a'_0]$, где точка a_0 ближе к l , чем точка a'_0 . Очевидно, что для каждого $i = 1, \dots, n$ и любой точки $a \in (a_0, a'_0]$ справедливо $|a A_i| = |a c_{A_i}(a)| > |a_0 c_{A_i}(a)| \geq |a_0 c_{A_i}(a_0)| = |a_0 A_i|$. Значит, $s(a) > s(a_0)$ для любой точки $a \in (a_0, a'_0]$, поэтому a_0 и только она является точкой минимума $s(a)$. \square

Пусть теперь компакт A_0 является образом гомотетии $H_{b_0}^d$ некоторого строго выпуклого, симметричного относительно l_1 компакта B_0 , отделенного прямой l от A_1, \dots, A_{2m} , где $b_0 \in l_1 \cap B_0$ — центр гомотетии, а

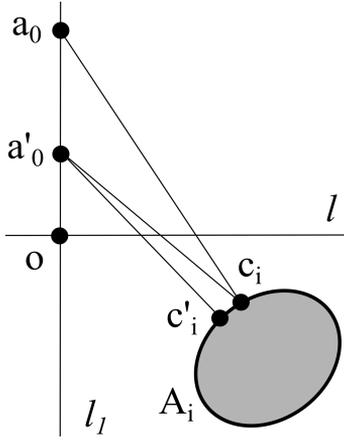


Рис. 5. К лемме 16.

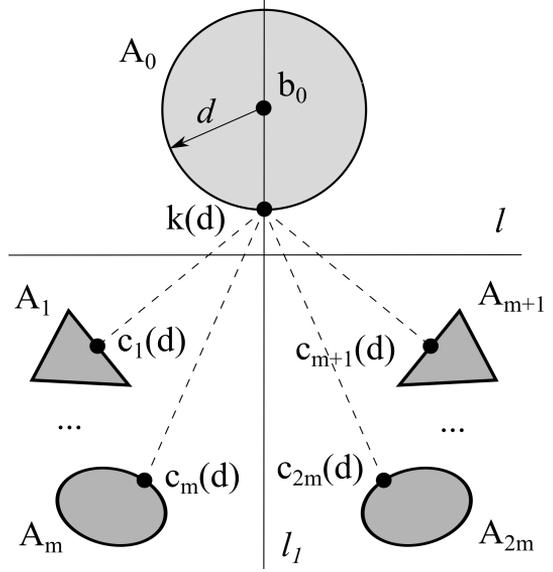


Рис. 6. К следствию 10.

$d \geq 0$ — коэффициент. Пусть $d_0 > 0$ — такое число, при котором $H_{b_0}^{d_0}(B_0)$ касается l . Для $d \in [0, d_0)$ определим функцию

$$\tilde{s}(d) := \min_{k \in H_{b_0}^d(B_0)} s(k).$$

По лемме 19, для каждого $d \in [0, d_0)$ точкой минимума функции $\tilde{s}(d)$ является одна из двух точек множества $\partial H_{b_0}^d(B_0) \cap l_1$, ближайшая к точке $l \cap l_1$. Обозначим эту точку через $k(d)$. Значит, $\tilde{s}(d) = s(k(d))$, и из непрерывности зависимости $k = k(d)$ и непрерывности функции $s(k)$ следует непрерывность $\tilde{s}(d)$. Аналогично показывается непрерывность функций $r_i(d) := r_{A_i}(k(d))$. Произвольную точку из $P_{A_i}(d)$ будем обозначать через $c_i(d)$.

Лемма 20. *Во введенных выше обозначениях, функции $\tilde{s}(d)$ и $r_i(d)$, $i = 1, \dots, n$, строго монотонно убывают при $d \in [0, d_0)$.*

Доказательство. Заметим, что при увеличении d точка $k(d)$ движется по l_1 по направлению от b_0 к ортогональной проекции A_i на прямую l , но не достигает ее ни для одного i . Таким образом, при $0 \leq d_1 < d_2 < d_0$ для каждого i справедливо $r_i(d_1) = |k(d_1)c_i(d_1)| > |k(d_2)c_i(d_1)| \geq |k(d_2)c_i(d_2)| = r_i(d_2)$. Значит, функция $r_i(d)$ строго монотонно убывает, поэтому $\tilde{s}(d)$ — тоже. \square

Разработанная теория позволяет аналогичным образом получить следующий результат.

Следствие 10. *Во введенных выше обозначениях, если $A_0 = B_d(b_0)$ (см. рис. 6), то функция*

$$\tilde{s}(d) := \min_{k \in B_d(b_0)} s(k)$$

и $r_i(d) := r_{A_i}(k(d))$, $i = 1, \dots, n$, непрерывны и строго монотонно убывают при $d \in [0, |b_0|]$.

4.2. Задача Ферма—Штейнера для частично свободной границы в \mathbb{R}^m

Считаем, что в \mathbb{R}^m задана евклидова метрика. Докажем формулу первой вариации длины астросети с частично свободной границей, у которой каждая граничная вершина a_i выбирается среди точек выпуклого компакта A_i , $i = 1, \dots, n$. Напомним, что если метрическая проекция точки k на компакт A одноточечная, то ее единственный элемент обозначаем через $c_A(k)$.

Лемма 21 (формула первой вариации длины астросети с граничными вершинами, лежащими в выпуклых компактах). *Пусть в \mathbb{R}^m с евклидовой метрикой даны выпуклые компакты A_1, \dots, A_n , и пусть k — точка, не лежащая ни в одном A_i . Тогда функция $s(k) := \sum_{i=1}^n r_{A_i}(k)$ дифференцируема по направлениям в точке k и ее производная в направлении \vec{v} равна*

$$\frac{\partial s(k)}{\partial v} = (\vec{n}, \vec{v}),$$

где \vec{n} — сумма единичных направляющих векторов отрезков $c_{A_i}(k)k$.

Доказательство. По лемме 8, если точка k не лежит ни в одном A_i , то функция $s(k)$ дифференцируема по направлениям, и справедливо равенство

$$\frac{\partial s(k)}{\partial v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r_{A_i}(k)}{\partial v} = \sum_{i=1}^n (\overrightarrow{e_{c_{A_i}(k)k}}, \vec{v}) = \left(\sum_{i=1}^n \overrightarrow{e_{c_{A_i}(k)k}}, \vec{v} \right) = (\vec{n}, \vec{v}).$$

□

Пусть в \mathbb{R}^2 с евклидовой метрикой даны выпуклый компакт K и луч ob , лежащий на не пересекающейся с K прямой l . На внутренних точках луча ob определим функцию $\alpha(a) := \angle oac_K(a)$.

Лемма 22. Функция $\alpha(a)$ обладает следующими свойствами:

- 1) непрерывна;
- 2) если $\alpha(a_1) = \alpha(a_2)$ при $a_1 \neq a_2$, то $\alpha(a) = \alpha(a_1)$ при $a \in [a_1, a_2]$, и $[c_K(a_1), c_K(a_2)] \subset \partial K$;
- 3) монотонно убывает при удалении a от o к b , причем если K — строго выпуклый, то $\alpha(a)$ строго монотонно убывает.

Доказательство. 1. Вектор \vec{ad} невырожден и непрерывно зависит от a , направляющий вектор $\vec{e_{ao}}$ неподвижен. Вектор $\vec{ac_K(a)}$, по лемме 7, непрерывно зависит от a . Поэтому $\cos(\angle oac_K(a))$ как функция a также непрерывен, следовательно, непрерывна и $\alpha(a)$.

