ES_I-замыкание мультифункций ранга 2: критерий полноты, классификация и типы базисов

В. И. Пантелеев[1], Э. С. Тагласов[2]

Мультифункции представляют собой функции, задаваемые на конечном множестве и возвращающие в качестве своих значений все подмножества рассматриваемого множества. Оператор суперпозиции приводит к континууму замкнутых множеств. Поэтому возникает необходимость рассмотрения операторов замыкания, которые наряду с суперпозицией содержат другие операции. В работе рассматривается ES_I-замыкание мультифункций, полученное применением операции суперпозиции, основанной на пересечении множеств, и оператора разветвления по предикату равенства. Для мультифункций, задаваемых на двухэлементном множестве, указаны все предполные множества, сформулирован и доказан критерий полноты. Приведена классификация мультифункций, основанная на принадлежности предполным множествам, описаны все типы базисов.

Ключевые слова: замыкание; предикат равенства; мультифункция; замкнутое множество; суперпозиция, критерий полноты.

Введение

Теория гипероперации — функций, которые отображают наборы элементов из множества A в непустые подмножества A берет начало в 30-х годах прошлого века, когда Ф. Марти [17] определил гипергруппы, начал анализировать их свойства и применять их к группам, рациональным дробям и алгебраическим функциям. Под гипергруппой понималось множество A с бинарной операцией умножения $(a, b) \to ab$, сопоставляющей любой паре элементов из A непустое подмножество в A.

В последствии эта идея была развита и гипергруппы стали рассматриваться как частный случай гиперструктур — множеств с заданными

[1] *Пантелеев Владимир Иннокентьевич* — д.ф.-м.н, Институт математики и информационных технологий, Иркутский государственный университет, e-mail: vl.panteleyev@gmail.com;

Panteleev Vladimir Innokentievich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Institute of Mathematics and Information Technologies, Irkutsk State University

[2] *Тагласов Эдуард Станиславович* — магистрант ИМИТ ИГУ, e-mail: taglasov1@gmail.com

Taglasov Eduard Stanislavovich, student, Institute of Mathematics and Information Technologies, Irkutsk State University

на них гипероперациями. С различными приложениями гиперструктур можно ознакомиться в [12, 1]. Следующим шагом в теории гиперструктур стало изучение частичных гиперструктур — множеств с заданными на них частичными гипероперациями[1]. Частичные гипероперации отображают наборы элементов из множества A в произвольные (в том числе и пустое) подмножества A.

Наряду с изучением гиперструктур стали активно изучаться и алгебры (частичных) гипероперации. При этом отдельно выделяют алгебры операций и алгебры частичных операций. Операции на множестве понимаются в обычном смысле, а частичные операции отображают наборы элементов из множества A в элементы множества A, но возможно и в пустое подмножество A. Отождествив одноэлементное подмножество $\{a\}$ с элементом a, можно говорить об алгебрах операций, частичных операций и гипероперации как подалгебрах алгебры частичных гипероперации. Стоит заметить, что наряду с термином «операция» достаточно часто в литературе используется и термин «функция»[2]. Алгебре функций и алгебре частичных функций на конечном множестве посвящена монография [14]. Алгебру функций на конечном множестве A часто называют алгеброй $|A|$-значных функций.

Говоря об алгебре функций, частичных функций, гиперфункций или частичных гиперфункций подразумевают, что используется оператор суперпозиции. Суперпозиция связана с такими понятиями как терм и значение терма на наборе значений неизвестных. Это приводит к тому, что во-первых, формально, суперпозиция не является алгебраической операцией на множестве функций. В монографии [3] показано, как это формальное противоречие можно преодолеть. Во-вторых для гиперфункций и мультифункций при вычислении значения терма на заданном наборе значений переменных возможна ситуация, когда приходится доопределять функции, заданные на одном множестве, до функций, заданных на другом множестве. И это доопределение можно выполнить различными способами. И в-третьих, решетки подалгебр функций, частичных, гипер- и частичных гиперфункций являются счетными или континуальными, поэтому интерес вызывают алгебры, которые наряду с операцией суперпозиции, содержат и другие операции, приводящие к конечному множеству подалгебр. Одной из таких является операция разветвления по предикату [4].

В представленной работе рассматриваются мультифункции, заданные на множестве $E_2 = \{0, 1\}$. При этом, традиционно, вместо терми-

[1] В работе [19] вместо термина «частичная гипероперация» используется термин «мультиоперация».

[2] Вместо термина «частичная гиперфункция» мы, следуя [19], используем термин «мультифункция».

на «алгебра» используется термин «замкнутое множество», вместо «порождающее множество» — «полное множество». Замыкание множеств мультифункций использует суперпозицию и разветвление по предикату равенства (E-замыкание). Сформулирован и доказан критерий полноты множества мультифункций, перечислены все предполные множества, выполнена классификация мультифункций относительно принадлежности предполным множествам и найдены все типы базисов. Применен подход, основанный на рассмотрении мультифункций, как не всюду определенных функций.

E-замыкание для множеств частичных функций изучалось в [5, 6, 7], а для гиперфункций — в [9, 18].

1. Основные понятия и определения

Всюду определенной n-местной функцией на конечном множестве $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ называется отображение $f : A^n \to A$.

Пусть $A \subseteq C$, тогда $f : A^n \to C$ называется n-местной не всюду определенной функцией на A, а множество $C \setminus A$ — множеством «неопределенностей» функции f.

Пусть $f(f_1, ..., f_m)$ — суперпозиция с внешней функцией f и внутренними функциями $f_1, ..., f_m$.

Если функции $f, f_1, ..., f_m$ всюду определены на A, то значение суперпозиции $f(f_1, ..., f_m)$ на наборе $(a_1, ..., a_n) \in A^n$ определяется как

$$f(f_1(a_1, ..., a_n), ..., f_m(a_1, ..., a_n)).$$

Для не всюду определенных функций в общем случае набор

$$(f_1(a_1, ..., a_n), ..., f_m(a_1, ..., a_n))$$

принадлежит C^m и не принадлежит A^m, что не позволяет вычислить

$$f(f_1(a_1, ..., a_n), ..., f_m(a_1, ..., a_n)).$$

Доопределим некоторым образом функцию f до функции $f^\# : C^m \to C$, причем для произвольного набора $(a_1, ..., a_m) \in A^m$ должно выполняться

$$f(a_1, ..., a_m) = f^\#(a_1, ..., a_m).$$

Тогда значение суперпозиции $f(f_1, ..., f_m)$ на наборе $(a_1, ..., a_n)$ можно определить следующим образом:

$$f(f_1, ..., f_m)(a_1, ..., a_n) = f^\#(f_1(a_1, ..., a_n), ..., f_m(a_1, ..., a_n)).$$

В соответствии с этим определением находится значение супепозиции на всех наборах и значит суперпозиция $f(f_1, ..., f_m)$ задает некоторую не всюду определенную функцию g на множестве A.

Первые исследования в теории дискретных не всюду определенных функций были посвящены так называемым частичным функциям. Множество неопределенностей для таких функций состоит из одного элемента, обозначаемого символом $*$. Первый важный результат для этих функций был получен в [11]. В этой работе сформулирован и доказан критерий полноты для частичных функций, заданных на двухэлементном множестве. В [2] есть ссылка на более раннюю публикацию этого результата в Китае.

Доопределение частичной функции $f : A^n \to A \cup \{*\}$ до функции $f^\# : (A \cup \{*\})^n \to A \cup \{*\}$ выполняется следующим образом: для произвольного набора $(a_1, ..., a_n)$, содержащего $*$, выполняется

$$f^\#(a_1, ..., a_n) = *.$$

В [10] тоже рассматривались не всюду определенные функции, задаваемые на двухэлементном множестве $A = \{0, 1\}$. Множество неопределенностей также состояло из одного элемента, который обозначался символом 2, но фактически это было множество $\{0, 1\}$, т.е. речь в работе шла о гиперфункциях.

Дадим строгие определения множеств мультифункций ($\mathcal{M}$), гиперфункций ($\mathcal{H}$), частичных ($\mathcal{O}^*$) и всюду определенных ($\mathcal{O}$) функций на конечном множестве A. Пусть $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\mathcal{M}_n = \left\{f \mid f : A^n \to 2^A\right\},\ \mathcal{M} = \bigcup_n \mathcal{M}_n,$$

$$\mathcal{H}_n = \left\{f \mid f : A^n \to 2^A \setminus \{\varnothing\}\right\},\ \mathcal{H} = \bigcup_n \mathcal{H}_n,$$

$$\mathcal{O}_n^* = \{f \mid f : A^n \to A \cup \{\varnothing\}\},\ \mathcal{O}^* = \bigcup_n \mathcal{O}_n^*,$$

$$\mathcal{O}_n = \{f \mid f : A^n \to A\},\ \mathcal{O} = \bigcup_n \mathcal{O}_n.$$

Мощность множества A называется рангом мультифункций.

