

# Число состояний универсального автомата бесконечного экрана, реализующего двунаправленное движение на луче

Кузнецова Е.В.<sup>1</sup>

В работе рассматривается реализация одного класса законов движения клеточным автоматом на бесконечном экране. Показано, что минимальное число состояний клеточного автомата, моделирующего двунаправленное движение точки на луче, при котором точка не совершает 2 движения вправо подряд, равно 5.

**Ключевые слова:** клеточный автомат, число состояний, бесконечный экран, двунаправленное движение, конструирование изображений.

## 1. Введение

Исследования по клеточным автоматам начались с работы Джона фон Неймана [1]. В 1960-х годах Муром была доказана теорема о Райском саде [2]. В 1970 году была опубликована игра Жизнь, автором которой является математик Джон Конвей [3]. В 2002 году была опубликована книга, в которой рассказывались широкие применения клеточных автоматов во всех областях науки [4].

На механико-математическом факультете МГУ им. Ломоносова исследованием клеточных автоматов занимались В.Б. Кудрявцев, А.С. Подколзин, А.А. Болотов. Результатами их исследований стала монография [5].

Тема конструирования стационарных изображений клеточными автоматами была развита Е. Титовой в ее работах [6, 7, 8, 9]. Так, в работе [6] рассматривалась задача конструирования изображений клеточными автоматами на прямоугольном экране. В работе было показано, что для

---

<sup>1</sup> Кузнецова Екатерина Викторовна — инженер-разработчик, ООО НКБ "НИР" e-mail: kuz.net.sova@mail.ru.

Kuznetsova Ekaterina Viktorovna — engineer developer, LLC NKБ "NIR".

конструирования любого изображения необходимо и достаточно, чтобы клеточный автомат имел 3 состояния.

В работе [7] продолжалось рассмотрение конструирования изображений клеточным автоматом на прямоугольном экране. В работе были даны оценки времени формирования клеточным автоматом изображений для разного числа состояний данного автомата.

Далее исследования сместились в область движения изображений на экране, создаваемого клеточным автоматом.

Так, в работе [8], рассматривается движение одноклеточного изображения на конечном экране длины  $m$ . Даются оценки количества состояний для конструирования автоматов, реализующих такие законы движения. Так, например, показывается, что четырех состояний достаточно для создания автомата, реализующего любой закон движения, в котором отсутствуют два движения вперёд подряд на конечном экране.

В работе [9] было подробно рассмотрено исследование движения точки на бесконечном экране. В работе описан алгоритм реализации на экране широкого класса законов движения и исследована мера Бернулли множества реализуемых законов движения. Показано, что почти все законы движения являются реализуемыми. Также показано, что относительно Тихоновской топологии множество реализуемых законов движения относится к первой категории Бэра, т.е. очень мало.

Основным отличием предлагаемой работы является другой, более широкий класс законов движения, в котором разрешено движение назад.

В данной работе рассматривается конечный автомат и бесконечная справа полоса шириной в одну клетку. К каждой клетке полосы прикреплен свой экземпляр конечного автомата. Состояние автомата, прикрепленного к клетке, зависит от состояния в предыдущий момент времени этого автомата и двух его входов, левого и правого. Под входами будем понимать состояния автоматов, прикрепленных к соседним клеткам (имеются в виду две клетки: ближайшая слева и ближайшая справа). Нулевое значение состояния автомата считается состоянием покоя, и автомат в состоянии покоя, если его соседи тоже в состоянии покоя, остаётся в состоянии покоя.

В дальнейшем состояние автомата, прикрепленного к клетке, будем называть состоянием клетки. Множество автоматов, прикрепленных к клеткам полубесконечной прямой, является примером клеточного автомата. Подробнее про клеточные автоматы можно почитать в книге [10].

Левый вход самой левой клетки полубесконечной полосы будем называть управляющим входом и будем подавать на него произвольные, но определённые управляющие сигналы.

Все клетки полубесконечной полосы будем называть экраном. Конфигурацию из состояний клеточных автоматов в данный момент времени будем называть изображением на экране.

Отметим, что состояния клетки интерпретируются не одинаково. Так, состояние 0 интерпретируется, как состояние покоя, некоторое заранее фиксированное подмножество состояний клетки, называемых метками, интерпретируются как клетки чёрного цвета, а все остальные состояния, включая состояние покоя, интерпретируются как клетки белого цвета. В результате на экране получается чёрно-белое изображение.

В работе накладывается ограничение на возможные изображения. Так, двух меток на экране быть не может, т.е. две разные клетки не могут принимать состояния, содержащиеся в подмножестве состояний, считающихся меткой.

Законом движения точки на экране назовем последовательность, состоящую из символов  $f, s, b$  ( $f$  – *forward*,  $s$  – *stop*,  $b$  – *back*), кодирующих перемещение точки по экрану в каждый момент времени. Так, если в момент времени  $t$  точка сместилась на одну клетку вправо, то  $t$ -ый член последовательности примет значение  $f$ , если сместилась влево, то  $t$ -ый член последовательности примет значение  $b$ , если никуда не сместилась, то  $t$ -ый член последовательности примет значение  $s$ . Здесь время  $t$  отсчитывается от того момента, когда в самой левой клетке появляется метка.

Подробнее про конструирование изображений и их движения на экране можно почитать в статьях [6, 8].

Нас будет интересовать определенный класс  $S$  законов движения, в которых нет двух символов  $f$  подряд.

Основной целью работы являлось определение наименьшего числа состояний клеточных автоматов, при котором можно реализовать все законы движения из класса  $S$ , при этом выбор управляющих сигналов через управляющий вход экрана остаётся за нами, и зависит от закона движения. В работе было показано, что минимальное количество состояний клеточного автомата, при котором можно реализовать любое движение из данного класса, равно пяти.

Автор выражает благодарность профессору Э.Э. Гасанову за научное руководство и постановку задачи, а также Г.В. Калачеву за помощь в работе.

## 2. Основные определения и формулировка результата

Определим основные понятия, используемые в данной работе.

Пусть  $S$  — множество конечных и бесконечных последовательностей, состоящих из элементов  $\alpha_n \in \{sf, s, b\}$ , в префиксе любой длины которых количество символов  $b$  не превышает количества символов  $f$ . Элементы множества  $S$  будем называть *законами движения*. Символ  $f$  подразумевает движение на одну клетку вправо,  $s$  — остаться на месте,  $b$  — на одну клетку влево.

*Экраном* будем называть следующую конструкцию.

Пусть имеется бесконечная в правую сторону полоса шириной в одну клетку. В каждую клетку полосы поместим по одному экземпляру одного и того же конечного автомата. К входам этого автомата присоединим выходы автоматов, стоящих в двух соседних с ним клетках, то есть у автомата имеется *левый* вход, *правый* вход и текущее состояние автомата. Выходом автомата в заданный момент времени является его состояние в этот момент времени. Для автомата, стоящего в самой левой клетке полосы левый вход не определён. Будем называть его *управляющим входом* и подавать на него управляющие сигналы.