2. Рассмотрим два случая расположения метрических проекций точек a_1 и a_2 , $a_1 \neq a_2$. Если $c_K(a_1) = c_K(a_2)$, то, поскольку $c_K(a_1)$ не лежит на прямой a_1a_2 , направления $\vec{a_1c_K(a_1)}$ и $\vec{a_2c_K(a_2)}$ различны, поэтому $\alpha(a_1) \neq \alpha(a_2)$.

Если же $c_K(a_1) \neq c_K(a_2)$, то для каждого $i = 1, 2$ построим прямую l_i , перпендикулярную $a_i c_K(a_i)$ в точке $c_K(a_i)$. Поскольку компакт K — выпуклый, то прямые l_i являются опорными для K . Действительно, без ограничения общности предположим, что прямой l_1 принадлежит внутренняя точка k_1 компакта K , тогда в ее достаточно малой окрестности, пересекающейся с открытой полуплоскостью, ограниченной прямой l_1 и содержащей точку a_1 , существует точка $k'_1 \in K$. Поскольку компакт K — выпуклый, то в нем лежит и отрезок $[c_K(a_1), k'_1]$, на котором есть точки, более близкие к a_1 , чем точка $c_K(a_1)$, что противоречит определению метрической проекции.

Условие $\alpha(a_1) = \alpha(a_2)$ означает, что отрезки $a_1 c_K(a_1)$ и $a_2 c_K(a_2)$ параллельны. Тогда l_1 и l_2 либо параллельны, либо совпадают. Поскольку компакт K лежит в открытой полуплоскости относительно прямой $a_1 a_2$, то векторы $\vec{a_1 c_K(a_1)}$ и $\vec{a_2 c_K(a_2)}$ направлены внутрь этой полуплоскости и не могут иметь противоположные направления. Значит, $\vec{a_1 c_K(a_1)}$ и $\vec{a_2 c_K(a_2)}$ сонаправлены. Предположим, что l_1 и l_2 параллельны. Как показано выше, для каждого $i = 1, 2$ компакт K касается l_i и лежит в полуплоскости Π_i относительно l_i , не содержащей точки a_i . Одна из полуплоскостей содержится в другой, без ограничения общности, $\Pi_1 \subset \Pi_2$, тогда существуют точки компакта K , лежащие по разные стороны от l_1 , что противоречит тому, что l_1 является опорной для K .

Значит, прямые l_1 и l_2 совпадают, поэтому в ∂K содержится отрезок $[c_K(a_1), c_K(a_2)]$ (и, следовательно, компакт K — нестрого выпуклый). Тогда для каждой точки $c \in [c_K(a_1), c_K(a_2)]$ существует точка

$a \in [a_1, a_2]$, для которой $c = c_K(a)$. Действительно, построим a на пересечении l с прямой, проходящей через c параллельно $a_1c_K(a_1)$. При этом $\alpha(a) = \alpha(a_1)$ для любой точки $a \in [a_1, a_2]$.

3. По пункту 1, функция $\alpha(a)$ непрерывна, поэтому если она имеет локальный экстремум в точке a_0 , то в некоторой его окрестности существуют точки $a_1 \neq a_2$ такие, что a_0 принадлежит интервалу (a_1, a_2) , в которых функция принимает одинаковые значения, отличные от $\alpha(a_0)$. Тогда, по пункту 2, $\alpha(a_0) = \alpha(a_1)$, что противоречит тому, что a_0 — точка локального экстремума. Следовательно, $\alpha(a)$ монотонна. При движении a по лучу от точки o значение $\max_{k \in K} \angle oak$ стремится к нулю, при этом $0 < \alpha(a) \leq \max_{k \in K} \angle oak$. Значит, $\alpha(a)$ монотонно убывает при удалении a от o к b .

Если компакт K — строго выпуклый, то рассмотрим $a_1 \neq a_2$. Если $c_K(a_1) \neq c_K(a_2)$, то, по пункту 2, из того, что $[c_K(a_1), c_K(a_2)] \not\subset \partial K$, следует, что $\alpha(a_1) \neq \alpha(a_2)$. Если $c_K(a_1) = c_K(a_2)$, то также $\alpha(a_1) \neq \alpha(a_2)$. Значит, функция $\alpha(a)$ строго монотонно убывает при удалении a от o к b .

□

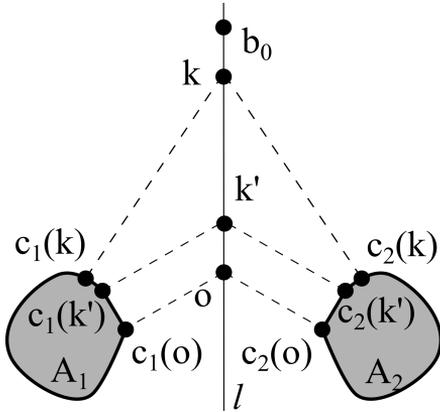


Рис. 7. К лемме 23.

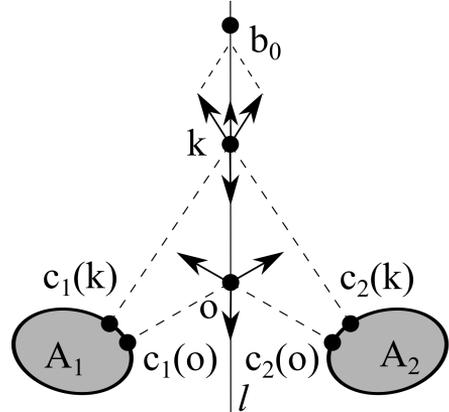


Рис. 8. К лемме 23.

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 23. Пусть на \mathbb{R}^2 даны выпуклые компакты A_1 и A_2 , симметричные относительно прямой l и не пересекающиеся с ней, и точки o и b_0 на l такие, что $\angle_{A_1}(o)ob_0 = \frac{2\pi}{3}$ и $\angle_{A_1}(b_0)b_0o < \frac{\pi}{3}$. Пусть компакт A_0 равен $\{b_0\}$. Пусть также k' — ближайшая к b_0 точка отрезка $[o, b_0]$,

для которой выполняется $\angle_{c_{A_1}}(k')k'b_0 = \frac{2\pi}{3}$ (см. рис. 7). Тогда функция $s(k) := \sum_{i=0}^2 r_{A_i}(k)$ на отрезке $[o, b_0]$ обладает следующими свойствами:

- 1) строго монотонно возрастает при движении k от k' к b_0 ;
- 2) достигает минимума на отрезке $[o, k']$.

Доказательство. 1. По лемме 22, для любой точки $k \in (k', b_0]$ выполняется $\angle_{c_{A_1}}(k)ko < \frac{\pi}{3}$. Поскольку вектор $\overrightarrow{e_{c_{A_1}}(k)k} + \overrightarrow{e_{c_{A_2}}(k)k}$ лежит на l , а его длина больше длины вектора $\overrightarrow{e_{c_{A_0}}(k)k} = \overrightarrow{e_{b_0}k}$, который тоже лежит на l и противоположен сумме, то вектор \vec{n} в точке k сонаправлен с \vec{v} (см. рис. 8). Отсюда $(\vec{n}, \vec{v}) > 0$, а по лемме 21, $\frac{\partial s(k)}{\partial v} = (\vec{n}, \vec{v})$, поэтому $s(k)$ строго монотонно возрастает при движении k от k' к b_0 .