Отождествив одноэлементное подмножество $\{a\}$, $a \in A$ с элементом a, получим следующие вложения:

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}^* \subseteq \mathcal{M},\ \ \mathcal{O} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}.$$

С учетом вышеприведенного отождествления мультифункции можно рассматривать как не всюду определенные на множестве A функции, а пустое подмножество и подмножества, мощность которых больше 1, как неопределенности.

Доопределение m-местной мультифункции f, заданной на множестве A до всюду определенной функции $f^{\#}$ на множестве 2^A удовлетворяет условию

$$f^{\#}(\{a_1\},\ldots,\{a_m\}) = f(a_1,\ldots,a_m)$$

для всех $(a_1,\ldots,a_m) \in A^m$. Если для некоторого $j \in \{1,...,m\}$ выполняется $B_j = \varnothing$, то значение $f^{\#}(B_1,...,B_m)$ естественно положить равным $\varnothing$.

Для остальных наборов $(B_1,...,B_m)$ (в наборе есть подмножество мощности больше 1), принадлежащих $(2^A \setminus \{\varnothing\})^m$ часто встречаемым [15, 16, 19, 20, 13] является следующее определение

$$f^{\#}(B_1,...,B_m) = \bigcup_{\beta_1 \in B_1,...,\beta_m \in B_m} f(\beta_1,...,\beta_m), \tag{1}$$

используемое в гиперструктурах.

Набор $(\beta_1,\ldots,\beta_m) \in A^m$ называется уточнением набора $(B_1,\ldots,B_m) \in (2^A \setminus \{\varnothing\})^m$, если для всех $i \in \{1,\ldots,m\}$ выполняется $\beta_i \in B_i$.

Таким образом, значение функции $f^{\#}$ на наборе $(B_1,...,B_m)$ определяется как объединение значений f полученных при всех возможных уточнениях набора $(B_1,...,B_m)$.

Стоит заметить, что, как показывает следующий пример, при таком доопределении не выполняется равенство

$$[f(g_1,...,g_n)]^{\#} = f^{\#}(g_1^{\#},...,g_n^{\#}).$$

Пример 1. [10] *Пусть мультифункции f, φ, ψ, заданы на множестве $A = \{0,1\}$ следующим образом*

f	0	1
0	$\{1\}$	$\{1\}$
1	$\{1\}$	$\{0\}$

φ	0	1
0	$\{1\}$	$\{0,1\}$
1	$\{0,1\}$	$\{0\}$

ψ	0	1
0	$\{1\}$	$\{0\}$
1	$\{0\}$	$\{0,1\}$

Доопределим их до функций $f^{\#}, \varphi^{\#}, \psi^{\#}$ (при этом не будем отображать наборы, содержащие $\varnothing$)

$f^{\#}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
$\{0\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0\}$	$\{0,1\}$
$\{0,1\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$

$\varphi^{\#}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$
$\{1\}$	$\{0,1\}$	$\{0\}$	$\{0,1\}$
$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$

$\psi^{\#}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0\}$	$\{0,1\}$
$\{1\}$	$\{0\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$
$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$

Пусть $g = f(\varphi,\psi)$. В соответствии с (1) получим

g	0	1
0	$\{0\}$	$\{1\}$
1	$\{1\}$	$\{1\}$

и

$g^{\#}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$

Таким образом
$[f(\varphi,\psi)]^{\#}(\{1\},\{0,1\}) = \{1\}$,
но $[f^{\#}(\varphi^{\#},\psi^{\#})](\{1\},\{0,1\}) = f^{\#}(\varphi^{\#}(\{1\},\{0,1\}),\psi^{\#}(\{1\},\{0,1\}))] =$
$= f^{\#}(\{0,1\},\{0,1\}) = \{0,1\}$.
И значит $[f(\varphi,\psi)]^{\#} \neq f^{\#}(\varphi^{\#},\psi^{\#})$.

В работе [8] вводится доопределение f до $f^{\#}$, отличное от (1). Среди всех множеств, являющихся значениями мультифункции f при всех возможных уточнениях набора $(B_1,...,B_m) \in (2^A \setminus \{\varnothing\})^m$ выбирается общее подмножество, если оно отлично от пустого. Иначе, когда не найдены общие подмножества, берется объединение.

Данный подход находит объяснение, например, при интерпретации подмножеств как множеств различных истинностных значений или ответов экспертов. При этом естественным является процесс нахождения общих элементов (ответов), если они есть. Если таких элементов нет, то записываются все возникающие истинностные значения (ответы).

Дадим строгое определение.

Для мультифункции $f(x_1,...,x_m)$, заданной на конечном множестве A доопределение до функции $f^{\#}(x_1,...,x_m)$ на множестве 2^A выполняется следующим образом: если $(B_1,\dots,B_m) \in 2^A$, то

$$f^{\#}(B_1,\dots,B_m) = \begin{cases} \bigcap\limits_{\beta_1\in B_1,\dots,\beta_m\in B_m} f(\beta_1,\dots,\beta_m), & \text{если пересечение не пусто;}\\ \bigcup\limits_{\beta_1\in B_1,\dots,\beta_m\in B_m} f(\beta_1,\dots,\beta_m), & \text{иначе.}\end{cases} \tag{2}$$

Везде, ниже, мы будем использовать это доопределение и не будем отличать множество $\{a\}$ и элемент a (если это не вызывает недоразумения) и, соответственно, отождествлять утверждение $a \in a$ с утверждением $a \in \{a\}$ для $a \in A$.

Несложно убедиться в справедливости неравенства из примера 1 и для определения (2).

Определим множество $\mathcal{M}^{\#}$ как $\mathcal{M}^{\#} = \{f^{\#} \mid f \in \mathcal{M}\}$. Множество $\mathcal{M}^{\#}$ является подмножеством множества всюду определенных функций на множестве 2^A. Каждая функция из множества $\mathcal{M}^{\#}$ на наборах, составленных из одноэлементных подмножеств может принимать произвольное значение, на наборах, содержащих пустое подмножество, она возвращает пустое подмножество, а на остальных наборах ее значение находится по формуле (2).

Приведенный выше пример 1 показывает, что справедливо

Предложение 1. *Множество $M^{\#}$ не замкнуто относительно суперпозиции всюду определенных функций на множестве 2^A.*

Напомним, что значение суперпозиции $f(f_1, ..., f_m)$ на произвольном наборе $(a_1, ..., a_n) \in A^n$ определяется как

$$f(f_1, ..., f_m)(a_1, ..., a_n) = f^{\#}(f_1(a_1, ..., a_n), ..., f_m(a_1, ..., a_n)). \qquad (3)$$

В соответствии с этим, положим по определению

$$f(B_1, \dots, B_m) = f^{\#}(B_1, \dots, B_m) \qquad (4)$$

для произвольного набора $(B_1, \dots, B_m) \in (2^A)^m$.

Для всюду определенных функций определение (3) совпадает с обычным определением суперпозиции, так как в этом случае набор

$$(f_1(a_1, ..., a_n), ..., f_m(a_1, ..., a_n))$$

принадлежит A^m, а на таких наборах функция $f^{\#}$ совпадает с f.

Следующий пример показывает, что для суперпозиции мультифункций не выполняется тождество обобщенной ассоциативности, т.е. в общем случае

$$[f(g_1, ..., g_m)](u_1, ..., u_t) \neq f(g_1(u_1, ..., u_t), ..., g_m(u_1, ..., u_t)).$$

Пример 2. *Пусть мультифункции $g(x_1, x_2), f_1(x), f_2(x)$ и $u(x)$, задаются следующими таблицами*

x_1	x_2	g
0	0	$\{0\}$
0	1	$\{1\}$
1	0	$\{0,1\}$
1	1	$\{0\}$

x	f_1	f_2	u
0	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0,1\}$
1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$

Рассмотрим суперпозицию $f(x) = g(f_1(x), f_2(x))$. Имеем

$$f(0) = \{0\} \text{ и } f(1) = \{0\}.$$

Для $f(u)$ выполняется

$$f(u)(0) = f(u(0)) = f(\{0,1\}) = f(0) \cap f(1) = \{0\}.$$

А для $g(f_1(u(x)), f_2(u(x)))$ справедливо

$$g(f_1(u(x)), f_2(u(x)))(0) = g(\{0,1\}, \{0,1\}) = \\ = g(0,0) \cup g(0,1) \cup g(1,0) \cup g(1,1) = \{0,1\}.$$

В теории дискретных функций важную роль играет понятие сохранение предиката функцией. Распространим это понятие на мультифункции.

