Классы линейных р-автоматов с операциями суперпозиции

А. А. Часовских[1]

Для классов линейных автоматов над простыми конечными полями с операциями суперпозиции найдены все предполные классы.

Ключевые слова: конечный автомат, линейный автомат, операции суперпозиции, полнота, замкнутый класс, предполный класс, простое поле.

Для заданного простого числа p через E_p будем обозначать поле из p элементов, $E_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Линейный р-автомат строится из сумматора по модулю p и задержек с начальным состоянием a, $a \in E_p$, с использованием операций композиции [1]. Класс линейных р-автоматов вместе с операциями суперпозиции обозначим LS_p.

Для класса LS_2 в работе [2] были найдены все предполные классы, то есть максимальные по включению замкнутые по операциям суперпозиции собственные подмножества. Здесь будут получены все предполные классы в LS_p в случае любого простого p.

Следуя работе [1], через $E_p[\xi]$ будем обозначать множество многочленов от переменной ξ с коэффициентами из E_p, а через $E'_p(\xi)$ — множество отношений многочленов из $E_p[\xi]$, с ненулевым свободным членом знаменателя.

Множество всех формальных степенных рядов переменной ξ с коэффициентами из E_p обозначим $R_p(\xi)$. На множестве $R_p(\xi)$ естественным образом вводим операции сложения и умножения. Для $\alpha \in R_p(\xi)$ через $\alpha(0)$ обозначаем свободный член ряда α.

Нетрудно видеть, что каждый элемент $\frac{u}{v}$ множества $E'_p(\xi)$ можно представить некоторым рядом μ из $R_p(\xi)$ таким, что $\mu \cdot v = u$. При этом коэффициенты ряда μ образуют периодическую (с предпериодом) последовательность.

Согласно работе [1], линейный автомат с n входами из LS_p определяет некоторое отображение f из $R_p(\xi)^n$ в $R_p(\xi)$, для которого в $E'_p(\xi)$ найдутся μ_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ такие, что

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \alpha_i + \mu_0. \tag{1}$$

[1] *Часовских Анатолий Александрович* — доцент каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: chasovskikh@mail.ru.

Chasovskikh Anatoly Alexandrovich — associate professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

В этом случае через $U(f)$ мы для удобства обозначаем множество $\{\ \mu_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\ \}$.

Положим:

$$T_a = \{f \mid f \in LS_p, f \text{ сохраняет } a \text{ в начальный момент}\}, a \in E_p,$$

$$M_1 = \left\{\ f \mid f \in LS_p, \forall \mu, \mu \in U(f), \mu - \mu(0) \in \xi^2 E'_p(\xi)\ \right\}.$$

Упорядочим все неприводимые приведенные многочлены из $E_p[\xi]$: p_1, p_2, $\ldots$ так, что $p_1 = \xi$. Положим далее:

$$M_i = \left\{\ f \mid f \in LS_p, \forall \frac{u}{v}, \frac{u}{v} \in U(f), p_i \not| v \right\}, i \in \{2, 3, \ldots\}.$$

Через V_1 обозначим множество всех автоматов из LS_p, которые в начальный момент зависят не более чем от одного входа, а через V_p — множество всех таких f, $f \in LS_p$, что, если для f выполнено (1), то $\sum_{i=1}^{n} \mu_i(0) = 1$.

Теорема 1. *Множество $JS_p = \{V_1, V_p, T_0, T_1, \ldots, T_{p-1}, M_1, M_2, \ldots\}$ состоит из всех предполных классов в LS_p.*

Теорема 2. *JS_p — приведенная критериальная система [1] в LS_p.*

Список литературы

[1] Часовских А.А., “Условия полноты линейно-р-автоматных функций”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **18**:3 (2014), 203–252.

[2] Часовских А.А., “Линейно-автоматные функции с операциями суперпозиции”, *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*, 2013, № 8, 3–13.

Linear p-automata classes with superposition operations

Chasovskikh A.A.

All precomplete classes are found for classes of linear automata over simple finite fields with superposition operations.

Keywords: finite automaton, linear automaton, operation of superposition, completeness, closed class, maximum subclass, finite field.

References

[1] Chasovskikh A.A., “Completeness conditions for linear automata functions”, *Intelligent systems*, **18**:3 (2014), 203–252 (In Russian).

[2] Chasovskikh A.A., “Linear automata functions with superposition operations”, *Neurocomputers: development, application*, 2013, № 8, 3–13 (In Russian).