2. Если $k' \neq o$, то для любой точки $k \in [o, k']$, по лемме 22, верно $\angle_{c_{A_1}}(k)kb_0 = \frac{2\pi}{3}$, поэтому в каждой такой точке k выполняется $\vec{n} = 0$. Значит, по лемме 21, функция $s(k)$ постоянна на $[o, k']$. По пункту 1 доказываемого утверждения, $s(k)$ возрастает при удалении от k' к b_0 , поэтому каждая точка из отрезка $[o, k']$ является точкой минимума $s(k)$ на отрезке $[o, b_0]$. \square

5. Задача Ферма—Штейнера для границ в $H(\mathbb{R}^2)$, полученных некоторыми деформациями вершин правильного треугольника

В данном разделе мы найдем решение задачи Ферма—Штейнера для некоторых трехэлементных границ, инвариантных относительно группы своих симметрий, элементы которых являются выпуклыми симметричными с некоторыми дополнительными ограничениями. Для таких границ будет применена теория из разделов 2.4, 3.1 и 4.2.

5.1. Общий случай симметричного выпуклого граничного компакта с to -подмножеством, пересекающим ось симметрии

Пусть в \mathbb{R}^2 на прямой l_1 лежат точки b_1, z_1, o так, что $z_1 \in (b_1, o)$, причем точное расположение z_1 мы определим позднее. Поворотом прямой l_1 и точек b_1, z_1 относительно точки o на угол $-\frac{2\pi}{3}(i-1)$ получим прямую l_i и точки b_i, z_i , $i = 2, 3$. Пусть l'_i — прямая, перпендикулярная прямой l_i в точке o , $i = 1, 2, 3$.

Пусть A_1 — выпуклый компакт, состоящий более чем из одной точки, симметричный относительно прямой l_1 , не пересекающийся с прямыми

l'_2 и l'_3 и такой, что выполняется

$$\sup_{a_1 \in A_1} |a_1 z_1| = |b_1 z_1|.$$

Пусть A_i — компакт, получившийся из A_1 поворотом относительно o на угол $-\frac{2\pi}{3}(i-1)$, $i = 2, 3$. Рассмотрим границу $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\} \subset H(\mathbb{R}^2)$ (см. рис. 9).

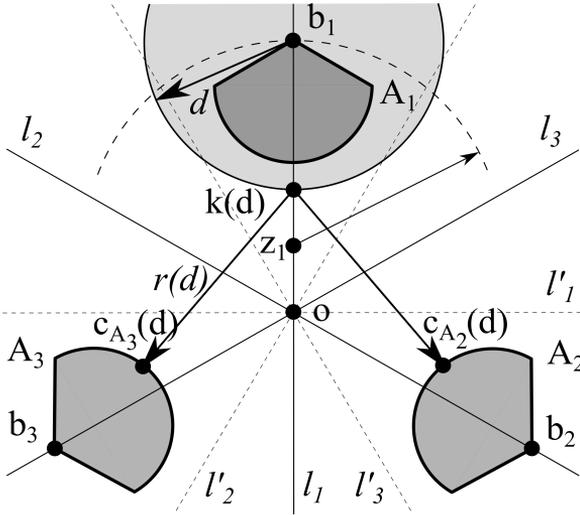


Рис. 9. Граница \mathcal{A} .

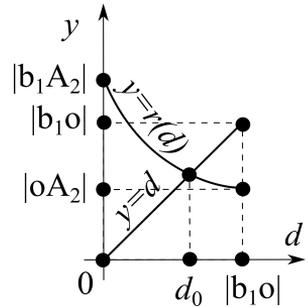


Рис. 10. К лемме 25.

При $d \in (0, |b_1 o|)$ круг $B_d(b_1)$ отделен прямой l'_1 от компактов A_2 и A_3 , поэтому из леммы 19 следует, что единственной точкой минимума функции $s(k) = |kA_2| + |kA_3|$ при $k \in B_d(b_1)$ является одна из двух точек множества $\partial B_d(b_1) \cap l_1$, ближайшая к точке o ; обозначим эту точку минимума через $k(d)$. В силу выпуклости A_i , евклидовости метрики и леммы 6, верно следующее утверждение.

Лемма 24. *Существует единственная точка $c_{A_i}(d) \in A_i$ такая, что $|k(d)c_{A_i}(d)| = |k(d)A_i|$.*

Для удобства, положим $r(d) := r_2(d) = r_3(d)$ и докажем следующее свойство.

Лемма 25. *Существует единственное значение d_0 такое, что $d_0 = r(d_0)$.*

Доказательство. Тожественная функция d , очевидно, непрерывна и строго монотонно возрастает при $d \in [0, |b_1 o|]$, принимая все значения

из отрезка $[0, |b_1o|]$. По лемме 3, функция $r(d)$ непрерывна. По следствию 2, $r(d)$ является выпуклой на l , поэтому монотонно убывает при $d \in [0, |b_1o|]$. Следовательно, $r(d)$ принимает все значения из отрезка $[|oA_2|, |b_1A_2|]$. Поскольку $|b_1o| = |b_2o| \geq |oA_2|$, то области значений функций d и $r(d)$ пересекаются, поэтому существует единственное значение d_0 такое, что $d_0 = r(d_0)$ (см. рис. 10). □

Для удобства, положим $z_1 := k(d_0)$, $c_{21} := c_{A_2}(d_0)$ и $c_{31} := c_{A_3}(d_0)$. Поворотом точек z_1, c_{21}, c_{31} относительно точки o на угол $-\frac{2\pi}{3}$ построим точки z_2, c_{32}, c_{13} соответственно, а поворотом на угол $-\frac{2\pi}{3}$ — точки z_3, c_{23}, c_{12} соответственно (при этом точки c_{ij} и c_{ik} , принадлежащие одному A_i , могут совпасть, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$). По построению, эти точки обладают свойством $|b_i z_i| = |c_{ji} z_i| = d_0$ для всех $i = 1, 2, 3$ и $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$. Пусть $Z := \{z_1, z_2, z_3\}$; очевидно, что он переходит в себя при повороте относительно o на углы $\frac{2\pi}{3}$ и $-\frac{2\pi}{3}$ (см. рис. 11).

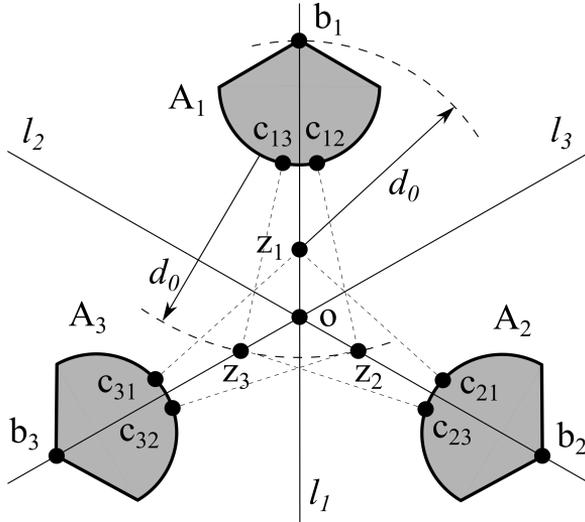


Рис. 11. Компакт $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$.

Определим функцию $s_1(d) := d + 2r(d)$, из определений и доказанного ранее следует, что

$$s_1(d) = d + \min_{k \in B_d(b_1)} (|kA_2| + |kA_3|).$$

Поскольку $\angle b_1 o c_{A_i}(|b_1 o|) = \frac{2\pi}{3}$, $i = 2, 3$, то, по лемме 23, функция $s_1(d)$ достигает минимума при $d = |b_1 o|$, постоянна на отрезке $[d', |b_1 o|]$, где

d' — наименьшее значение, при котором $\angle_{c_{A_2}}(k(d'))k(d')o = \frac{\pi}{3}$, и строго монотонно убывает при $d \in [0, d']$. Далее предполагаем также, что граница \mathcal{A} такова, что $z_1 \in [k(d'), b_1]$.