Пусть ρ^m — m-местный предикат, заданный на множестве 2^A.

Для мультифункции $f(x_1, ..., x_n)$ будем говорить, что она сохраняет предикат ρ^m, если для любых n наборов

$$(a_{11}, ..., a_{m1}), ..., (a_{1n}, ..., a_{mn})$$

из предиката выполняется то, что набор

$$\big(f(a_{11}, ..., a_{1n}), ..., f(a_{m1}, ..., a_{mn})\big)$$

также принадлежит предикату.

В соответствии с формулой (4) данное определение является корректным.

Множество функций, сохраняющих предикат R, обозначим как $\mathrm{Pol}\ R$.

Замечание 1. *Если m-местный предикат R содержит всего t наборов, то его удобно задавать в виде матрицы размерности $m \times t$ в которой столбцами являются наборы из предиката.*

Пусть задана n-местная мультифункция g и наборы $(\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{mi})$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$, принадлежащие некоторому m-местному предикату, тогда столбец $\begin{pmatrix} g(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}) \\ \vdots \\ g(\alpha_{m1}, \ldots, \alpha_{mn}) \end{pmatrix}$ будем обозначать как $g \begin{pmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \ldots \alpha_{mn} \end{pmatrix}$ и называть значением функции на данных наборах.

В соответствии с этим, функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет m-местный предикат

$$R = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1t} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \ldots \alpha_{mt} \end{pmatrix},$$

если для любых n столбцов $(\beta_{1j}, \ldots, \beta_{mj})^T, j \in \{1, ..., n\}$ из R выполняется

$$f \begin{pmatrix} \beta_{11} \ldots \beta_{1n} \\ \vdots \\ \beta_{m1} \ldots \beta_{mn} \end{pmatrix} \in R.$$

В общем случае множество мультифункций, сохраняющих некоторый предикат, не обязательно замкнуто относительно суперпозиции. Для m-местного предиката R определим m-местный предикат R' следующим образом:

$$(B_1, ..., B_m) \in R' \Leftrightarrow (B_1, ..., B_m) \in R \text{ и } |B_i| = 1 \text{ для всех } i \in \{1, ..., m\}.$$

Предикат R' содержит те и только те наборы из предиката R, в которых не встречается пустое подмножество и подмножества мощности больше 1. Тогда справедлива следующая основная лемма.

Лемма 1. *Пусть мультифункции g, g_1, $\ldots$, g_t заданы на конечном множестве A. Если мультифункция f получена суперпозицией мультифункций g, $g_1, \ldots, g_t$, сохраняющих некоторый m-местный предикат R, заданный на множестве 2^A, то на наборах, которые принадлежат R', значение функции f принадлежит R.*

Доказательство. Пусть наборы $(a_{11}, ..., a_{m1}), ..., (a_{1n}, ..., a_{mn})$ принадлежат R'. Так как все эти наборы построены из одноэлементных подмножеств, то при вычислении значения функции f не будет использоваться формула (2). Поэтому

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a_{11}, \ldots, a_{1n}) \\ \ldots \\ f(a_{m1}, \ldots, a_{mn}) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} g(g_1(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, g_t(a_{11}, \ldots, a_{1n})) \\ \ldots \\ g(g_1(a_{m1}, \ldots, a_{mn}), \ldots, g_t(a_{m1}, \ldots, a_{mn})) \end{pmatrix} =$$
$$= g\begin{pmatrix} g_1(a_{11}, \ldots, a_{1n}) & \ldots & g_t(a_{11}, \ldots, a_{1n}) \\ \ldots & & \\ g_1(a_{m1}, \ldots, a_{mn}) & \ldots & g_t(a_{m1}, \ldots, a_{mn}) \end{pmatrix} =$$
$$= g\left(g_1\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ldots, g_t\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\right)$$

Справедливость леммы следует из того, что мультифункции g, g_1, $\ldots$, g_t, сохраняют предикат R. □

Лемма 2. *Пусть мультифункция $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ получена из мультифункции $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ введением фиктивной переменной x_i, предикат R задан на множестве 2^A. Мультифункция f сохраняет предикат R тогда и только тогда, когда мультифункция g сохраняет предикат R.*

Доказательство. Доказательство леммы следует из того, что для любого набора $(A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n)$ из $(2^A)^n$ выполняется

$$f(A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n) =$$
$$= \begin{cases} \bigcap\limits_{\alpha_i \in A_i} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup\limits_{\alpha_i \in A_i} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n), & \text{иначе} \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} \bigcap\limits_{\alpha_i \in A_i} g(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup\limits_{\alpha_i \in A_i} g(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n), & \text{иначе} \end{cases} =$$
$$= g(A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n)$$

□

Замечание 2. *Пусть мультифункция $f(y_1, \ldots, y_{n-1})$ получена из мультифункции $g(x_1, \ldots, x_n)$ отождествлением переменных x_i и x_j. Пусть g сохраняет некоторый предикат R, тогда необязательно, что f сохраняет предикат R.*

Ниже, в работе рассматриваются мультифункции, задаваемые на множестве $A = E_2 = \{0, 1\}$. При этом для множества E_2 используется обозначение «$-$» (прочерк), а для пустого множества — обозначение $*$. Наряду с термином мультифункция используется термин функция, если это не вызывает недоразумения.

Так как мы не различаем множество из одного элемента и элемент этого множества, то наборы из элементов множества E_2 считаем наборами из элементов множества 2^{E_2}, а наборы, состоящие из одноэлементных подмножеств, считаем также наборами из элементов множества E_2.

Для набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_2^n$ противоположный набор $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ определяется обычным образом, т.е $\bar{0} = 1$ и $\bar{1} = 0$.

Мультифункция f, зависящая от n переменных, записывается в виде вектора $(\tau_{\tilde{0}}, \ldots, \tau_{\tilde{1}})$ длины 2^n, где каждый элемент $\tau_{\tilde{\sigma}}$ есть $f(\tilde{\sigma})$, а $\tilde{0}, \ldots, \tilde{1}$ — все двоичные представления чисел $0, \ldots, 2^n - 1$, соответственно. Для одноместных и двухместных мультифункций такой вектор имеет вид $(f(0)\, f(1))$ и $(f(0,0)\, f(0,1)\, f(1,0)\, f(1,1))$, соответственно.

Пусть f — мультифункция, зависящая от n переменных, $f_1, \ldots, f_m$ — мультифункции или переменные. Для мультифункции g, задаваемой суперпозицией $f(f_1, \ldots, f_m)$ по правилам (3) и (2), будем говорить, что она получена S_I-суперпозицией из функций f, $f_1, \ldots, f_m$.

В соответствии с (4) мы можем находить значение мультифункции на наборах, составленных из элементов множества 2^{E_2}. При этом, на любом наборе, содержащем $*$, мультифункция возвращает $*$.

Пример 3.

$$f(0,-,1)=\begin{cases} f(0,0,1)\cap f(0,1,1), & \text{если пересечение не пусто;}\\ f(0,0,1)\cup f(0,1,1), & \text{иначе.}\end{cases}$$

и $f(0,*,1)=*$

Функция g на наборе $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in(2^{E_2}\setminus\{\varnothing\})^n$ возвращает $*$, тогда и только тогда, когда на любом уточнении этого набора она принимает значение $*$.

Пусть $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in(2^{E_2}\setminus\{\varnothing\})^n$, а C_β — множество всех возможных уточнений набора $(\beta_1,\dots,\beta_n)$. Для мультифункции $g(x_1,\dots,x_n)$ через $g(C_\beta)$ обозначим множество $\{g(\tilde\alpha),\tilde\alpha\in C_\beta\}$.

Лемма 3. *Справедливы следующие утверждения о связи значения мультифункции g на наборе и уточнениях набора.*

- $g(C_\beta)\in\{\{-\},\{0,1\},\{0,1,-\},\{*,-\},\{*,1,-\},\{*,0,-\},\{*,1,0\},\{*,1,-,0\}\}$ *тогда и только тогда, когда* $g(\beta)=-$.
- $g(C_\beta)\in\{\{0\},\{0,-\},\{0,*\}\}$ *тогда и только тогда, когда* $g(\beta)=0$.
- $g(C_\beta)\in\{\{1\},\{1,-\},\{1,*\}\}$ *тогда и только тогда, когда* $g(\beta)=1$.
- $g(C_\beta)\in\{\{*\}\}$ *тогда и только тогда, когда* $g(\beta)=*$.