Будем говорить, что *на экране реализуется движение по закону*  $A \in S$ , если выполняются следующие условия:

- 1) в некоторый момент времени в самой левой клетке экрана появляется метка (до этого на экране нет меток), этот момент будем называть *моментом начала движения* или *началом движения*;
- 2) изменение позиции метки на экране в  $i$ -й момент от начала движения соответствует  $i$ -й букве в слове или сверхслове  $A$ , а именно, если  $A(i) = s$ , то в  $(i + 1)$ -й момент метка остается в той же клетке, где была в текущий момент, если  $A(i) = f$ , то в  $(i + 1)$ -й момент метка сдвинется на одну ячейку вправо, если  $A(i) = b$ , то в  $(i + 1)$ -й момент метка сдвинется на одну клетку влево, по сравнению со своим текущим положением;
- 3) в каждый момент времени после начала движения на экране есть ровно одна метка.

Значения состояний клеточного автомата, при которых считается, что клетка, находящаяся в данном состоянии, видима (чёрная) будем называть *метками*.

Экран будем называть *универсальным* для множества законов движения  $S$ , если для любого закона движения из  $S$  существует такая последовательность управляющих сигналов, что на экране формируется такое изображение, что метка движется по закону  $S$ .

В данной работе рассматривается клеточный автомат, заданный на бесконечной в правую сторону полосе. Причем левый вход первой слева клетки является управляющим, туда подаются управляющие сигналы

(его нельзя изменить через функцию переходов  $\varphi$ , определяющую зависимость состояния клетки от состояний в предыдущий момент времени этой самой клетки и соседних с ней клеток; просто на каждом следующем такте туда подается следующий элемент управляющей последовательности, вырабатываемой некоторым управляющим устройством по закону движения).

Изначально в данном клеточном автомате одни нули. Затем управляющее устройство начинает подавать ему на вход управляющие сигналы (управляющая последовательность). В какой-то момент в самой левой клетке экрана появится метка, которая интерпретируется как точка, движение которой мы и изучаем.

Таким образом, под появлением точки на экране будем подразумевать переключение клетки автомата, соответствующей самой левой клетке экрана, в состояние, соответствующее состоянию метки.

После того, как точка (метка) появилась на экране, то она никуда не исчезает и двух точек (меток) на экране быть не может (поэтому, если метка движется, например, вправо, то на изначальном месте она должна затереться, т.е. клетка, в которой была метка, должна перейти в состояние, не соответствующее метке). Возможное и невозможное поведение метки изображены на рисунке 1.

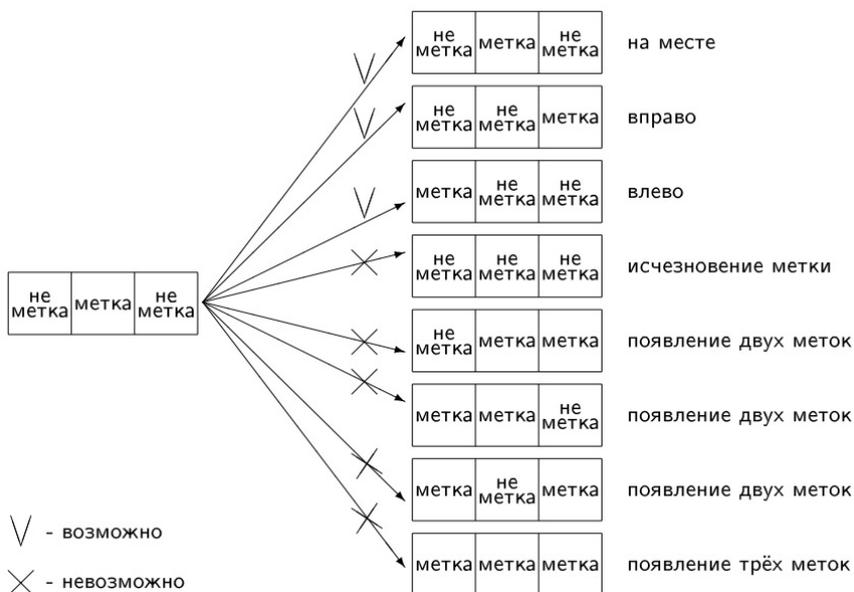


Рис. 1.

В данной статье показано, что законы движения из  $S$ , обладающие тем свойством, что в них не встречается двух подряд идущих символов  $f$ , можно реализовать клеточным автоматом с пятью состояниями, причем оценка на количество состояний не улучшаема.

Ранее Титовой был получен аналогичный результат для законов движения без движения назад.

**Теорема 1** (Титовой [8]). Пусть  $F = ((sf) \vee (s))^\infty$  — множество законов движения, состоящих из элементов множества  $\{sf, s\}$ . Тогда мощность наименьшего множества состояний клеточного автомата, необходимого для осуществления любого закона из  $F$  равна 4.

Результат, полученный в этой работе, по сути является расширением результата Титовой.

**Теорема 2.** Пусть  $S = ((sf) \vee (s) \vee (b))^\infty$  — множество законов движения, состоящих из элементов множества  $\{sf, s, b\}$  таких, что в префиксе  $S$  любой длины количество символов  $b$  не превышает количества символов  $f$ . Тогда мощность наименьшего множества состояний клеточного автомата, необходимого для осуществления любого закона из  $S$  равна 5.

### 3. Вспомогательные определения

Перед доказательством основных утверждений введем ряд вспомогательных определений и обозначений.

Пусть  $\alpha \in S$  — закон движения, где  $\alpha = \alpha_1\alpha_2\dots$ ,  $\alpha_i \in \{sf, s, b\}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$

Обозначим  $\overline{\alpha_n} = \alpha_1\dots\alpha_n$ ,  $|\overline{\alpha_n}| = n$ .

Определим функцию, идентифицирующую символ в  $i$ -ой позиции закона движения:

$$I(\alpha_i = a) = \begin{cases} 1 & \text{если } \alpha_i = a, \\ 0 & \text{если } \alpha_i \neq a. \end{cases}$$

Теперь используем её для подсчёта количества символов  $\alpha_i \in \{sf, s, b\}$  в префиксе закона движения длины  $n$ :

$$\begin{aligned} I_{sf}(\overline{\alpha_n}) &= \sum_{i=1}^n I(\alpha_i = sf), \\ I_b(\overline{\alpha_n}) &= \sum_{i=1}^n I(\alpha_i = b), \\ I_s(\overline{\alpha_n}) &= \sum_{i=1}^n I(\alpha_i = s). \end{aligned}$$

Отсюда можем определить позицию метки на экране

$$d(\overline{\alpha_n}) = I_{sf}(\overline{\alpha_n}) - I_b(\overline{\alpha_n}) \geq 0$$

и количество тактов с начала движения

$$t(\overline{\alpha_n}) = I_s(\overline{\alpha_n}) + I_b(\overline{\alpha_n}) + 2I_{sf}(\overline{\alpha_n})$$

для префикса закона движения длины  $n$ .