Теорема 7. В принятых выше обозначениях для границы \mathcal{A} :

- 1) длина астросети Штейнера $S_{\mathcal{A}}$ равняется $3d_0$;
- 2) множество $\Sigma(\mathcal{A})$ состоит из одного класса одинаковой взвешенности с вектором расстояний $\vec{d} = (d_0, d_0, d_0)$;
- 3) Z является единственным минимальным астрокомпактом Штейнера.

Доказательство. Поскольку A_1 лежит вместе с z_1 в одной полуплоскости относительно l_2 , а с z_3 — в разных, и точки z_1 и z_3 симметричны относительно l_2 , то для любой точки $a_1 \in A_1$ выполняется неравенство $|a_1 z_1| < |a_1 z_3|$. Аналогично, $|a_1 z_1| < |a_1 z_2|$. Тогда

$$\sup_{a_1 \in A_1} |a_1 Z| = \sup_{a_1 \in A_1} |a_1 z_1| = |b_1 z_1| = d_0.$$

В силу имеющихся симметрий, выполняется

$$\sup_{z \in Z} |z A_1| = \max\{|z_1 A_1|, |z_2 A_1|, |z_3 A_1|\} = |c_{12} z_2| = |c_{13} z_3| = d_0.$$

Тогда, по определению, $d_H(A_1, Z) = \max\{|b_1 z_1|, |c_{12} z_2|\} = d_0$. В силу имеющихся симметрий, $S_{\mathcal{A}}(Z) = 3d_0$.

Как показано ранее, $s_1(d)$ строго монотонно убывает при $d \in [0, d_0]$, при этом $d_0 = d_H(A_1, Z)$ и $s_1(d_0) = 3d_0 = S_{\mathcal{A}}(Z)$, значит, при $d_1 \in [0, d_0]$ выполняется

$$d_1 + \min_{k \in B_{d_1}(b_1)} (|k A_2| + |k A_3|) = s_1(d_1) > S_{\mathcal{A}}(Z).$$

С учетом имеющихся симметрий получаем аналогичные неравенства для $d_i \in [0, d_0]$, $i = 2, 3$, $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$:

$$d_i + \min_{k \in B_{d_i}(b_i)} (|k A_j| + |k A_l|) = s_1(d_i) > S_{\mathcal{A}}(Z).$$

Таким образом, граница \mathcal{A} удовлетворяет условиям теоремы 3, следовательно, существует единственный класс астрокомпактов Штейнера одинаковой взвешенности для \mathcal{A} , и Z ему принадлежит. Значит, $S_{\mathcal{A}} = S_{\mathcal{A}}(Z) = 3d_0$. Удаление из Z хотя бы одной точки увеличивает расстояние по крайней мере до одного граничного компакта, поэтому Z является (единственным) минимальным астрокомпактом Штейнера.

Теорема доказана. □

Следствие 11. По теореме 1, максимальным астрокомпактом Штейнера для \mathcal{A} из теоремы 7 является компакт $K_{\vec{d}} = B_{d_0}(A_1) \cap B_{d_0}(A_2) \cap B_{d_0}(A_3)$, а любой астрокомпакт Штейнера K удовлетворяет включению $Z \subset K \subset K_{\vec{d}}$. Поскольку все z_i различны, то $K_{\vec{d}}$ имеет мощность континуума, поэтому $\Sigma(\mathcal{A})$ содержит континуум элементов.

Следствие 12. Для границы \mathcal{A} описанного вида справедливо $b_i \in \text{to}_K(A_i)$ для каждого $K \in \Sigma(\mathcal{A})$.

5.2. Непрерывные 1-параметрические деформации границы с последующими деформациями других видов

В этом разделе мы рассмотрим некоторые выпуклые 1-параметрические деформации трехэлементных границ, в каждой из которых нулевое значение параметра соответствует границе, состоящей из односточечных компактов, расположенных в вершинах правильного треугольника $\Delta a_1 a_2 a_3$ с центром o и радиусом описанной окружности 1. Мы явным образом построим астрокомпакты Штейнера для этих границ, а также изучим деформации с помощью редукции и перехода к порождающим границам. Необходимые определения и результаты см. в разделе 2.4.

5.2.1. Раздутье в круги и деформация с помощью редукции

В данном разделе мы построим 1-параметрическое семейство границ, для которой изучим деформации граничных компактов, полученные с помощью теории редукции и не увеличивающие длину минимальной астросети.

Рассмотрим границу $\mathcal{A}_r^\circ = \{A_1, A_2, A_3\} \subset H(\mathbb{R}^2)$ такую, что $A_i = B_r(a_i)$, $i = 1, 2, 3$, где $r \in (0, \frac{1}{2})$ — параметр.

Пусть $b_i \in A_i$ — точка, наиболее удаленная от o . Пусть точка $z_i \in (o, b_i)$ — такая, что $|b_i z_i| = \frac{3(1+r)}{3+4r}$. Положим $Z_{\min}^r := \{z_1, z_2, z_3\}$ (см. рис. 12).

Теорема 8. В принятых выше обозначениях для границы \mathcal{A}_r° при $r \in (0, \frac{1}{2})$:

- 1) длина астросети Штейнера $S_{\mathcal{A}_r^\circ}$ равняется $\frac{9(1+r)}{3+4r}$;
- 2) множество $\Sigma(\mathcal{A}_r^\circ)$ состоит из одного класса одинаковой взвешенности с вектором расстояний $\vec{d} = (d_0, d_0, d_0)$, где $d_0 = \frac{3(1+r)}{3+4r}$;
- 3) Z_{\min}^r является единственным минимальным астрокомпактом Штейнера;

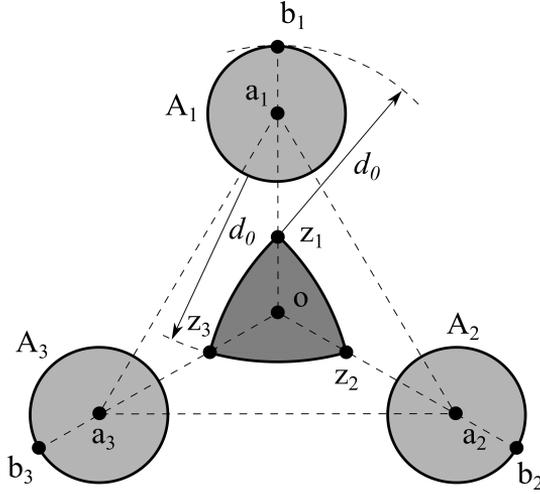


Рис. 12. Граница \mathcal{A}_r^o и астрокомпакты Штейнера: минимальный $\{z_1, z_2, z_3\}$ и максимальный (закрашен темно-серым).

4) $Z_{\max}^r := \bigcap_{i=1}^3 B_{d_0+r}(a_i)$ является единственным максимальным астрокомпактом Штейнера.

Доказательство. Построим прямую l_i через точки o и a_i , а также прямую l'_i , перпендикулярную l_i в точке o . При $r \in (0, \frac{1}{2})$ компакт A_i не пересекается с прямыми l'_2 и l'_3 . Очевидно, что для любой точки $z'_i \in (o, a_i)$ точка b_i — единственная, для которой выполняется $\sup_{a \in A_i} |az'_i| = |b_iz'_i|$. Более того, компакты A_2 и A_3 получаются из A_1 поворотом на углы $-\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$ соответственно. Кроме того, $\angle oz_1c_{A_2}(z_1) = \angle oz_1a_2 < \frac{\pi}{3}$. Таким образом, граница \mathcal{A}_r^o удовлетворяет всем условиям, наложенным на границу из раздела 5.1.