Доказательство. Доказательство следует непосредственно из формулы (2). □

Будем говорить, что мультифункция $g(x_1,\dots,x_n)$ получается из функций $f_1(x_1,\dots,x_n)$, $f_2(x_1,\dots,x_n)$ с помощью операции разветвления по предикату равенства, если для некоторых $i,j\in\{1,\dots,n\}$ выполняется соотношение

$$g(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n), & \text{если } x_i=x_j,\\ f_2(x_1,\dots,x_n), & \text{в противном случае.}\end{cases}\tag{5}$$

Определим ES_I-замыкание множества $Q\subseteq\mathcal{M}_2$ как множество всех мультифункций из $\mathcal{M}_2$, которые можно получить из Q операциями введения фиктивных переменных, S_I-суперпозиции и разветвления по предикату равенства. ES_I-замыкание множества Q обозначаем как $[Q]$. Мультифункции, отличающиеся только фиктивными переменными, будем обозначать одинаковыми символами.

Множество мультифункций, которое совпадает со своим замыканием называется ES_I-замкнутым множеством. Будем говорить, что множество $R\subseteq Q$ порождает ES_I-замкнутое множество Q (ES_I-полно в множестве Q), если $[R] = Q$. ES_I-полные множества в множестве $\mathcal{M}_2$ называем ES_I-полными множествами или просто полными множествами. ES_I-полные множества в множестве $\mathcal{O}_2$ ($\mathcal{O}_2^*$) называем E-полными.

Множество $R \subseteq \mathcal{M}_2$ называется ES_I-предполным, если ES_I-замыкание R отлично от $\mathcal{M}_2$, но ES_I-замыкание множества $R \cup \{f\}$ совпадает с $\mathcal{M}_2$ для любой мультифункции $f \notin R$.

2. Замкнутые множества

Введем в рассмотрение следующие девять множеств мультифункций ранга 2:
$K_1 = \mathrm{Pol}\, R_1,\ R_1 = (0\,*)$;
$K_2 = \mathrm{Pol}\, R_2,\ R_2 = (1\,*)$;
$K_3 = \mathcal{O}_2^*$;
$K_4 = \mathcal{H}_2$;
$K_5 = \{f \mid f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{*, 1, -\}$ для любого $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_2^n\}$;
$K_6 = \{f \mid f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{*, 0, -\}$ для любого $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_2^n\}$;
$K_7 = \mathrm{Pol} R_7;\ R_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & - \\ 1 & 0 & * & - \end{pmatrix}$;
$K_8 = \mathrm{Pol} R_8;\ R_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 & 1 & - & * & * & * & * \end{pmatrix}$;
$K_9 = \mathrm{Pol} R_9;\ R_9 = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 1 & - & * & * & * & * \end{pmatrix}$.

Теорема 1. *Множества $K_1 - K_9$ являются ES_I-замкнутыми.*

Доказательство. Множества $K_3 - K_6$ — это множества функций, которые не принимают одно из 4-х значений, поэтому эти множества являются ES_I-замкнутыми.

Рассмотрим остальные множества. Замкнутость этих множеств относительно введения фиктивных переменных следует из Леммы 2.

Для множеств K_1, K_2, K_8, K_9 замкнутость относительно суперпозиции следует из Леммы 1, так как соответствующие предикаты, во-первых, содержат все возможные наборы со $*$, а во-вторых, не содержат набора, в котором есть подмножество мощности больше 1.

Соответствующие этим множествам предикаты обладают тем свойством, что

- они содержат все возможные наборы со $*$;
- нет двух двоичных наборов $(\alpha_1\alpha_2)$ и $(\beta_1\beta_2)$ для которых $\alpha_1 = \beta_1$, но $\alpha_2 \neq \beta_2$ или $\alpha_1 \neq \beta_1$, но $\alpha_2 = \beta_2$.

Поэтому множества замкнуты относительно операции разветвления по предикату равенства.

Рассмотрим множество K_7. Покажем, что оно замкнуто относительно суперпозиции.

Пусть функции $f, f_1, \dots, f_m$ сохраняют предикат R_7, а функция

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

не сохраняет предикат R_7, т.е.

$$g\left(\begin{array}{c}\alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_n\end{array}\right) \in \left\{\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & * & * & * & - & - & - \\ 0 & * & - & 1 & * & - & 0 & 1 & - & 0 & 1 & * \end{array}\right\},$$

где для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ выполняется $(\alpha_i \beta_i)^T \in R_7$ и при этом $(\alpha_i \beta_i) \neq (**)$.

В силу того, что набор $(\alpha_i \beta_i)^T$ принадлежит предикату R_7, тогда и только тогда, когда набор $(\beta_i \alpha_i)^T$ тоже принадлежит предикату R_7, рассмотрим только случаи

$$g\left(\begin{array}{c}\alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_n\end{array}\right) \in \left\{\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & - \\ 0 & * & - & 1 & * & - & * \end{array}\right\},$$

Пусть

$$g\left(\begin{array}{c}\alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_n\end{array}\right) \in \left\{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & - \\ * & * & * \end{array}\right\}.$$

Тогда для набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ найдется уточнение $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ такое, что $g(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) \in \{0, 1, -\}$, но на противоположном наборе $(\overline{\alpha'_1}, \dots, \overline{\alpha'_n})$, который является уточнением набора $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ функция g возвращает $*$. Противоречие с Леммой 1.

Из оставшихся 4-х случаев достаточно рассмотреть два, так как два других рассматриваются двойственным образом.

• Пусть $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = g(\beta_1, \dots, \beta_n) = 0$. Для набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ найдется уточнение $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ такое, что $g(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = 0$. На противоположном наборе $(\overline{\alpha'_1}, \dots, \overline{\alpha'_n})$ функция g не возвращает 1. Противоречие с Леммой 1.

• Пусть $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0, g(\beta_1, \dots, \beta_n) = -$. На любом уточнении набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ функция g, очевидно, не возвращает 1. Поэтому по Лемме 1 нет уточнения $(\beta'_1, \dots, \beta'_n)$ набора $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, для которого выполняется $g(\beta'_1, \dots, \beta'_n) = 0$.

Рассмотрим случай, когда $g(\beta'_1, \dots, \beta'_n) = *$ для некоторого набора $(\beta'_1, \dots, \beta'_n) \in C_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}$. Противоречие с Леммой 1 получим в случае $g(\overline{\beta'_1}, \dots, \overline{\beta'_n}) \neq *$. Значит для набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ есть уточнение, на котором функция g возвращает $*$ и нет уточнения на котором функция g возвращает $-$. (Если есть уточнения, на которых функция возвращает $*$ и $-$, то на самом наборе функция возвращает $-$.) Поэтому по Лемме 1 для набора $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ нет уточнения $(\beta'_1, \ldots, \beta'_n)$ такого, что $g(\beta'_1, \ldots, \beta'_n) = -$ или $g(\beta'_1, \ldots, \beta'_n) = 0$. А из этого следует, что $g(\beta_1, \ldots, \beta_n) \neq -$. Получили противоречие.

Пусть $g(\beta'_1, \ldots, \beta'_n) \neq *$ для любого $(\beta'_1, \ldots, \beta'_n) \in C_{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}$.

Тогда для любого уточнения $(\beta'_1, \ldots, \beta'_n)$ набора $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ выполняется $g(\beta_1, \ldots, \beta_n) = -$. Так как найдется уточнение $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ для которого $g(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) = 0$, то снова получаем противоречие с Леммой 1.

А теперь покажем, что множество K_7 замкнуто относительно разветвления по предикату равенства.

Пусть функция $g(x_1, \ldots, x_m)$ получена по формуле (5).

Предположение о том, что функция g не сохраняет предикат R_7 снова приводит к тому, что найдется двоичный набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такой, что

$$g\begin{pmatrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_n \\ \overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

не принадлежит предикату R_7.

Можно заметить, что при вычислении $g\begin{pmatrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_n \\ \overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n \end{pmatrix}$ в верхней строке элементы в i и j позициях совпадают, тогда и только тогда, когда они совпадают в нижней строке.

Таким образом $g\begin{pmatrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_n \\ \overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n \end{pmatrix}$ совпадает с $f_1\begin{pmatrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_n \\ \overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n \end{pmatrix}$ или совпадает с $f_2\begin{pmatrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_n \\ \overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n \end{pmatrix}$. И далее получаем противоречие с тем, что функции f_1 и f_2 сохраняют предикат R_7.