## 4. Законы движения со скоростью движения вперёд 1/2

Рассмотрим клеточный автомат  $K$ . Состояние клетки в следующий такт определяется её состоянием в настоящий момент, а также состояниями соседних с ней слева и справа клеток. Множество состояний автомата, прикрепленного к клетке, имеет вид  $Q = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , множество меток —  $L = \{1, 2\}$ . Функция переходов будет следующей:

$$\begin{aligned} \varphi(1, a, b) &= 0, \text{ где } a, b \in Q \setminus L, \\ \varphi(2, a, b) &= 1, \text{ где } a, b \in Q \setminus L, \\ \varphi(a, b, c) &= a, \text{ где } a \in Q \setminus L, b \in \{0, 4\}, c \in Q, \\ \varphi(0, 1, a) &= 1, \text{ где } a \in Q \setminus L, \\ \varphi(3, 1, a) &= 0, \text{ где } a \in Q \setminus L, \\ \varphi(4, 1, a) &= 2, \text{ где } a \in Q \setminus L, \\ \varphi(a, 2, b) &= a, \text{ где } a, b \in Q \setminus L, \\ \varphi(a, 3, b) &= a, \text{ где } a \in Q \setminus L, b \in \{0, 2, 3, 4\}, \\ \varphi(a, 3, 1) &= 1, \text{ где } a \in Q \setminus L, \\ \varphi(a, b, c) &= 0, \text{ где два из трёх: } a \text{ и } b, \text{ или } b \text{ и } c, \text{ или } a \text{ и } c \in L. \end{aligned}$$

Рассмотрим пример. Реализуем закон движения  $s f s f b b$ . Для реализации этого закона входная последовательность будет  $2 4 4 3 0 3 0$ . Движение точки на экране (1 и 2, выделенные жирным шрифтом) изображено на рисунке 2. Строки — моменты времени.

2	0	0	0
4	<b>1</b>	0	0
4	<b>2</b>	0	0
3	4	<b>1</b>	0
0	3	<b>2</b>	0
3	0	3	<b>1</b>
0	3	<b>1</b>	0
0	<b>1</b>	0	0

Рис. 2.

Изначально на автомат подается 2, после чего 2 переходит в 1; см. правило  $\varphi(2, a, b) = 1$ , где  $a, b \in Q \setminus L$ .

Положение метки 1 не меняется, пока автомат слева от неё не примет состояние 3 [кодировка элемента  $b$  из закона движения, т.е. движение назад] или 4 [кодировка элемента  $f$  из закона движения, т.е. движение вперед]. В случае состояния 4 она меняется на метку 2, четвёрка при этом пропадает [см. законы  $\varphi(4, 1, a) = 2$ , где  $a \in Q \setminus L$  и  $\varphi(a, b, c) = a$ , где  $a \in Q \setminus L$ ,  $b \in \{0, 4\}$ ,  $c \in Q$ ] (рисунок 3).



здесь  $* \in Q \setminus L$

Рис. 3.

Метка 2 исчезает в следующий такт, одновременно с этим справа от нее появляется метка 1 [законы  $\varphi(2, a, b) = 1$ , где  $a, b \in Q \setminus L$  и  $\varphi(a, 2, b) = a$ , где  $a, b \in Q \setminus L$ ] (рисунок 4).

Если же слева от метки 1 появляется сигнал 3, то в следующий такт метка займёт его место, тем самым двигаясь назад [законы  $\varphi(a, 3, 1) = 1$ , где  $a \in Q \setminus L$  и  $\varphi(3, 1, a) = 0$ , где  $a \in Q \setminus L$ ]. Сигналы 3 и 4 являются вспомогательными, до встречи с меткой они движутся со скоростью 1 [ $\varphi(a, b, c) = a$ , где  $a \in Q \setminus L$ ,  $b \in \{0, 4\}$ ,  $c \in Q$ ]. Толкающий сигнал 4

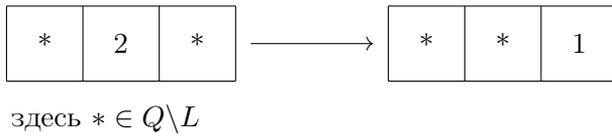


Рис. 4.

можно подавать с любой частотой, а за притягивающим сигналом 3, если метка уже появилась на экране, должен следовать ещё один сигнал, например, 0 [это нужно для того, чтобы управляющие сигналы вовремя оказывались рядом с меткой, что видно на рисунке 2].

Движение вперёд изображено на рисунке 5а. То есть, чтобы осуществить движение вперёд со скоростью  $1/2$ , нужно подать на вход столько четвёрок подряд, сколько в законе движения символов  $f$ .

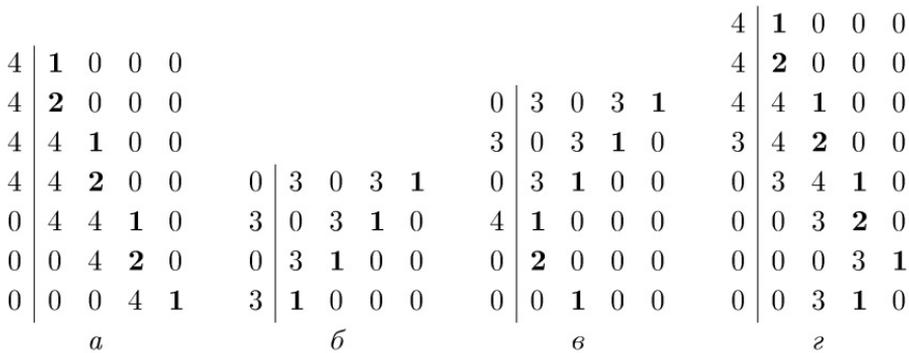


Рис. 5.

Движение назад изображено на рисунке 5б. Чтобы осуществить движение назад со скоростью 1, нужно подать на вход последовательность  $(30)^m$ , где  $m$  — количество элементов  $b$  в данном куске закона движения.

Если после  $b$  в законе движения следует  $sf$  (сразу  $f$  следовать не может), то после 3 0 нужно подать на вход 4 (рисунок 5в). А если за  $f$  следует  $b$ , то сразу за 4 на вход нужно подавать 3 (рисунок 5г).

Для того, чтобы метка оставалась на месте, на вход подаются нули.

Этим способом точку можно двигать по любому наперед заданному закону движения из множества  $S$ .

То есть для клеточного автомата  $K$  с пятью состояниями существует способ реализации всех законов движения из  $S$ . Докажем это строго.