Найдем точки $z'_i \in (o, b_i)$, в которых будет выполняться $|b_iz'_i| = |z'_iA_j|$, $i \in \{1, 2, 3\}$ и $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$. По лемме 24, существует единственная точка $c_{ji} \in A_j$, для которой выполняется $|z'_iA_j| = |z'_ic_{ji}|$. Несложно заметить, что в случае, когда A_j — круги, верно $c_{ji} = \partial A_j \cap [z'_i, a_j]$. Поэтому равенство $|b_iz'_i| = |z'_iA_j|$ эквивалентно $|a_iz'_i| + r = |a_jz'_i| - r$, $i \neq j$. Положим $|oz'_i| = x$, тогда $\angle a_icos_i = \frac{2\pi}{3}$ и, по теореме косинусов, равенство $|a_iz'_i| + r = |a_jz'_i| - r$ эквивалентно

$$1 + r - x = \sqrt{1 + x^2 - 2x \cos \frac{2\pi}{3}} - r.$$

Единственным решением этого уравнения относительно x является $x = \frac{4r(1+r)}{3+4r}$. Обозначим $|b_i z'_i| = |z'_i A_j|$ через $d_0 = d_0(r)$, тогда $d_0(r) = 1 + r - x(r) = \frac{3(1+r)}{3+4r}$. Следовательно, точки z_i являются искомыми.

Тогда, по теореме 7, единственным минимальным астрокомпактом Штейнера является компакт Z_{\min}^r , множество $\Sigma(\mathcal{A}_r^\circ)$ состоит из одного класса одинаковой взвешенности, и его вектор расстояний $\vec{d} = (d_0, d_0, d_0)$, причем $d_H(A_i, Z_{\min}^r) = d_0$ и $S_{\mathcal{A}_r^\circ} = 3d_0 = \frac{9(1+r)}{3+4r}$. По теореме 1, максимальный астрокомпакт Штейнера в этом классе имеет вид $K_{\vec{d}}(\mathcal{A}_r^\circ) = \cap_{i=1}^3 B_{d_0}(A_i)$, который совпадает с $\cap_{i=1}^3 B_{d_0+r}(a_i)$. \square

Изучим поведение $S_{\mathcal{A}_r^\circ}$ при деформации $r \in (0, \frac{1}{2})$. Из непрерывности функции $d_0(r)$ непосредственной проверкой получаем следующий результат.

Лемма 26. *Функция $d_0(r) = \frac{3(1+r)}{3+4r}$ строго монотонно убывает при $r \in [0, \frac{1}{2}]$, принимая все значения из отрезка $[\frac{9}{10}, 1]$.*

Следствие 13. *Функция $S_{\mathcal{A}_r^\circ}$ строго монотонно убывает при $r \in (0, \frac{1}{2})$, принимая все значения из отрезка $(\frac{27}{10}, 3)$.*

Теперь изучим возможные деформации границы \mathcal{A}_r° с неувеличением длины минимальной астросети Штейнера относительно астрокомпакта Штейнера Z_{\min}^r . Построим открытые множества $F_i := U_{d_0}(z_i) \setminus (B_{d_0}(z_j) \cup B_{d_0}(z_k))$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ (см. рис. 13). Как показано ранее, для каждого $i \in \{1, 2, 3\}$ и $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ существует единственная точка $c_{ji} \in A_j$, для которой выполняется $|b_i z_i| = |c_{ji} z_i| = d_0$.

Лемма 27. *В принятых выше обозначениях для границы \mathcal{A}_r° при $r \in (0, \frac{1}{2})$:*

- 1) *редукцией $R_{Z_{\min}^r}(A_i)$ является $\{c_{ij}, c_{ik}, b_i\}$, а Z_{\min}^r -облаком компакта A_i является F_i , где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$;*
- 2) *граница \mathcal{A}_r° обладает свойством from-покрытия компакта Z_{\min}^r .*

Доказательство. Для удобства обозначим $K := Z_{\min}^r$. Тогда $\text{to}_{A_i}(K) = \{z_j, z_k\}$, $\text{from}_K(A_i) = \{c_{ij}, c_{ik}\}$ и $\text{to}_K(A_i) = \{b_i\}$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Значит, $R_K(A_i) = \{c_{ij}, c_{ik}, b_i\}$, а множество F_i является K -облаком компакта A_i .

Сравним длины $|z_i c_{ij}|$ и d_0 . Непосредственными вычислениями по теореме косинусов находим $\cos \angle z_j a_i o = \frac{3+6r+2r^2}{3+6r+4r^2}$, откуда

$$|z_i c_{ij}|^2 = \frac{3(1+r)^2(9-18r-36r^2+48r^3+64r^4)}{(3+4r)^2(3+6r+4r^2)}.$$

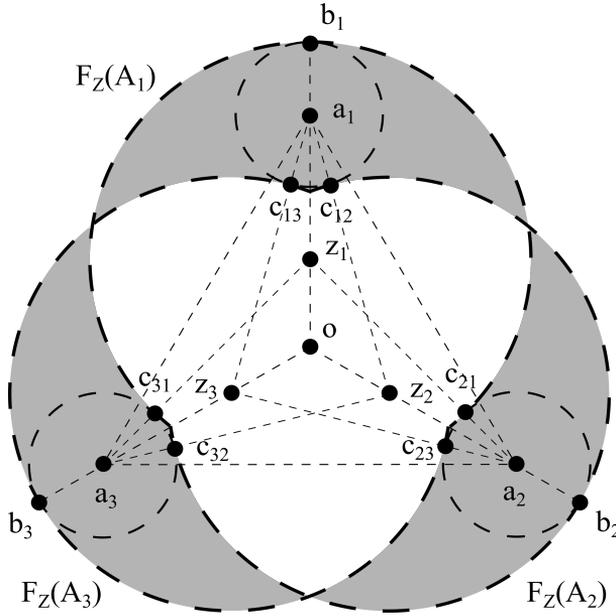


Рис. 13. Z -облака границы \mathcal{A}_r° для $Z = Z_{\min}^r$.

Решая неравенство $|z_i c_{ij}|^2 < d_0^2$ при $r > 0$, получаем, что $r \in (0, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Таким образом, при $r \in (0, \frac{1}{2})$ выполняется $|z_i c_{ij}| < d_0$, то есть $\{z_i\} \subset U_{d_0}(\{c_{ij}, c_{ik}\})$. Поскольку к тому же $K \setminus \text{to}_{A_i}(K) = \{z_i\}$, то, по определению, \mathcal{A}_r° обладает свойством from-покрытия компакта K . □

Определим границу $\mathcal{B}_r = \{B_1, B_2, B_3\}$ так, что $\{c_{ij}, c_{ik}, b_i\} \subset B_i \subset F_i$, где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Теорема 9. В принятых выше обозначениях для границы \mathcal{B}_r при $r \in (0, \frac{1}{2})$ выполняется $S_{\mathcal{B}_r} \leq S_{\mathcal{A}_r^\circ}$.

Доказательство. По построению и пункту 1 леммы 27, граница \mathcal{B}_r является Z_{\min}^r -деформацией границы \mathcal{A}_r° . По пункту 2 леммы 27, граница \mathcal{A}_r° обладает свойством from-покрытия компакта Z_{\min}^r . Значит, согласно теореме 2, выполняется $S_{\mathcal{B}} \leq S_{\mathcal{A}_r^\circ}$. □

Аналогично можно рассмотреть деформации относительно максимального астрокомпакта Штейнера (см. рис. 14) и любого промежуточного; в общем случае деформации, построенные относительно различных астрокомпактов Штейнера, различны.