$\square$

Теорема 2. *Для множеств $K_1, \ldots, K_9$ выполняется $K_i \not\subseteq K_j$ при $i \neq j$.*

Доказательство. Справедливость утверждения следует из таблицы 1 в которой на пересечении i-ой строки и j-го столбца находится мультифункция f такая, что $f \in K_i$ и $f \notin K_j$. $\square$

3. Критерий полноты

Для $f(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{M}_2$ определим f_0 — 0-характеристическую функцию следующим образом: $f_0(\tilde{\sigma}) = 1$ тогда и только тогда, когда $f(\tilde{\sigma}) \in \{0, -\}$, в противном случае $f_0(\tilde{\sigma}) = 0$ $(\tilde{\sigma} \in E^n)$. Аналогично определяется f_1 — 1-характеристическая функция для f: $f_1(\tilde{\sigma}) = 1$ тогда и только тогда,

Таблица 1. Попарная различность множеств $K_1 - K_9$

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9
K_1	$\times$	$0-$	$0-$	$**$	00	01	00	$0-$	00
K_2	11	$\times$	-1	$**$	01	01	11	11	11
K_3	11	00	$\times$	$**$	01	01	11	11	11
K_4	11	00	$--$	$\times$	00	11	00	$--$	$--$
K_5	$--$	$--$	$--$	$**$	$\times$	11	11	11	-1
K_6	$--$	$--$	$--$	$**$	00	$\times$	00	00	00
K_7	10	10	$--$	$**$	01	01	$\times$	$--$	$--$
K_8	10	10	$*-$	$**$	01	01	$-*$	$\times$	10
K_9	$1*$	$*0$	$*-$	$**$	01	01	$-*$	0111	$\times$

когда $f(\tilde{\sigma}) \in \{1, -\}$. Отметим, что характеристические функции принадлежат $\mathcal{O}_2$.

Определим бинарную функцию $x \triangleright y$:

$$1 \triangleright 0 = 0, 0 \triangleright 1 = 1, 0 \triangleright 0 = *, 1 \triangleright 1 = -.$$

Лемма 4. *Множество функций $R = P \cup \{\triangleright\}$, где P — E-полное множество в $\mathcal{O}_2$, является полным в $\mathcal{M}_2$.*

Доказательство. Доказательство следует из равенства $f = f_0 \triangleright f_1$ справедливого для любой $f \in \mathcal{M}_2$. □

Определим унарную функцию $\lambda(x)$: $\lambda(0) = *, \lambda(1) = -$.

Лемма 5. *Множество функций $S = P \cup \{\lambda\}$, где P — E-полное множество в классе $\mathcal{O}_2$, является полным в классе $\mathcal{M}_2$.*

Доказательство. Доказательство следует из Леммы 4 и представления $\triangleright$ следующей суперпозицией: $x \triangleright y = x \to \big(y \cdot (\lambda(x \vee y))\big)$, где $\to, \cdot, \vee$ это импликация, умножение и дизъюнкция (функции из $\mathcal{O}_2$). □

Будем в дальнейшем использовать обозначение f_{K_i} для функции, не принадлежащей множеству K_i ($i \in \{1, \ldots, 9\}$).

Лемма 6. *Справедливо* $[0, 1, f_{K_3}, f_{K_4}] = \mathcal{M}_2$.

Доказательство. Из f_{K_3} и f_{K_4} подстановкой констант 0 и 1 можно получить функции-константы $(*)$ и $(-)$. В [5] показано, что $[0, 1, *] = \mathcal{O}_2^*$.

Разветвление по предикату равенства позволяет из $(*)$ и $(-)$ получить функцию $(* - - *)$. Подставив в эту функцию вместо первой переменной константу 0, получим функцию $(*-)$. И далее применяем Лемму 5.

□

Лемма 7. *Пусть* $g_1(x) = (--), g_2(x) = (10)$. *Тогда справедливо* $[g_1, g_2, f_{K_3}, f_{K_4}, f_{K_7}] = \mathcal{M}_2$.

Доказательство. Подставляя в функцию f_{K_7} на соответствующие места функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$, получим одну из функций: (00), (11), $(0*)$, $(*0)$, $(1*)$, $(*1)$, $(0-)$, (-0), $(1-)$, (-1), $(*-)$, $(-*)$. Первые десять случаев легко сводятся к константам и Лемме 6. Последние две функции сводятся друг к другу, поэтому рассмотрим одну из них: $u_1(x) = (-*)$.

Суперпозиция $g_2(u_1, g_2)$ определяет функцию $(0*)$, из которой с помощью функции g_1 легко получить константу 0 и свести доказательство к Лемме 6. □

Лемма 8. *Пусть* $g_1(x) = (--), g_2(x) = (11)$. *Тогда справедливо* $[g_1, g_2, f_{K_3}, f_{K_4}, f_{K_5}] = \mathcal{M}_2$.

Доказательство. Для доказательства достаточно получить константу 0 и воспользоваться Леммой 6. Для функции f_{K_5} возьмем набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такой, что $f_{K_5}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$.

Рассмотрим функцию $h(x)$, где $h(x) = f_{K_5}(u_1(x), \ldots, u_n(x))$, и $u_i(x) = \begin{cases} x_i, \text{ если } \alpha_i = 0; \\ 1, \text{ если } \alpha_i = 1 \end{cases}$.

Тогда $h(x)$ одна из следующих функций: $(00), (0*), (0-), (01)$. Так как первые три функции очевидным образом сводятся к константе 0 с помощью функции g_1, то осталось рассмотреть функцию $t(x) = (01)$.

Пусть $p(x, y) = \begin{cases} g_1(x), \text{ если } x = y; \\ t(x) \text{ если } x \neq y. \end{cases}$

Суперпозиция $p(g_2, g_1)$ определяет константу 0.

□

Лемма 9. *Пусть* $g_1(x) = (--), g_2(x) = (00)$. *Тогда справедливо* $[g_1, g_2, f_{K_3}, f_{K_4}, f_{K_6}] = \mathcal{M}_2$.

Доказательство. Доказательство этой леммы двойственно доказательству Леммы 8. □

Теорема 3. *Множество мультифункций R является ES_I-полным в $\mathcal{M}_2$ тогда и только тогда, когда оно не содержится целиком ни в одном из классов $K_1 - K_9$.*

Доказательство. Отождествлением переменных из функции f_{K_9} можно получить одну из восьми следующих одноместных функций:

$f^1_{K_9} = (--), f^2_{K_9} = (00), f^3_{K_9} = (11), f^4_{K_9} = (10), f^5_{K_9} = (0-), f^6_{K_9} = (-0), f^7_{K_9} = (1-), f^8_{K_9} = (-1)$.

Так как $f^6_{K_9}(f^6_{K_9}(x)) = f^5_{K_9}$ и $f^5_{K_9}(f^5_{K_9}(x)) = (00)$, $f^7_{K_9}(f^7_{K_9}(x)) = f^8_{K_9}$ и $f^8_{K_9}(f^8_{K_9}(x)) = (11)$, то достаточно рассмотреть первые четыре случая.

Случай 1. $f^1_{K_9} = (--)$. Из функции f_{K_5} отождествлением переменных можно получить функцию $h(x, y)$ такую, что на наборах (01) и (10) она принимает одно из следующих четырех значений — (00), (01), $(0*)$, $(0-)$.

Определим функцию $t(x, y)$: $t(x, y) = \begin{cases} -, & \text{если } x = y; \\ h(x, y), & \text{иначе.} \end{cases}$

Суперпозиция $t(x, -)$ определяет одноместную функцию $p(x) = (0\beta)$, где $\beta \in \{0, -, 1\}$. Первые два случая сводятся к Лемме 9. Рассмотрим оставшийся случай: $p(x) = (01)$.

Оператор разветвления по предикату равенства позволяет из функции $p(x)$ и $(-)$ получить функцию $(-01-)$, а с помощью суперпозиции - (10). Справедливость утверждения следует из Леммы 7.

Случай 2. $f^2_{K_9} = (00)$. Подставляя константу 0 в функцию f_{K_1}, получим одну из двух функций: (1) или $(-)$.

Для первой функции воспользуемся Леммой 6. Для второй — Леммой 9.

Случай 3. $f^3_{K_9} = (11)$. Подставляя константу 1 в функцию f_{K_2}, получим одну из двух функций: (0) или $(-)$.

И далее применяем Лемму 6 или Лемму 8.

Случай 4. $f^4_{K_9} = (10)$. Функция f_{K_8} на некоторой паре противоположных наборов возвращает одну из следующих пар — $(00), (11), (0-), (-0), (1-), (-1)$. А это означает, что, подставляя в функцию f_{K_8} на соответствующие места переменных функцию (10), можно получить одну из следующих одноместных функций — $(00), (11), (0-), (-0), (1-), (-1), (--)$, которые легко сводятся к случаю 1.