**Лемма 1.** Пусть  $S$  — множество законов движения, состоящих из элементов множества  $\{sf, s, b\}$  таких, что в префиксе  $S$  любой длины количество символов  $b$  не превышает количества символов  $f$ . И пусть дано слово  $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n \dots \in S$ , сопоставим ему управляющую последовательность — слово  $\beta = 2\beta_1 \dots \beta_n \dots$ , где

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_i = s, \\ 30, & \text{если } \alpha_i = b, \\ 4, & \text{если } \alpha_i = sf. \end{cases}$$

Тогда, если на управляющий вход клеточного автомата  $K$  подавать последовательность  $\beta$ , то справедливы следующие утверждения:

1) в момент времени  $t(\overline{\alpha_{n-1}})$  в позиции  $d(\overline{\alpha_{n-1}}) - 1$  будет находиться символ  $\beta_n^*$ , где

$$\beta_n^* = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_n = s, \\ 3, & \text{если } \alpha_n = b, \\ 4, & \text{если } \alpha_n = sf, \end{cases}$$

2) в момент времени  $t(\overline{\alpha_n})$  метка на экране будет в позиции  $d(\overline{\alpha_n})$ .

*Доказательство.* Воспользуемся формулами:

$$\begin{aligned} I_{sf}(\overline{\alpha_n}) &= \sum_{i=1}^n I(\alpha_i = sf), \\ I_b(\overline{\alpha_n}) &= \sum_{i=1}^n I(\alpha_i = b), \\ I_s(\overline{\alpha_n}) &= \sum_{i=1}^n I(\alpha_i = s), \\ d(\overline{\alpha_n}) &= I_{sf}(\overline{\alpha_n}) - I_b(\overline{\alpha_n}) \geq 0, \\ t(\overline{\alpha_n}) &= I_s(\overline{\alpha_n}) + I_b(\overline{\alpha_n}) + 2I_{sf}(\overline{\alpha_n}). \end{aligned}$$

Доказательство будем вести индукцией по длине  $n$  префикса закона движения.

**Базис индукции:**  $n = 1$  и  $n = 2$ . Возможны следующие случаи.

а)  $n = 1$ .  $\overline{\alpha_1} = \alpha_1 = b$  — данный закон движения не из класса  $S$ ,  $n = 2$  рассматривать не нужно.

б)  $n = 1$ .  $\overline{\alpha_1} = \alpha_1 = s$ ,  $t(\overline{\alpha_1}) = 1$ ,  $d(\overline{\alpha_1}) = 0$ .

Подадим на вход последовательность 20. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 6а. В дальнейшем символом \* будем обозначать произвольный символ из множества  $Q \setminus L$ .

2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	4	1	0	0
*	1	0	0	0	*	1	0	0	0	*	*	2	0
			<i>a</i>					<i>б</i>					<i>в</i>

Рис. 6.

В момент времени  $t = 0$  (момент появления метки на экране) в позиции  $d = -1$ , то есть на входе, будет находиться  $\beta_1^* = 0$ . В момент времени  $t(\bar{\alpha}_1) = 1$  метка на экране будет находиться в позиции  $d(\bar{\alpha}_1) = 0$ . Верно.

б.1)  $n = 2$ .  $\bar{\alpha}_2 = \alpha_1\alpha_2 = sb$  — данный закон движения не из класса  $S$ .

б.2)  $n = 2$ .  $\bar{\alpha}_2 = \alpha_1\alpha_2 = ss$ ,  $t(\bar{\alpha}_2) = 2$ ,  $d(\bar{\alpha}_2) = 0$ .

Подадим на вход последовательность 200. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 6б.

В момент времени  $t(\bar{\alpha}_1) = 1$  в позиции  $d(\bar{\alpha}_1) - 1 = -1$ , то есть на входе, будет находиться  $\beta_2^* = 0$ . В момент времени  $t(\bar{\alpha}_2) = 2$  метка на экране будет находиться в позиции  $d(\bar{\alpha}_2) = 0$ . Верно.

б.3)  $n = 2$ .  $\bar{\alpha}_2 = \alpha_1\alpha_2 = ssf$ ,  $t(\bar{\alpha}_2) = 3$ ,  $d(\bar{\alpha}_2) = 1$ .

Подадим на вход последовательность 204. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 6в.

В момент времени  $t(\bar{\alpha}_1) = 1$  в позиции  $d(\bar{\alpha}_1) - 1 = -1$ , то есть на входе, будет находиться  $\beta_2^* = 4$ . В момент времени  $t(\bar{\alpha}_2) = 3$  метка на экране будет находиться в позиции  $d(\bar{\alpha}_2) = 1$ . Верно.

в)  $n = 1$ .  $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1 = sf$ ,  $t(\bar{\alpha}_1) = 2$ ,  $d(\bar{\alpha}_1) = 1$ .

Подадим на вход последовательность 24. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 7а.

2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	4	0	0	0	0
4	1	0	0	0	4	1	0	0	0	4	1	0	0	0	4	2	0	0	0
*	2	0	0	0	3	2	0	0	0	0	2	0	0	0	*	4	1	0	0
*	*	1	0	0	0	3	1	0	0	*	0	1	0	0	*	*	2	0	0
*	*	*	1	0	*	1	0	0	0	*	*	1	0	0	*	*	*	1	0
			<i>a</i>					<i>б</i>					<i>в</i>					<i>г</i>	

Рис. 7.

В момент времени  $t = 0$  (момент появления метки на экране) в позиции  $d = -1$ , то есть на входе, будет находиться  $\beta_1^* = 4$ . В момент времени  $t(\overline{\alpha_1}) = 2$  метка на экране будет находиться в позиции  $d(\overline{\alpha_1}) = 1$ . Верно.

в.1)  $n = 2$ .  $\overline{\alpha_2} = \alpha_1\alpha_2 = sfb$ ,  $t(\overline{\alpha_2}) = 3$ ,  $d(\overline{\alpha_2}) = 0$ .

Подадим на вход последовательность 2430. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 7б.

В момент времени  $t(\overline{\alpha_1}) = 2$  в позиции  $d(\overline{\alpha_1}) - 1 = 0$ , будет находиться  $\beta_2^* = 3$ . В момент времени  $t(\overline{\alpha_2}) = 3$  метка на экране будет находиться в позиции  $d(\overline{\alpha_2}) = 0$ . Верно.

в.2)  $n = 2$ .  $\overline{\alpha_2} = \alpha_1\alpha_2 = sfs$ ,  $t(\overline{\alpha_2}) = 3$ ,  $d(\overline{\alpha_2}) = 1$ .

Подадим на вход последовательность 240. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 7в.

В момент времени  $t(\overline{\alpha_1}) = 2$  в позиции  $d(\overline{\alpha_1}) - 1 = 0$ , будет находиться  $\beta_2^* = 0$ . В момент времени  $t(\overline{\alpha_2}) = 3$  метка на экране будет находиться в позиции  $d(\overline{\alpha_2}) = 1$ . Верно.