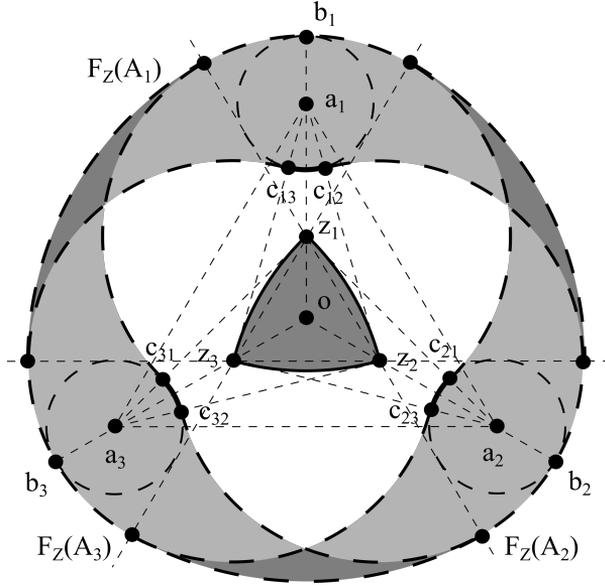


Рис. 14. Z -облака границы \mathcal{A}_r^o для $Z = Z_{\max}^r$.

5.2.2. Растяжение в отрезки вдоль осей симметрии и переход к порождающему подмножеству

В данном разделе мы построим 1-параметрическое семейство границ и продемонстрируем, как работает следствие 4 при переходе к порождающим подмножествам выпуклых граничных элементов. Выпуклая и порождающая границы будут иметь одинаковую длину минимальной астросети и, более того, совпадающие множества астрокомпактов Штейнера.

Рассмотрим границу $\mathcal{A}_t^- = \{A_1, A_2, A_3\} \subset H(\mathbb{R}^2)$ такую, что $A_i = [b_i, c_i]$ — отрезок на луче oa_i длины $2t$ с серединой в точке a_i , причем $c_i \in [a_i, o]$, $i = 1, 2, 3$, где $t \in (0, 1)$ — параметр.

Пусть точка $z_i \in (o, b_i)$ — такая, что $|b_i z_i| = \frac{t^2+3}{t+3}$. Положим $Z_{\min}^t := \{z_1, z_2, z_3\}$ (см. рис. 15).

Теорема 10. В принятых выше обозначениях для границы \mathcal{A}_t^- при $t \in (0, 1)$:

- 1) длина астросети Штейнера $S_{\mathcal{A}_t^-}$ равняется $\frac{3(t^2+3)}{t+3}$;
- 2) множество $\Sigma(\mathcal{A}_t^-)$ состоит из одного класса одинаковой взвешенности с вектором расстояний $\vec{d} = (d_0, d_0, d_0)$, где $d_0 = \frac{t^2+3}{t+3}$;

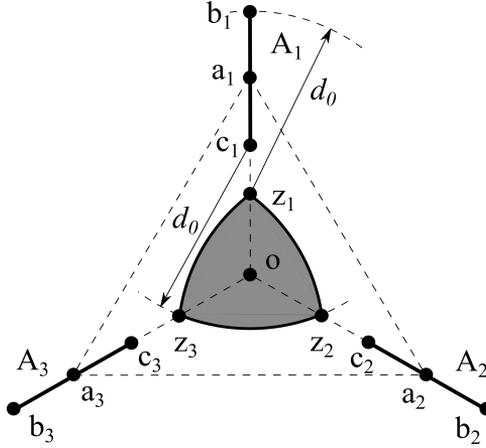


Рис. 15. Граница \mathcal{A}_t^- и астрокомпакты Штейнера: минимальный $\{z_1, z_2, z_3\}$ и максимальный (закрашен темно-серым).

- 3) Z_{\min}^t является единственным минимальным астрокомпактом Штейнера;
- 4) $Z_{\max}^t := \bigcap_{i=1}^3 B_{d_0}(c_i)$ является единственным максимальным астрокомпактом Штейнера.

Доказательство. Построим прямую l_i через точки o и a_i , а также прямую l'_i , перпендикулярную l_i в точке o . При $t \in (0, 1)$ компакт A_i не пересекается с прямыми l'_2 и l'_3 . Очевидно, что для любой точки $z_i \in (o, a_i)$ точка b_i — единственная, для которой выполняется $\sup_{a \in A_i} |az_i| = |b_iz_i|$. Более того, компакты A_2 и A_3 получаются из A_1 поворотом на углы $-\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$ соответственно. Кроме того, $c_{A_2}(z_1) = c_2$ и $\angle oz_1c_2 < \frac{\pi}{3}$. Таким образом, граница \mathcal{A}_t^- удовлетворяет всем условиям, наложенным на границу из раздела 5.1.

Найдем точки $z'_i \in (o, b_i)$, в которых будет выполняться $|b_iz'_i| = |z'_iA_j|$ (здесь и далее $i \in \{1, 2, 3\}$ и $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$). По лемме 24, существует единственная точка $c_{ji} \in A_j$, для которой выполняется $|z'_iA_j| = |z'_ic_{ji}|$. Несложно заметить, что в случае, когда A_j — отрезки, задающие угол $\angle c_joz_i = \angle b_joz_i = \frac{2\pi}{3}$, верно $c_{ji} = c_j$. Поэтому равенство $|b_iz'_i| = |z'_iA_j|$ эквивалентно $|a_iz'_i| + t = |c_jz'_i|$. Положим $|oz'_i| = x$, тогда $\angle a_ico_i = \frac{2\pi}{3}$ и, по теореме косинусов, равенство $|a_iz'_i| + t = |c_jz'_i|$ эквивалентно

$$(1 + t - x)^2 = (1 - t)^2 + x^2 - 2(1 - t)x \cos \frac{2\pi}{3}.$$

Единственным решением этого уравнения относительно x является $x(t) = \frac{4t}{3+t}$. Обозначим $|b_i z'_i| = |z'_i A_j|$ через $d_0 = d_0(t)$, тогда $d_0(t) = 1 + t - x(t) = \frac{t^2+3}{t+3}$. Следовательно, точки z_i являются искомыми.

Тогда, по теореме 7, единственным минимальным астрокомпактом Штейнера является компакт Z_{\min}^t , множество $\Sigma(\mathcal{A}_t^-)$ состоит из одного класса одинаковой взвешенности, и его вектор расстояний $\vec{d} = (d_0, d_0, d_0)$, причем $d_H(A_i, Z_{\min}^t) = d_0$ и $S_{\mathcal{A}_t^-} = 3d_0 = \frac{3(t^2+3)}{t+3}$. По теореме 1, максимальный астрокомпакт Штейнера в этом классе имеет вид $K_{\vec{d}}(\mathcal{A}_t^-) = \bigcap_{i=1}^3 B_{d_0}(A_i)$, который совпадает с $\bigcap_{i=1}^3 B_{d_0}(c_i)$. \square

Изучим поведение $S_{\mathcal{A}_t^-}$ при деформации $t \in (0, 1)$. Из непрерывности функции $d_0(t)$ непосредственной проверкой получаем следующий результат.

Лемма 28. *Функция $d_0(t) = \frac{t^2+3}{t+3}$ строго монотонно убывает при $t \in [0, 2\sqrt{3} - 3]$ и строго монотонно возрастает при $t \in [2\sqrt{3} - 3, 1]$, принимая все значения из отрезка $[4\sqrt{3} - 6, 1]$.*

Следствие 14. *Функция $S_{\mathcal{A}_t^-}$ строго монотонно убывает при $t \in (0, 2\sqrt{3} - 3]$ и строго монотонно возрастает при $t \in [2\sqrt{3} - 3, 1)$, принимая все значения из отрезка $[12\sqrt{3} - 18, 3]$.*

Рассмотрим границу $\mathcal{B}_t^- = \{B_1, B_2, B_3\}$, где $B_i = \{b_i, c_i\}$, точки взяты из элементов границы \mathcal{A}_t^- .