□

Следствие 1. *Множества K_1—K_9 являются ES_I-предполными.*

4. Классификация мультифункций

Для каждой мультифункции ранга 2 однозначным образом определим вектор принадлежности ES_I-предполным множествам. Длина такого вектора равна 9 и i-я координата равна 1, если мультифункция принадлежит предполному множеству K_i, и 0, иначе.

На множестве всех мультифункций определим отношение эквивалентности следующим образом: эквивалентными будут функции, у которых совпадают векторы принадлежности ES_I-предполным множествам. Так как число ES_I-предполных множеств равно 9, то наибольшее возможное число классов эквивалентности равно 2^9.

Через $\overline{K}$ обозначим множество функций, не принадлежащих множеству K.

Лемма 10. *Число классов эквивалентности мультифункций, принадлежащих множествам K_1 и K_2, относительно принадлежности ES_I-предполным множествам равно 22.*

Доказательство. Если мультифункция принадлежит множеству $K_1 \cap K_2$, то она, очевидно, принадлежит множеству K_9. Осталось рассмотреть принадлежность множествам $K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, K_8$.

Для перечисления всех классов разобьем множество рассматриваемых функций на 4 множества — $K_3 \cap K_4$, $K_3 \cap \overline{K}_4$, $\overline{K}_3 \cap K_4$ и $\overline{K}_3 \cap \overline{K}_4$.

а) Множество $K_3 \cap K_4$ — множество булевых функций. Так как булева функция на нулевом наборе возвращает 0, а на единичном 1, то она не принадлежит множествам K_5 и K_6. Также несложно заметить, что она принадлежит множесту K_7 тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству K_8. Таким образом в этом случае получили не более 2-х функций.

б) Рассмотрим второе множество $K_3 \cap \overline{K}_4$ — множество функций, которые хотя бы на одном наборе возвращают $*$ и ни на одном из наборов не возвращают $-$. В этом случае разобьем оставшееся множество функций на 4 множества — $K_5 \cap K_6$, $K_5 \cap \overline{K}_6$, $\overline{K}_5 \cap K_6$ и $\overline{K}_5 \cap \overline{K}_6$.

Множество $K_5 \cap K_6$ состоит из одной функции — $*$, которая принадлежит множествам K_7 и K_8.

Функция, принадлежащая множеству $K_5 \cap \overline{K}_6$, на какой-то паре противоположных наборах возвращает значения: (11), $(1*)$. Поэтому нет функций, принадлежащих K_7. И остается не более 2-х функций.

То же самое выполняется и для множества $\overline{K}_5 \cap K_6$.

Так как функция, принадлежащая множеству $\overline{K}_5 \cap \overline{K}_6$, ни на одном из наборов не возвращает $-$, то нет функций, принадлежащих K_7 и не принадлежащих K_8. Остается не более 3-х функций.

в) Функция из множества $\overline{K}_3 \cap K_4$ на некотором наборе возвращает $-$ и ни на одном из наборов не возвращает $*$. В этом случае очевидно, что функция, принадлежащая K_9, не принадлежит K_5 и K_6. Кроме этого функция не принадлежит K_8. И остается не более 2-х функций.

г) Рассмотрим последнее множество — $\overline{K}_3 \cap \overline{K}_4$.

Если мультифункция не возвращает только одну из констант 0 или 1, то нет мультифункций, принадлежащих K_7, так как найдется пара противоположных наборов, на которых функция принимает значения $(\alpha\beta)$, где $\alpha \in \{0, 1\}$, $\beta \in \{\alpha, -, *\}$. Всего не более 4-х функций.

Иначе нет мультифункций принадлежащих K_7 и принадлежащих K_8. Остается не более 6-ти вариантов.

В табл. 2 приведены 22 функций из множества $K_1 \cap K_2$, принадлежащие различным классам.

Лемма доказана. □

Таблица 2. Функции из множества $K_1 \cap K_2$, принадлежащие различным классам

	функция	вектор		функция	вектор
1	(01)	1 1 1 1 0 0 1 1 1	2	(0001)	1 1 1 1 0 0 0 0 1
3	$(**)$	1 1 1 0 1 1 1 1 1	4	$(*1)$	1 1 1 0 1 0 0 1 1
5	$(*111)$	1 1 1 0 1 0 0 0 1	6	$(0*)$	1 1 1 0 0 1 0 1 1
7	$(000*)$	1 1 1 0 0 1 0 0 1	8	$(0**1)$	1 1 1 0 0 0 1 1 1
9	$(*101)$	1 1 1 0 0 0 0 1 1	10	$(*001)$	1 1 1 0 0 0 0 0 1
11	$(0--1)$	1 1 0 1 0 0 1 0 1	12	$(0-01)$	1 1 0 1 0 0 0 0 1
13	$(*--*)$	1 1 0 0 1 1 1 0 1	14	$(**-*)$	1 1 0 0 1 1 0 1 1
15	$(**-----*)$	1 1 0 0 1 1 0 0 1	16	$(**-1)$	1 1 0 0 1 0 0 1 1
17	$(*-11)$	1 1 0 0 1 0 0 0 1	18	$(0*-*)$	1 1 0 0 0 1 0 1 1
19	$(0-0*)$	1 1 0 0 0 1 0 0 1	20	$(01-**-01)$	1 1 0 0 0 0 1 0 1
21	$(0*-1)$	1 1 0 0 0 0 0 1 1	22	$(*-01)$	1 1 0 0 0 0 0 0 1

Лемма 11. *Число классов мультфункций, принадлежащих множествам K_1 и $\overline{K}_2$, относительно принадлежности ES_I-предполным множествам равно 20.*

Доказательство. Если мультифункция принадлежит множеству $K_1 \cap \overline{K}_2$, то она не принадлежит множеству K_7, так как на наборах из всех нулей и всех единиц функция возвращает один из следующих наборов: $(00), (0-), (*0), (*-)$. Осталось рассмотреть принадлежность множествам $K_3, K_4, K_5, K_6, K_8, K_9$.

Как и в предыдущем доказательстве рассмотрим 4 случая: функции, принадлежащие множествам а) $K_3 \cap K_4$, б) $K_3 \cap \overline{K}_4$, в) $\overline{K}_3 \cap K_4$, г) $\overline{K}_3 \cap \overline{K}_4$.

В случае а) множество $K_3 \cap K_4$ — множество булевых функций. Очевидно, что в этом случае функция не принадлежит множествам K_5, K_8, K_9. Число возможных классов эквивалентности не более 2.

Аналогичный результат получаем и в случае в).

Если функция принадлежит множеству $K_3 \cap \overline{K}_4$, то она не принадлежит множеству K_5, так как на единичном наборе она возвращает 0. Также несложно заметить, что если функция не принадлежит K_9, то есть на нулевом и единичном наборе возвращает (00), то она не принадлежит K_8. Осталось не более 6 вариантов.

Рассмотрим последнее множество $\overline{K}_3 \cap \overline{K}_4$. Если мультифункция не возвращает 0, то она, очевидно, принадлежит K_5, K_9 и осталось не более 4 вариантов.

Иначе она не принадлежит K_5 и, кроме того, не может одновременно принадлежать K_8 и не принадлежать K_9, что дает не более 6 вариантов.

В таблице 3 приведены 20 мультифункций, принадлежащих разным классам. Лемма доказана. □

Таблица 3. Функции из множества $K_1 \cap \overline{K}_2$, принадлежащие различным классам

	функция	вектор		функция	вектор
1	(00)	1 0 1 1 0 1 0 0 0	2	(0100)	1 0 1 1 0 0 0 0 0
3	$(*0)$	1 0 1 0 0 1 0 1 1	4	$(*000)$	1 0 1 0 0 1 0 0 1
5	$(0*00)$	1 0 1 0 0 1 0 0 0	6	$(*100)$	1 0 1 0 0 0 0 1 1
7	$(*110)$	1 0 1 0 0 0 0 0 1	8	$(0*10)$	1 0 1 0 0 0 0 0 0
9	$(0-)$	1 0 0 1 0 1 0 0 0	10	$(0-10)$	1 0 0 1 0 0 0 0 0
11	$(*-)$	1 0 0 0 1 1 0 1 1	12	$(*---)$	1 0 0 0 1 1 0 0 1
13	$(**1-)$	1 0 0 0 1 0 0 1 1	14	$(*11-)$	1 0 0 0 1 0 0 0 1
15	$(**-0)$	1 0 0 0 0 1 0 1 1	16	$(*-00)$	1 0 0 0 0 1 0 0 1
17	$(0*-0)$	1 0 0 0 0 1 0 0 0	18	$(*10-)$	1 0 0 0 0 0 0 1 1
19	$(*-10)$	1 0 0 0 0 0 0 0 1	20	$(0*1-)$	1 0 0 0 0 0 0 0 0

Лемма 12. *Число классов мультфункций, принадлежащих множествам $\overline{K}_1$ и K_2, относительно принадлежности ES_I-предполным множествам равно 20.*

Доказательство. Доказательство того, что классов не более 20, двойственно доказательству в Лемме 11. Функции и соответствующие им векторы приведены в табл. 4. □

Лемма 13. *Число классов мультфункций, принадлежащих множествам $\overline{K}_1$ и $\overline{K}_2$, относительно принадлежности ES_I-предполным множествам равно 17.*

Доказательство. Из условия следует, что рассматриваемые функции удовлетворяют условиям $f(0,\dots,0) \in \{1,-\}$, $f(1,\dots,1) \in \{0,-\}$. Очевидно, что такие функции не принадлежат K_9. Рассмотрим принадлежность оставшимся множествам $K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, K_8$.