в.3)  $n = 2$ .  $\overline{\alpha_2} = \alpha_1\alpha_2 = sfsf$ ,  $t(\overline{\alpha_2}) = 4$ ,  $d(\overline{\alpha_2}) = 2$ .

Подадим на вход последовательность 244. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 7г.

В момент времени  $t(\overline{\alpha_1}) = 2$  в позиции  $d(\overline{\alpha_1}) - 1 = 0$ , будет находиться  $\beta_2^* = 4$ . В момент времени  $t(\overline{\alpha_2}) = 4$  метка на экране будет находиться в позиции  $d(\overline{\alpha_2}) = 2$ . Верно.

**Индуктивный переход.** Пусть при  $n = k - 1$  утверждение выполнено.

Тогда в момент времени  $t(\overline{\alpha_{k-1}})$  метка 1 (видно в доказательстве базы индукции) будет находиться в позиции  $d(\overline{\alpha_{k-1}})$ . А в момент времени  $t(\overline{\alpha_{k-2}})$  в позиции  $d(\overline{\alpha_{k-2}}) - 1$  будет находиться символ  $\beta_{k-1}^*$ .

Докажем, что при  $n = k$  утверждение также выполняется.

1) Сигнал (3 или 4) до встречи с меткой движется со скоростью 1 — это следует из рассматриваемой функции переходов.

Рассмотрим момент времени  $t(\overline{\alpha_{k-1}})$ . Единица находится в позиции  $d(\overline{\alpha_{k-1}})$ .

а) Если последним в законе движения было движение вправо ( $sf$ ), значит, в момент времени  $t(\overline{\alpha_{k-1}}) - 2$  четвёрка стояла в позиции  $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 2$ , а  $\beta_k^*$  — в  $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 3$ . То есть в  $t(\overline{\alpha_{k-1}})$   $\beta_k^*$  будет в  $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$  (рисунок 8а).

б) Если последним в законе движения было движение влево ( $b$ ), значит, в момент времени  $t(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$  тройка стояла в позиции  $d(\overline{\alpha_{k-1}})$ , 0 — в позиции  $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ , а  $\beta_k^*$  — в  $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 2$ . То есть в  $t(\overline{\alpha_{k-1}})$   $\beta_k^*$  будет в  $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$  (рисунок 8б).

в) Если последней в законе движения была остановка ( $s$ ), значит, в момент времени  $t(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$  ноль стоял в позиции  $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ , а  $\beta_k^*$  — в  $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 2$ . То есть в  $t(\overline{\alpha_{k-1}})$   $\beta_k^*$  будет в  $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$  (рисунок 8в).

$$\begin{array}{ccccccc}
* & \beta_k^* & 4 & \mathbf{1} & * & * & * \\
* & * & \beta_k^* & \mathbf{2} & 0 & * & * & * & \beta_k^* & 0 & 3 & \mathbf{1} & * & * & * & \beta_k^* & 0 & \mathbf{1} & * & * \\
* & * & * & \beta_k^* & \mathbf{1} & 0 & * & * & * & \beta_k^* & \mathbf{1} & 0 & 0 & * & * & * & \beta_k^* & \mathbf{1} & 0 & * \\
& & & a & & & & & & & б & & & & & & & в & & 
\end{array}$$

Рис. 8.

2) В момент времени времени  $t(\overline{\alpha_{k-1}})$  метка 1 находится в позиции  $d(\overline{\alpha_{k-1}})$ .

В позиции  $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$  будет находиться символ  $\beta_k^*$  (согласно утверждению пункта 1).

Докажем, что в момент времени  $t(\overline{\alpha_k})$  метка 1 будет находиться в позиции  $d(\overline{\alpha_k})$ .

Отдельно рассмотрим три случая для каждого возможного значения  $\alpha_k$ .

а)  $\alpha_k = s$ . В этом случае выполнены соотношения:

$$\begin{aligned}
I_s(\overline{\alpha_k}) &= I_s(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\
I_{sf}(\overline{\alpha_k}) &= I_{sf}(\overline{\alpha_{k-1}}), \\
I_b(\overline{\alpha_k}) &= I_b(\overline{\alpha_{k-1}}), \\
t(\overline{\alpha_k}) &= t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\
d(\overline{\alpha_k}) &= d(\overline{\alpha_{k-1}}).
\end{aligned}$$

Согласно функции переходов получим картину, изображённую на рисунке 9а.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & & * & 4 & \mathbf{1} & * & * & * \\
* & 0 & \mathbf{1} & * & * & * & 0 & 3 & \mathbf{1} & * & * & * & * & * & \mathbf{2} & 0 & * & * \\
* & * & \mathbf{1} & 0 & * & * & * & * & \mathbf{1} & 0 & 0 & * & * & * & * & \mathbf{1} & 0 & * \\
& & & a & & & & & б & & & & & & в & & & 
\end{array}$$

Рис. 9.

В момент времени  $t(\overline{\alpha_{k-1}})$  в позиции  $d(\overline{\alpha_{k-1}})$  находится метка 1, в позиции  $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$  находится символ  $\beta_k^* = 0$ .

Обозначим  $q(d)$  символ в позиции  $d$ . В момент времени  $t(\overline{\alpha_k})$  символ в позиции  $d(\overline{\alpha_k})$  будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_k})) = \varphi(\beta_k^*, 1, a) = \varphi(0, 1, a) = 1, \text{ где } a \in Q \setminus L.$$

б)  $\alpha_k = b$ . В этом случае выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} I_b(\overline{\alpha_k}) &= I_b(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\ I_{sf}(\overline{\alpha_k}) &= I_{sf}(\overline{\alpha_{k-1}}), \\ I_s(\overline{\alpha_k}) &= I_s(\overline{\alpha_{k-1}}), \\ t(\overline{\alpha_k}) &= t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\ d(\overline{\alpha_k}) &= d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1. \end{aligned}$$

Согласно функции переходов получим картину, изображённую на рисунке 9б.

В момент времени  $t(\overline{\alpha_{k-1}})$  в позиции  $d(\overline{\alpha_{k-1}})$  находится метка 1, в позиции  $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$  находится символ  $\beta_k^* = 3$ .

В момент времени  $t(\overline{\alpha_k})$  символ в позиции  $d(\overline{\alpha_k})$  будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_k})) = \varphi(a, \beta_k^*, 1) = \varphi(a, 3, 1) = 1, \text{ где } a \in Q \setminus L.$$

в)  $\alpha_k = sf$ . В этом случае выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} I_{sf}(\overline{\alpha_k}) &= I_{sf}(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\ I_b(\overline{\alpha_k}) &= I_b(\overline{\alpha_{k-1}}), \\ I_s(\overline{\alpha_k}) &= I_s(\overline{\alpha_{k-1}}), \\ t(\overline{\alpha_k}) &= t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 2, \\ d(\overline{\alpha_k}) &= d(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1. \end{aligned}$$

Согласно функции переходов получим картину, изображённую на рисунке 9в.