Теорема 11. *В принятых выше обозначениях для границы \mathcal{B}_t^- при $t \in (0, 1)$ верны равенства $S_{\mathcal{B}_t^-} = S_{\mathcal{A}_t^-}$ и, более того, $\Sigma(\mathcal{B}_t^-) = \Sigma(\mathcal{A}_t^-)$.*

Доказательство. Поскольку $A_i = \text{conv}(B_i)$, то граница \mathcal{B}_t^- является порождающей для \mathcal{A}_t^- . Тогда, по следствию 4, $S_{\mathcal{A}_t^-} \leq S_{\mathcal{B}_t^-}$. Кроме того, заметим, что $S_{\mathcal{B}_t^-}(Z_{\min}^t) = S_{\mathcal{A}_t^-}(Z_{\min}^t)$, поэтому $S_{\mathcal{B}_t^-} = S_{\mathcal{A}_t^-}$ и Z_{\min}^t является астрокомпактом Штейнера для границы \mathcal{B}_t^- . Удаление из Z_{\min}^t хотя бы одной точки увеличивает расстояние по крайней мере до одного граничного компакта, поэтому Z_{\min}^t является (единственным) минимальным астрокомпактом Штейнера для \mathcal{B}_t^- .

Поскольку максимальный астрокомпакт Штейнера для границы \mathcal{A}_t^- задается только точками c_i и расстоянием d_0 , то он является максимальным и для границы \mathcal{B}_t^- , поэтому $\Sigma(\mathcal{B}_t^-) = \Sigma(\mathcal{A}_t^-)$. \square

5.2.3. Раздутие в правильные треугольники и переход к порождающему подмножеству

В данном разделе мы построим 1-параметрическое семейство границ, сохраняющее длину минимальной астросети, и продемонстрируем, как работает следствие 4 при переходе к порождающим подмножествам выпуклых граничных элементов. В отличие от прошлого раздела, множество астрокомпактов Штейнера для порождающей границы строго содержится в множестве астрокомпактов Штейнера для выпуклой границы. Кроме того, максимальный астрокомпакт Штейнера не будет выпуклой оболочкой минимального астрокомпакта Штейнера.

Рассмотрим границу $\mathcal{A}_t^\Delta = \{A_1, A_2, A_3\} \subset H(\mathbb{R}^2)$ такую, что A_i — это правильный треугольник $\Delta b_i c_{ij} c_{ik}$ радиуса описанной окружности t с центром в точке a_i , причем $a_i \in [b_i, o]$ и $|c_{ij} b_j| < |c_{ik} b_j|$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, где $t \in (0, \frac{1}{2})$ — параметр.

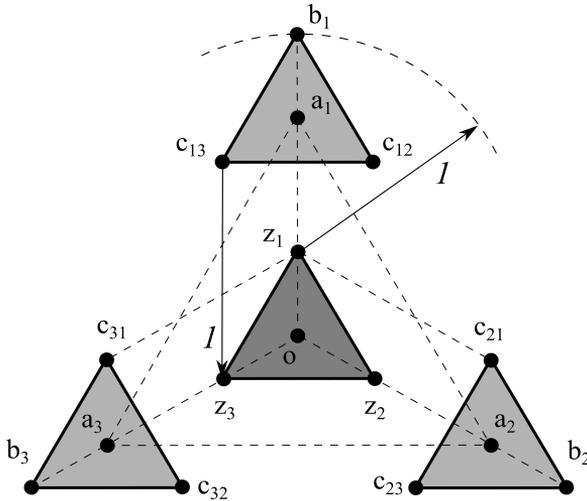


Рис. 16. Граница \mathcal{A}_t^Δ и астрокомпакты Штейнера: минимальный $\{z_1, z_2, z_3\}$ и максимальный (закрашен темно-серым).

Пусть точка $z_i \in (o, b_i)$ — такая, что $|b_i z_i| = 1$. Положим $Z_{\min}^t := \{z_1, z_2, z_3\}$ (см. рис. 16).

Теорема 12. В принятых выше обозначениях для границы \mathcal{A}_t^Δ при $t \in (0, \frac{1}{2})$:

- 1) длина астросети Штейнера $S_{\mathcal{A}_t^\Delta}$ равняется 3;

- 2) множество $\Sigma(\mathcal{A}_t^\Delta)$ состоит из одного класса одинаковой взвешенности с вектором расстояний $\bar{d} = (1, 1, 1)$;
- 3) Z_{\min}^t является единственным минимальным астрокомпактом Штейнера;
- 4) $Z_{\max}^t := \Delta z_1 z_2 z_3$ является единственным максимальным астрокомпактом Штейнера.

Доказательство. Построим прямую l_i через точки o и a_i , а также прямую l'_i , перпендикулярную l_i в точке o . При $t \in (0, \frac{1}{2})$ компакт A_i не пересекается с прямыми l'_2 и l'_3 . Очевидно, что для любой точки $z_i \in (o, a_i)$ точка b_i — единственная, для которой выполняется $\sup_{a \in A_i} |az_i| = |b_i z_i|$. Более того, компакты A_2 и A_3 получаются из A_1 поворотом на углы $-\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$ соответственно. Кроме того, $c_{A_2}(z_1) = c_{21}$ и $\angle o z_1 c_{21} = \frac{\pi}{3}$. Таким образом, граница \mathcal{A}_t^Δ удовлетворяет всем условиям, наложенным на границу из раздела 5.1.

Найдем точки $z'_i \in (o, b_i)$, в которых будет выполняться $|b_i z'_i| = |z'_i A_j|$ (здесь и далее $i \in \{1, 2, 3\}$ и $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$). По лемме 24, существует единственная точка $c_{ji} \in A_j$, для которой выполняется $|z'_i A_j| = |z'_i c_{ji}|$. При $z'_i = z_i$ выполняется $|z'_i b_i| = 1 = |z'_i c_{ji}|$, в то время как при $z'_i \in (o, z_i)$ верно $|z'_i b_i| > |z_i b_i| = |z_i c_{ji}| > |z'_i c_{ji}|$, а при $z'_i \in (z_i, b_i)$ верно $|z'_i b_i| < |z_i b_i| = |z_i c_{ji}| < |z'_i c_{ji}|$. Следовательно, точки z_i являются искомыми, и величина $|b_i z_i| = |z_i A_j|$ равна 1.

Тогда, по теореме 7, единственным минимальным астрокомпактом Штейнера является компакт Z_{\min}^t , множество $\Sigma(\mathcal{A}_t^\Delta)$ состоит из одного класса одинаковой взвешенности, и его вектор расстояний $\bar{d} = (1, 1, 1)$, причем $d_H(A_i, Z_{\min}^t) = 1$ и $S_{\mathcal{A}_t^\Delta} = 3$. По теореме 1, максимальный астрокомпакт Штейнера в этом классе имеет вид $K_{\bar{d}}(\mathcal{A}_t^\Delta) = \bigcap_{i=1}^3 B_1(A_i)$, который совпадает с $\Delta z_1 z_2 z_3$. □

Рассмотрим границу $\mathcal{B}_t^\Delta = \{B_1, B_2, B_3\}$, где $B_i = \{b_i, c_{ij}, c_{ik}\}$, точки взяты из элементов границы \mathcal{A}_t^Δ , $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Построим компакт $Y_{\max}^t := \bigcap_{i=1}^3 B_1(\{c_{ij}, c_{ik}\})$ (см. рис. 17).