Как и в предыдущих доказательствах рассмотрим 4 случая: функции, принадлежащие множествам а) $K_3 \cap K_4$, б) $K_3 \cap \overline{K}_4$, в) $\overline{K}_3 \cap K_4$, г) $\overline{K}_3 \cap \overline{K}_4$.

Таблица 4. Функции из множества $\overline{K}_1 \cap K_2$, принадлежащие различным классам

	функция	вектор		функция	вектор
1	(11)	0 1 1 1 1 0 0 0 0	2	(1001)	0 1 1 1 0 0 0 0 0
3	$(1*)$	0 1 1 0 1 0 0 1 1	4	$(111*)$	0 1 1 0 1 0 0 0 1
5	$(1*11)$	0 1 1 0 1 0 0 0 0	6	$(110*)$	0 1 1 0 0 0 0 1 1
7	$(100*)$	0 1 1 0 0 0 0 0 1	8	$(1*01)$	0 1 1 0 0 0 0 0 0
9	(-1)	0 1 0 1 1 0 0 0 0	10	(-001)	0 1 0 1 0 0 0 0 0
11	$(-*)$	0 1 0 0 1 1 0 1 1	12	$(---*)$	0 1 0 0 1 1 0 0 1
13	$(-*1*)$	0 1 0 0 1 0 0 1 1	14	$(-11*)$	0 1 0 0 1 0 0 0 1
15	$(-*11)$	0 1 0 0 1 0 0 0 0	16	$(-*0*)$	0 1 0 0 0 1 0 1 1
17	$(-00*)$	0 1 0 0 0 1 0 0 1	18	$(-10*)$	0 1 0 0 0 0 0 1 1
19	$(1-0*)$	0 1 0 0 0 0 0 0 1	20	$(-*01)$	0 1 0 0 0 0 0 0 0

В случае а) рассматриваются булевы функции, которые на всех нулях возвращают 1, а на всех единицах возвращают 0, поэтому они не принадлежат множествам K_5 и K_6. Заметим, что булева функция принадлежит K_7 тогда и только тогда, когда она принадлежит K_8. Таким образом число классов не более 2.

Рассмотрим случай б). Функция возвращает $*$ и не возвращает $-$, поэтому на всех нулях она возвращает 1, а на всех единицах возвращает 0. Следовательно она не принадлежит классам K_5, K_6. Легко показать, что если она принадлежит K_7, то и принадлежит K_8. Поэтому число классов не более 3.

Случай в). Функция не возвращает $*$ и возвращает $-$, тогда она не принадлежит K_8.

Если функция также не возвращает константу 0, но возвращает 1, то она очевидно не принадлежит классам K_6, K_7 и принадлежит классу K_5. Получаем один вектор принадлежности.

Если функция возвращает константу 0, но не возвращает 1, то она очевидно не принадлежит классам K_5, K_7 и принадлежит классу K_5. Получаем один вектор принадлежности.

Если же она не возвращает ни одну из констант, то очевидно, что это одна функция — $(-)$.

Если функция возвращает константу 0 и возвращает 1, то число векторов принадлежности не более 2.

Случай г). Функция возвращает $*$ и возвращает $-$.

Функции, возвращающие одну из констант и не возвращающие другую константу, образуют два класса. Также два класса образуют функции, возвращающие только $*$ и $-$. И наконец три класса образуют функции, возвращающие и 0, и 1, так как такие функции не могут одновременно принадлежать K_7 и K_8.

В табл. 5 приведены 17 функций и соответствующие им классы. Лемма доказана. □

Таблица 5. Функции из множества $\overline{K}_1 \cap \overline{K}_2$, принадлежащие различным классам

	функция	вектор		функция	вектор
1	(10)	0 0 1 1 0 0 1 1 0	2	(1000)	0 0 1 1 0 0 0 0 0
3	$(1**0)$	0 0 1 0 0 0 1 1 0	4	$(1*00)$	0 0 1 0 0 0 0 1 0
5	$(1*000000)$	0 0 1 0 0 0 0 0 0	6	$(--)$	0 0 0 1 1 1 1 0 0
7	$(1-)$	0 0 0 1 1 0 0 0 0	8	(-0)	0 0 0 1 0 1 0 0 0
9	$(1--0)$	0 0 0 1 0 0 1 0 0	10	(-100)	0 0 0 1 0 0 0 0 0
11	$(-**-)$	0 0 0 0 1 1 1 0 0	12	$(-*--)$	0 0 0 0 1 1 0 0 0
13	$(1*1-)$	0 0 0 0 1 0 0 0 0	14	$(-*00)$	0 0 0 0 0 1 0 0 0
15	$(11-**-00)$	0 0 0 0 0 0 1 0 0	16	$(1*-0)$	0 0 0 0 0 0 0 1 0
17	$(-*10)$	0 0 0 0 0 0 0 0 0			

Теорема 4. *Число классов мультфункций относительно принадлежности ES_I-предполным в $\mathcal{M}_2$ множествам равно 79.*

Доказательство. Справедливость утверждения следует из Лемм 10–13. □

5. Типы базисов

Для того, чтобы система функций была базисом в $\mathcal{M}_2$, необходимо соблюдать условия полноты и минимальности. Согласно критерию полноты система функций полна тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из 9 ES_I-предполных множеств. Минимальность означает, что при удалении из системы любой функции система становится неполной.

Функция $f(x,y) = (-*10)$ из табл. 5 не принадлежит ни одному из ES_I-предполных множеств, поэтому минимальная мощность базиса равна 1.

Теорема 5. *Максимальная мощность базиса не больше 4.*

Доказательство. Пусть множество B является базисом. Тогда в этом множестве есть функция f_{K_9}. Рассмотрим все возможные значения этой функции на наборах $(0,\dots,0)$ и $(1,\dots,1)$. Возможны 8 вариантов: $(1-)$, (-0), (10), $(--)$, (00), (11), $(0-)$, (-1).

• В первых двух вариантах функция f_{K_9} не принадлежит еще 6 ES_I-предполным множествам, а значит максимальная мощность базиса в этих случаях не больше 3.

• Рассмотрим третий случай: $f_{K_9}(0,\dots,0)=1$ и $f_{K_9}(1,\dots,1)=0$. В этом случае f_{K_9} не принадлежит множествам K_1, K_2, K_5, K_6. В множестве B выберем функцию f_{K_8}, которая на противоположных наборах может возвратить (00), (11), (-0), $(0-)$, (-1), $(1-)$, $(--)$. Поэтому f_{K_8} не принадлежит множеству K_7 либо K_3.

• Пусть $f_{K_9}(0,\dots,0)=0$ и $f_{K_9}(1,\dots,1)=0$. Тогда f_{K_9} не принадлежит множествам K_2, K_5, K_7, K_8. Если $f_{K_1}(0,\dots,0)=1$, то исключаем множество K_6, а если $f_{K_1}(0,\dots,0)=-$, то исключаем множество K_3.

• Вариант $f_{K_9}(0,\dots,0)=1$ и $f_{K_9}(1,\dots,1)=1$ двойственен предыдущему.

• Пусть $f_{K_9}(0,\dots,0)=-$ и $f_{K_9}(1,\dots,1)=-$. В этом случае f_{K_9} не принадлежит множествам K_1, K_2, K_3, K_8. В множестве B выберем функцию f_{K_7}, которая на противоположных наборах может возвратить (00), $(0*)$, $(0-)$, (11), $(1*)$, $(1-)$, (-0), (-1), $(-*)$, $(*0)$, $(*1)$, $(*-)$. Далее замечаем, что, если функция на некотором наборе принимает значение 0, то она не принадлежит K_5, если принимает значение 1, то не принадлежит K_6, а если — $*$, то не принадлежит K_4.