В момент времени  $t(\overline{\alpha_{k-1}})$  в позиции  $d(\overline{\alpha_{k-1}})$  находится метка 1, в позиции  $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$  находится символ  $\beta_k^* = 4$ .

В момент времени  $t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1$  символ в позиции  $d(\overline{\alpha_{k-1}})$  будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_{k-1}})) = \varphi(\beta_k^*, 1, a) = \varphi(4, 1, a) = 2, \text{ где } a \in Q \setminus L.$$

В момент времени  $t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 2 = t(\overline{\alpha_k})$  символ в позиции  $d(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1 = d(\overline{\alpha_k})$  будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_k})) = \varphi(2, a, b) = 1, \text{ где } a, b \in Q \setminus L.$$

Мы доказали, что в момент времени  $t(\overline{\alpha_k})$  метка 1 будет находиться в позиции  $d(\overline{\alpha_k})$  для всех возможных вариантов движения. Значит, утверждение 2 леммы верно. □

**Лемма 2** (Верхняя оценка). Пусть  $S$  — множество законов движения, состоящих из элементов множества  $\{sf, s, b\}$  таких, что в префиксе  $S$  любой длины количество символов  $b$  не превышает количества символов  $f$ . Тогда мощность множества состояний клеточного автомата  $|Q(S)| \leq 5$ .

*Доказательство.* Пусть множество состояний  $Q = E_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , множество меток  $L = \{1, 2\}$  [это те состояния, при которых считается, что точка видна]. Рассмотрим клеточный автомат  $K$ .

Подадим на вход слово  $\beta$ , его первый символ 2, в следующий такт в начале экрана появится метка 1:

$$\varphi(2, a, b) = 1, \text{ где } a \in \{0, 3, 4\}, b \in Q \setminus L.$$

Согласно лемме 1, реализуем закон движения  $S = \alpha$ .

□

**Лемма 3.** Пусть  $S$  — множество законов движения, состоящих из элементов множества  $\{sf, s, b\}$  таких, что в префиксе  $S$  любой длины количество символов  $b$  не превышает количества символов  $f$ . Не существует универсального экрана с 4 состояниями клеточного автомата, среди которых либо одна метка, либо три, такого, что любой закон движения из  $S$  можно реализовать на этом экране.

*Доказательство.* Покажем, что 4 состояний не достаточно.

Предположим, что  $|Q| = 4$ ,  $Q = \{0, 1, 2, 3\}$ .

1)  $2, 3 \in L$  ( $L = \{1, 2, 3\}$ ).

То есть у нас есть три метки, и ни одного сигнала. В любой момент после начала и до конца движения на экране находится ровно одна метка.

Рассмотрим произвольный момент времени. Пусть на экране находится метка 1, в следующий момент времени может измениться следующее: она может остаться на месте, переместиться вправо или влево, в то же время она может остаться меткой 1, или стать меткой 2, либо 3. Таким образом, для метки 1 есть 9 вариантов развития событий в следующий момент.

То же самое верно для меток 2 и 3. То есть, имея три метки и ни одного сигнала, возможно реализовать не более  $9^3$  законов движения, а нам требуется реализовать континуум, поскольку в  $S$  континуум законов движения.

2)  $2, 3 \in Q \setminus L$  ( $L = \{1\}$ ).

Пусть  $F \subset S$  — множество законов движения, состоящих из элементов множества  $\{sf, s\}$ . Попробуем реализовать  $F$ .

Метка всего одна. Все движения вперед можно осуществить только из  $\varphi(1, a, b) = 1$ ,  $a, b \in \{0, 2, 3\}$ , т.е. из преобработки. Под преобработкой

здесь понимается конечное множество сигналов, поданных на вход до появления метки на экране.

К моменту появления метки на экране там уже находится какая-то конфигурация, состоящая из элементов множества  $\{0, 2, 3\}$ . Таких конфигураций счётное число, а законов движения, которые надо реализовывать, континуум.  $\square$

**Лемма 4.** Пусть  $S$  — множество законов движения, состоящих из элементов множества  $\{sf, s, b\}$  таких, что в префиксе  $S$  любой длины количество символов  $b$  не превышает количества символов  $f$ . Не существует универсального экрана с 4 состояниями клеточного автомата, среди которых две метки, такого, что любой закон движения из  $S$  можно реализовать на этом экране.

*Доказательство.* Рассмотрим случай, когда у нас 2 метки —  $1, 2 \in L$ .

1) Пусть  $x$  — префикс закона движения. Обозначим через  $l(x)$  длину управляющей последовательности для этого префикса.

$$l(x) = 2I_b(x) + I_s(x) + I_{sf}(x)$$

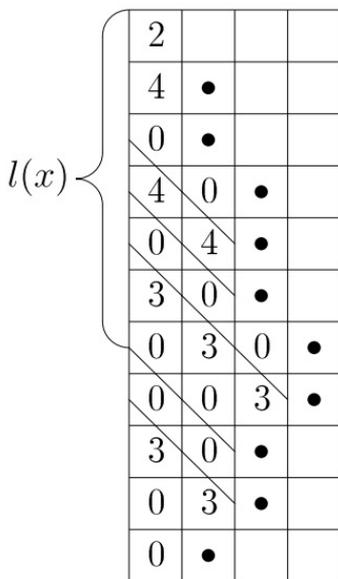


Рис. 10.

На рисунке 10 изображено движение метки на экране и управляющая последовательность для осуществления этого движения. Сигналы

до встречи с меткой движутся со скоростью 1 (наклонные линии на рисунке). В общем случае сигналы могут двигаться со скоростью, не большей, чем 1. Легко заметить, что для того, чтобы управляющие сигналы вовремя оказывались рядом с меткой, символ  $b$  закона движения должен соответствовать двум символам управляющей последовательности, символ  $s$  — одному символу управляющей последовательности,  $sf$  — также одному символу.

2) Сначала рассмотрим случай, когда предобработка отсутствует, то есть в момент появления метки на экране правее метки все автоматы находятся в состоянии покоя.

Пусть  $W$  — произвольное множество слов.

Если  $k$  — натуральное число, то через  $W^k$  обозначим множество слов  $\{w_1w_2 \dots w_k : w_i \in W, i = 1, \dots, k\}$ .

Обозначим  $f_W(n) = |\{x | x \in W, l(x) = n\}|$  — количество различных законов движения из множества  $W$  с заданной длиной  $n$  управляющей последовательности.

В доказательстве будем применять метод производящих функций [12]. Пусть  $F_W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_W(n)t^n$  — производящая функция для  $f_W(n)$ .