Теорема 13. В принятых выше обозначениях для границы \mathcal{B}_t^Δ при $t \in (0, \frac{1}{2})$:

- 1) справедливо $S_{\mathcal{B}_t^\Delta} = S_{\mathcal{A}_t^\Delta} = 3$;

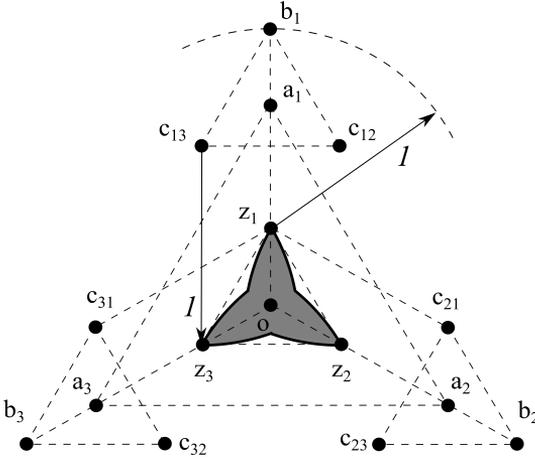


Рис. 17. Граница \mathcal{B}_t^Δ и астрокомпакты Штейнера: минимальный $\{z_1, z_2, z_3\}$ и максимальный Y_{\max}^t (закрашен темно-серым).

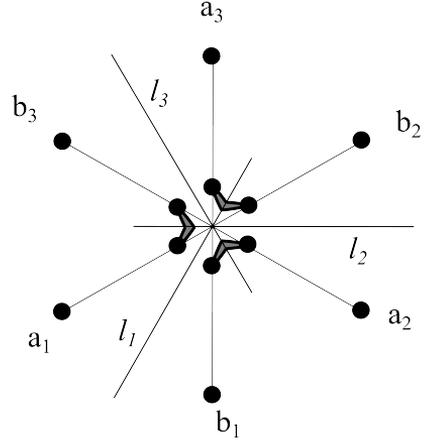


Рис. 18. Граница \mathcal{A}^* .

- 2) множество $\Sigma(\mathcal{B}_t^\Delta)$ состоит из одного класса одинаковой взвешенности с вектором расстояний $\vec{d} = (1, 1, 1)$, причем $\Sigma(\mathcal{B}_t^\Delta) \subsetneq \Sigma(\mathcal{A}_t^\Delta)$;
- 3) Z_{\min}^t является единственным минимальным астрокомпактом Штейнера;
- 4) Y_{\max}^t является единственным максимальным астрокомпактом Штейнера.

Доказательство. Поскольку $A_i = \text{conv}(B_i)$, то граница \mathcal{B}_t^Δ является порождающей для \mathcal{A}_t^Δ . Тогда, по следствию 4, $S_{\mathcal{A}_t^\Delta} \leq S_{\mathcal{B}_t^\Delta}$. Кроме того, заметим, что $S_{\mathcal{B}_t^\Delta}(Z_{\min}^t) = S_{\mathcal{A}_t^\Delta}(Z_{\min}^t)$, поэтому $S_{\mathcal{B}_t^\Delta} = S_{\mathcal{A}_t^\Delta}$ и Z_{\min}^t является астрокомпактом Штейнера для границы \mathcal{B}_t^Δ . Удаление из Z_{\min}^t хотя бы одной точки увеличивает расстояние по крайней мере до одного граничного компакта, поэтому Z_{\min}^t является (единственным) минимальным астрокомпактом Штейнера для \mathcal{B}_t^Δ .

Максимальный астрокомпакт Штейнера Y_{\max}^t для границы \mathcal{B}_r^Δ равен $B_1(B_1) \cap B_1(B_2) \cap B_1(B_3)$ и задается точками c_{ji} , $j \neq i$, в отличие от Z_{\max}^t , поэтому содержится в Z_{\max}^t . При этом $Y_{\max}^t \neq Z_{\max}^t$, поскольку

для любой точки $y \in (z_j, z_k)$ выполняется $|yB_i| = \min\{|yc_{ij}|, |yc_{ik}|\} > 1$. Отсюда верно $\Sigma(\mathcal{B}_t^\Delta) \subsetneq \Sigma(\mathcal{A}_t^\Delta)$. □

Следствие 15. *Границу \mathcal{B}_t^Δ можно рассматривать как объединение трех дубликатов одноочечной границы $\{a_1, a_2, a_3\}$. В данном случае длина минимальной астросети сохраняется и равна длине минимальной астросети для $\{a_1, a_2, a_3\}$, то есть 3. Однако, как было показано в [2], такое выполняется не всегда: существует граница $\mathcal{A}^* = \{A_1, A_2, A_3\}$, являющаяся объединением двух дубликатов одноточечной границы $\{a_1, a_2, a_3\}$, для которой длина минимальной астросети меньше 3. Для этой границы $A_i = \{a_i, b_i\}$, $i = 1, 2, 3$, точки b_i получены из a_i поворотом вокруг o на $\frac{\pi}{3}$ (см. рис. 18).*

Кроме того, класс $\Sigma(\mathcal{B}_t^\Delta)$ инвариантен относительно группы симметрий границы \mathcal{B}_t^Δ , в отличие от каждого отдельного взятого класса решений для границы \mathcal{A}^ .*

Список литературы

- [1] Тропин А. М., “Оценка длины минимальной параметрической сети в гиперпространствах при деформации граничного множества”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **25:2** (2021), 81–107.
- [2] Ivanov, A., Tropin, A. and Tuzhilin, A., “Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance”, *Journal of Geometry*, 2017, № 108, 575–590.
- [3] Балашов М. В., “Условие Лишица метрической проекции в гильбертовом пространстве”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **22:1** (2018), 13–29.
- [4] Демьянов В. Ф., Васильев Л. В., *Недифференцируемая оптимизация*, Наука, Москва, 1981, 384 с.

Sufficient conditions for minimality of star networks in hyperspaces

Tropin A.M.

The Fermat–Steiner problem is to find a point in the metric space Y such that the sum of the distances from it to the points of some finite fixed subset $A \subset Y$, called the boundary, is minimal. We will call the minimal sum of distances the length of the minimum astronnet. We consider this problem in the hyperspace $Y = H(X)$ of nonempty, closed and bounded subsets of the proper metric space X ; moreover, the Hausdorff metric is introduced on $H(X)$. Since X is proper space, all elements of $H(X)$ are compact. Each solution of the Fermat–Steiner problem will be called the Steiner astrocompact; its set is divided into

classes with equal weight, each of which corresponds to its own vector of distances to the boundary compact sets.

In this article, we prove three sufficient conditions for the given compact set to be a Steiner astrocompact for a given boundary. Also, these conditions guarantee the uniqueness of the class of Steiner astrocompact spaces with equal weight. This theory is used to completely solve the Fermat–Steiner problem for some symmetric convex three-element boundaries in \mathbb{R}^2 , and this is demonstrated by examples.

Keywords: Fermat–Steiner problem, star network, minimal astronnet, Steiner astrocompact, hyperspace, Hausdorff distance, metric projection, point-to-set distance function, first variation.

References

- [1] Tropin, A. M., “An estimate for the length of a minimal parametric network in hyperspaces under deformation of the boundary set”, *Intelligent Systems*, **25**:2 (2021), 81–107 (In Russian)
- [2] Ivanov, A., Tropin, A. and Tuzhilin, A., “Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance”, *Journal of Geometry*, 2017, № 108, 575–590
- [3] Balashov M. V., “Lipschitz condition for metric projection in Hilbert space”, *Fundamental and Applied Mathematics*, **22**:1 (2018), 13–29 (In Russian)
- [4] Demyanov V. F., Vasilyev L. V., *Non-differentiable optimization*, Science, Moscow, 1981 (In Russian), 384 c.