• В последних двух вариантах функция f_{K_9} не принадлежит еще 5 ES_I-предполным множествам, а значит максимальная мощность базиса не больше 4. □

Будем говорить, что два базиса B_1 и B_2 одинаковой мощности имеют разный тип, если у них не совпадают множества векторов принадлежности ES_I-предполным множествам.

Полный компьютерный перебор показал, что имеется 1 тип базиса мощности 1, 749 типов базиса мощности 2, 4323 типа базиса мощности 3, 93 типа базиса мощности 4.

Заключение

В работе рассмотрены мультифункции, заданные на 2-х элементном множестве. Следующим шагом является рассмотрение мультифункций, заданных на 3-х элементном множестве и затем рассмотрение общего случая — мультифункций, заданных на k-элементном множестве.

Список литературы

[1] Литвинов Г. Л., “Гипергруппы и гипергрупповые алгебры,”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж.*, 1985, № 26, 57–106.

[2] Ло Джукай, “Максимальные замкнутые классы в множестве частичных функций многозначной логики”, *Кибернетический сборник. Новая серия №25.*, 1988, 131–141.

[3] Мальцев А. И., Мальцев И. А., *Итеративные алгебры Поста*, Изд-во Ин-та математики, Новосибирск, 2009, 194 pp.

[4] Марченков С. С., “Операторы замыкания с разветвлением по предикату”, *Вестник МГУ, Сер. 1, Математика и механика.*, **6** (2003), 37–39

[5] Марченков С. С., “Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве частичных булевых функций”, *Дискретная математика*, **20**:6 (2008), 80–88

[6] Марченков С. С., “Оператор E-замыкания на множестве частичных функций многозначной логики”, *Математические вопросы кибернетики*, 2013, № 18, 227–238

[7] Матвеев С. А., “Построение всех E-замкнутых классов частичных булевых функций”, *Математические вопросы кибернетики*, 2013, № 18, 239–244

[8] Пантелеев В.И., “Критерий полноты для доопределяемых булевых функций”, *Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия*, 2009, № 2 (68), 60-79

[9] Пантелеев В. И., Рябец Л. В., “Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве гиперфункций ранга 2”, *Известия Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика*, **10** (2014), 93–105

[10] Тарасов В. В., “Критерий полноты для не всюду определенных функций алгебры логики”, *Проблемы кибернетики №30*, 1975, 319–325

[11] Фрейвалд Р. В., “О полноте частичных функций алгебры логики”, *ДАН СССР*, **167**:6 (1966), 1249–1250

[12] Corsini P., Leoreanu V., *Applications of Hyperstructure Theory*, Springer-Science+Business Media, B.V., 2003, 322 pp.

[13] Doroslovački R., Pantović J., Vojvodić G., “One interval in the lattice of partial hyperclones”, *Chechoslovak Mathematical Journal*, 2005 №55(130)., 719–724.

[14] Lau D., *Function algebras on finite sets. A basic course on many-valued logic and clone theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 668 pp.

[15] Machida H., “Hyperclones on a two-element set”, *Multiple-Valued Logic. An International Journal*, 2002 №8(4), 495–501.

[16] Machida H., Pantovic J., “On maximal hyperclones on $\{0,1\}$ — a new approach”, *Proceedings of 38th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL 2008)*, 2008, 32–37.

[17] Marty F., “Sur une generalization de la notion de groupe”, *Congres des Mathematiciens Scandinaves, Stockholm*, 1934, 45–49.

[18] Panteleev V.I., Riabets L.V., “E-closed Sets of Hyperfunctions on Two-Element Set”, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, **13(2)** (2020), 231–241

[19] Pouzet M., Rosenberg I., “Small clones and the projection property.”, *Algebra Universalis*, 2010 №63, 37–44

[20] Romov B. A., “Hyperclones on a finite set Multiple-Valued Logic. An International Journal”, **3 №2** (1998), 285–300.

ES_I-closure of rank 2 multi-functions: completeness criterion, classification, and types of bases

Panteleev V. I., Taglasov E. S.

Multifunctions are functions that are defined on a finite set and return subsets of the considered set as their values. This paper deals with the closure of multifunctions that can be obtained using the operations of adding dummy variables, composition operator, and operator with the equality predicate branching. We obtain nine precomplete closed classes of multifunctions of rank two and prove the completeness criterion. A classification of multifunctions based on belonging to precomplete classes is presented, and all types of bases are described.

Keywords: closure, equality predicate, multioperation, closed set, composition.

References

[1] Litvinov G. L., “Hypergroups and Hypergroup Algebras,”, *Journal of Soviet Mathematics.*, 1987, № 38, no. 2, 1734–1761 DOI: 10.1007/BF01088201.

[2] Lo Czu Kai, “Maksimalnye zamknutye klassy v mnozhestve chastichnykh funkciy mnogoznachnoy logiki [Maximal Closed Classes on the Set of Partial Many-valued Logic]”, *Kiberneticheskiy Sbornik №25.*, 1988, 131–141 (in Russian)

[3] Malcev A. I., Malcev I. A., *Iterativnye algebry Posta [Iterative Post Algebras]*, Publishing House of Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2009 (in Russian), 194 pp.

[4] Marchenkov S. S., “Operatory zamykaniya s razvetvleniem po predicatu [Closure Operators with Predicate Branching]”, *Bulletin of Moscow State University. Series 1. Mathematics and Mechanics*, **6** (2003), 37–39 (in Russian)

[5] Marchenkov S. S., “The Closure Operator with the Equality Predicate Branching on the Set of Partial Boolean Functions”, *Discrete Math. Appl.*, **18**:4 (2008), 381–389. DOI: 10.1515/DMA.2008.028.

[6] Marchenkov S. S., “Operator E-zamykaniya na mnozhestve chastichnykh funkciy mnogoznachnoy logiki [The E-closure Operator on the Set of Partial Many-valued Logic Functions]”, *Mathematical problems in cybernetics*, 2013, № 18, 227–238 (in Russian)

[7] Matveev S. S., “Postroenie vsekh E-zamknutykh klassov chastichnykh bulevykh funkciy [Construction of All E-closed Classes of Partial Boolean Functions]”, *Mathematical problems in cybernetics*, 2013, № 18, 239–244 (in Russian)

[8] Panteleev V. I., “iteriy polnoty dlya doopredelyaemylh bulevikh fukciy [The Completeness Criterion for Depredating Boolean Functions]”, *Vestnik of Samara State University. Series Mathematics*, 2009, № 2 (68), 60-79 (in Russian)

[9] Panteleev V. I., Riabets L. V., “Operator zamykaniya s razvetvleniem po predicatu ravenstva na mnozhestve giperfunkciy ranga 2 [The Closure Operator with the Equality Predicate Branching on the Set of Hyperfunctions on Two-Element Set]”, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **10** (2014), 93–105 (in Russian)

[10] Tarasov V. V., “Kriteriy poloty dlya ne vsyudu opredelennykh funkciy algebry logiki [Completeness Criterion for Partial Logic Functions]”, *Problemy Kibernetiki №30*, 1975, 319–325 (in Russian)

[11] Freiwald R. V., “O polnote chastichnykh funkciy algebry logiki [On Completeness of Partial Functions of Boolean Algebra]”, *DAN USSR*, **167**:6 (1966), 1249–1250 (in Russian)

[12] Corsini P., Leoreanu V., *Applications of Hyperstructure Theory*, Springer-Science+Business Media, B.V., 2003, 322 pp.

[13] Doroslovački R., Pantović J., Vojvodić G., “One interval in the lattice of partial hyperclones”, *Chechoslovak Mathematical Journal*, 2005 №55(130)., 719–724.

[14] Lau D., *Function algebras on finite sets. A basic course on many-valued logic and clone theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 668 pp.

[15] Machida H., “Hyperclones on a two-element set”, *Multiple-Valued Logic. An International Journal*, 2002 №8(4), 495–501.

[16] Machida H., Pantovic J., “On maximal hyperclones on $\{0, 1\}$ — a new approach”, *Proceedings of 38th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL 2008)*, 2008, 32–37.

[17] Marty F., “Sur une généralization de la notion de groupe [On a generalization of the notion of group]”, *In 8éme congrés des Mathématiciens Scandinaves, Stockholm*, 1934, 45–49. (in French)

[18] Panteleev V. I., Riabets L. V., “E-closed Sets of Hyperfunctions on Two-Element Set”, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, **13(2)** (2020), 231–241

[19] Pouzet M., Rosenberg I., “Small clones and the projection property.”, *Algebra Universalis*, 2010 №63, 37–44

[20] Romov B. A., “Hyperclones on a finite set Multiple-Valued Logic. An International Journal”, **3 №2** (1998), 285–300.