Пусть  $S^* \subset S$  — множество законов движения, состоящих из элементов множества  $\{s, sf, sfb\}$ .

Так как управляющая последовательность состоит из двух символов, то при помощи управляющей последовательности длины  $n$  возможно реализовать  $2^n$  законов движения.

Докажем, что существует такой номер  $N$ , что для любого  $n > N$  выполняется  $f_{S^*}(n) > 2^n$ .

Рассмотрим множество  $H_x = \{x\}$ , где  $x \in \{s, sf, sfb\}$ . Тогда  $F_{H_x}(t) = t^{l(x)}$ , где

$$l(x) = \begin{cases} 3 & \text{если } x = sfb, \\ 1 & \text{если } x \in \{s, sf\}. \end{cases}$$

Пусть  $H = \{s, sf, sfb\}$  — множество законов движения из  $S^*$ , состоящих из одного элемента.

Тогда  $F_H(t) = t^3 + t$  и  $F_{H^k}(t) = (t^3 + 2t)^k$ .

Пусть

$$H^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} H^k,$$

тогда производящая функция для множества  $H^*$  равна:

$$F_{H^*}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{H^k}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (t^3 + 2t)^k = \frac{1}{1 - t^3 - 2t}.$$

Очевидно, что  $H^*$  совпадает с  $S^*$ , и, следовательно,  $F_{H^*}(t)$  совпадает с производящей функцией для  $f_{S^*}(n)$ , то есть

$$F_{H^*}(t) = F_{S^*}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{S^*}(n)t^n.$$

Получим оценку радиуса сходимости ряда  $F_{S^*}(t)$ .

С одной стороны по признаку Коши:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f_{S^*}(n)^{1/n}}.$$

С другой стороны, так как  $F_{S^*}(t) = 1/(1-t^3-2t)$ , то  $R \leq R^* = \min |t_i|$ , где  $t_i$  — корни уравнения  $1-t^3-2t=0$ .

Из графика функции  $1-t^3-2t$  можно получить оценку  $R^* \approx 0.45 < \frac{1}{2}$ .

Таким образом:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f(n)^{1/n}} \leq \min |t_i| = R^* < \frac{1}{2}.$$

Откуда следует, что существует такой номер  $N$ , что для любого  $n > N$  выполняется

$$f(n)^{1/n} \geq \frac{1}{R^*} \implies f(n) \geq \left(\frac{1}{R^*}\right)^n > 2^n.$$

То есть нужно реализовать больше законов движения, чем это возможно.

3) Пусть  $f_S(n) = |\{x | x \in S, l(x) = n\}|$  — количество различных законов движения из множества  $S$  с заданной длиной  $n$  управляющей последовательности при отсутствии предобработки.

Так как  $S^* \subset S$ , то существует такой номер  $N$ , что для любого  $n > N$  выполняется

$$f_S(n) \geq f_{S^*}(n) \geq \left(\frac{1}{R^*}\right)^n > 2^n.$$

4) Теперь рассмотрим случай, когда предобработка есть, и пусть  $l_p$  — длина последовательности сигналов, подаваемой на вход на этапе предобработки.

Пусть  $e_0, e_1, e_2, \dots$  — состояние экрана в конце предобработки.

Так как за время предобработки первый символ входной последовательности  $\alpha_1 = 3$  не может сместиться далее чем на  $l_p$  позиций от начала экрана (в противном случае скорость его движения будет выше 1), то

$$e_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \geq l_p, \\ 0 \text{ или } 3, & \text{если } 0 \leq i < l_p. \end{cases}$$

Отсюда следует, что число возможных состояний экрана после преобработки равно  $2^{l_p}$ .

Пусть  $n$  — длина управляющей последовательности, подаваемой на вход, без учета этапа преобработки.

Обозначим  $v_n(l_p) = 2^{l_p} \cdot 2^n$  — максимально возможное число законов движения, которые можно реализовать с помощью управляющей последовательности длины  $n$  и входной последовательности длины  $l_p$  на этапе преобработки.

Пусть  $A$  — некоторый фиксированный закон движения из множества  $S$ ,  $l(A)$  — длина управляющей последовательности для этого закона движения.

Рассмотрим множество законов движения  $S_A = \{x : x = AB\} \subset S$ , где  $A$  — фиксированный префикс, заданный выше,  $B$  — произвольное продолжение из  $S$ .

Пусть  $l(x) = l(A) + l(B)$  — длина управляющей последовательности для закона движения  $AB$ .

Пусть  $f_{S_A}(n) = |\{x \in S_A, l(x) = l(A) + l(B) = n\}|$  — количество различных законов движения из множества  $S_A$  с заданной длиной  $n$  управляющей последовательности.

Докажем, что для любого фиксированного  $l_p < \infty$  существует такой номер  $N$ , что для любого  $n > N$  выполняется  $f_{S_A}(n) > v_n(l_p)$ .

Пусть  $f_S(k) = |\{y \mid l(y) = k\}|$  — количество различных законов движения  $y$  из  $S$  с заданной длиной  $k$  управляющей последовательности.

Как показано в пункте 3, существует такой номер  $N$ , что для любого  $n > N$  выполняется

$$f_S(k) \geq \left(\frac{1}{R^*}\right)^k.$$

Доказательство данного утверждения учитывает только последовательность шагов в законе движения. Таким образом, можно утверждать, что во-первых данная оценка остается верной при наличии преобработки и не зависит от нее. Во-вторых, при наличии некоторого фиксированного префикса оценка справедлива для  $k = l(B)$ , где  $l(B)$  — длина продолжения.

Значит, существует такой номер  $N$ , что для любого  $n > N$  справедлива оценка:

$$f_{S_A}(n) = f_S(l_B = n - l_A) \geq \left(\frac{1}{R^*}\right)^{n-l_A}.$$

Покажем, что существует такой номер  $N_0$ , что  $f_{S_A}(n)/v_n(l_p) > 1$  при  $n > N_0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{S_A}(n)}{v_n(l_p)} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R^*}\right)^{n-l(A)} \cdot \frac{1}{2^{l_p} \cdot 2^n} = \frac{(R^*)^{l(A)}}{2^{l_p}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2R^*}\right)^n = \infty.$$

А значит существует такой номер  $N_0$ , что для любого  $n > N_0$  выполняется  $f_{S_A}(n) > v_n(l_p)$ .

Так как префикс  $A$  был выбран произвольно, то для любого  $l_p$  и любого  $A \in S$  существует  $B \in S$  такое, что  $x = AB$  не реализуется при заданной длине предобработки  $l_p$ .

5) Покажем, что существует как минимум один закон движения из множества  $S$ , который нельзя реализовать при любой предобработке.

Пусть  $l_p = 0$  (предобработка отсутствует). Тогда существует  $B_0 \in S^* \subset S$  такой, что  $B_0$  нельзя реализовать без предобработки (по доказанному в пункте 2).

Пусть  $l_p = 1, A_1 = B_0$ . Тогда существует  $B_1 \in S$  такой, что  $B_0B_1$  нельзя реализовать при  $l_p = 1$  (по доказанному в пункте 4).

Но так как  $B_0$  нельзя реализовать при  $l_p = 0$ , то и  $B_0B_1$  также нельзя реализовать при  $l_p = 0$ . Следовательно,  $B_0B_1$  не реализуется при любом  $l_p \leq 1$ .

Пусть  $l_p = 2, A_2 = B_0B_1$ . Тогда существует  $B_2 \in S$  такой, что  $A_2B_2 = B_0B_1B_2$  нельзя реализовать при  $l_p = 2$  (в соответствии с пунктом 2) и при  $l_p \leq 1$  (так как нельзя реализовать  $B_0B_1$ ). Значит,  $B_0B_1B_2$  не реализуется при любом  $l_p \leq 2$ .

Продолжая, аналогичным образом можем получить закон движения  $\overline{B} = B_0B_1B_2 \dots B_n \dots$  такой, что для любого  $k$   $B_0B_1B_2 \dots B_k$  — не реализуется при любом  $l_p \leq k$ .

Так как  $B_k \in S$  для любого  $k$ , то  $\overline{B} \in S$ .

Построенная последовательность префиксов  $B_k$  бесконечна, следовательно закон движения  $\overline{B} \in S$  нельзя реализовать ни с какой длиной предобработки. □

**Лемма 5** (Нижняя оценка). *Пусть  $S$  — множество законов движения, состоящих из элементов множества  $\{sf, s, b\}$  таких, что в префиксе  $S$  любой длины количество символов  $b$  не превышает количества символов  $f$ . Тогда мощность множества состояний клеточного автомата, необходимого для осуществления всех законов из  $S$ :  $|Q(S)| > 4$ .*

*Доказательство.* Следует из лемм 3 и 4. □

Их лемм 2 и 5 следует теорема 2.

## 5. Заключение

В работе доказаны верхняя и нижняя оценки на число состояний клеточного автомата, реализующего множество законов  $S$ . Необходимо и достаточно пяти состояний.

## Список литературы

- [1] Фон Нейман Дж., *Теория самовоспроизводящихся автоматов*, Мир, Москва, 1971.
- [2] Мур Э.Ф. Математические модели самовоспроизведения, *Математические проблемы в биологии*, Мир, Москва, 1966.
- [3] Gardner M. The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life", *Scientific American*, 1970, № 4.
- [4] Wolfram S., *A New Kind of Science*, Wolfram Media, Champaign, Illinois, 2002.
- [5] Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Болотов А.А., *Основы теории однородных структур*, «Наука», Москва, 1990.
- [6] Титова Е.Е., “Конструирование изображений клеточными автоматами”, *Интеллектуальные системы*, **12**:2 (2008), 105–121.
- [7] Титова Е.Е., “Линейное по времени конструирование изображений клеточными автоматами”, *Интеллектуальные системы*, **16**:2 (2012), 215–234.
- [8] Титова Е.Е., “Конструирование движущихся изображений клеточными автоматами”, *Интеллектуальные системы*, **18**:1 (2014), 153–180.
- [9] Калачев Г.В., Титова Е.Е., “О мере множества законов движения точки, реализуемых клеточными автоматами”, *Интеллектуальные системы*, **22**:3 (2018), 105–125.
- [10] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., *Введение в теорию автоматов*, «Наука», Москва, 1985, 320 с.
- [11] Кудрявцев В.Б., Гасанов Э.Э., Подколзин А.С., *Основы теории интеллектуальных систем: в 4 кн. Книга четвёртая. Теория автоматов.*, «Издательские решения», Москва, 2018, 302 с.
- [12] Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А., *Задачи и упражнения по дискретной математике.*, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2005, 416 с.

## References

- [1] Von Neumann, John, *Theory of self-reproducing automata*, Urbana, University of Illinois Press, 1966
- [2] Edward F. Moore Machine models of self-reproduction, *Mathematical Problems in the Biological Sciences*, AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, U.S.A., 1962
- [3] Gardner M. The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life", *Scientific American*, 1970, № 4
- [4] Wolfram S., *A New Kind of Science*, Wolfram Media, Champaign, Illinois, 2002
- [5] Kudryavtsev V.B., Podkolzin A.S., Bolotov A.A., *Osnovy teorii odnorodnykh struktur [Fundamentals of the theory of homogeneous structures]*, «Nauka», Moscow, 1990 (in Russian)
- [6] Titova E.E., “Konstruirovaniye izobrazheniy kletochnymi avtomatami [Images construction by cellular automata]”, *Intelligent Systems*, **12**:2 (2008), 105–121 (in Russian)
- [7] Titova E.E., “Lineynoe po vremeni konstruirovaniye izobrazheniy kletochnymi avtomatami [Linear time images construction by cellular automata]”, *Intelligent Systems*, **16**:2 (2012), 215–234 (in Russian)

- [8] Titova E.E., “Konstruirovaniye dvizhushchikhsya izobrazheniy kletochnymi avtomatami [Moving images construction by cellular automata]”, *Intelligent Systems*, **18**:1 (2014), 153–180 (in Russian)
- [9] Kalachev G.V., Titova E.E., “O mere mnozhestva zakonov dvizheniya tochki, realizuemykh kletochnymi avtomatami [On the measure of the set of a point motion laws implemented by cellular automata]”, *Intelligent Systems*, **22**:3 (2018), 105–125 (in Russian)
- [10] Kudryavtsev V.B., Aleshin S.V., Podkolzin A.S., *Vvedenie v teoriyu avtomatov [Introduction to automata theory]*, «Nauka», Moscow, 1985 (in Russian), 320 pp.
- [11] Kudryavtsev V.B., Gasanov E.E., Podkolzin A.S., *Osnovy teorii intellektual'nykh sistem: v 4 kn. Kniga chetvertaya. Teoriya avtomatov. [Foundations of the theory of intelligent systems: in 4 books. Book four. Automata theory.]*, «Izdatel'skie resheniya», Moscow, 2018 (in Russian), 302 pp.
- [12] Gavrilov G.P., Sapozhenko A.A., *Zadachi i uprazhneniya po diskretnoy matematike [Problems and exercises in discrete mathematics]*, FIZMATLIT, Moscow, 2005 (in Russian), 416 pp.

**The number of states of a universal automaton of an infinite screen that implements bidirectional motion on a ray**  
**Kuznetsova E.V.**

The paper considers the implementation of one class of laws of motion by a cellular automaton on an infinite screen. It is shown that the minimum number of states of a cellular automaton simulating the bidirectional movement of a point on a ray at which the point does not make 2 movements to the right in a row is 5.

*Keywords:* cellular automaton, number of states, infinite screen, bidirectional motion, image construction.