Λ-выражения для примитивно-рекурсивных функций в иерархии Гжегорчика

Коновалов А.Ю.[1]

В данной работе рассматриваются Λ-выражения, построенные на основе универсальных функций для классов примитивно-рекурсивных функций иерархии Гжегорчика. Найдено достаточное условие на вид Λ-выражения, при котором это Λ-выражение определяет примитивно-рекурсивную функцию из заданного класса иерархии Гжегорчика.

Ключевые слова: иерархия Гжегорчика, примитивно-рекурсивные функции, строгая примитивно-рекурсивная реализуемость.

1. Введение

В [1] А. Гжегорчиком была разработана иерархия примитивно-рекурсивных функций, которая в дальнейшим была улучшенная П. Акстом [2], и на основе которой З. Дамнянович определил понятие строгой примитивно-рекурсивной реализуемости [3]. При исследовании данного вида реализуемости естественным образом возникают термы (далее — φ-термы), строящиеся из выражений вида $\varphi_z^i(x_1, \ldots, x_n)$, где φ_z^i — обозначение для примитивно-рекурсивной функции с номером z в нумерации П. Акста для i-го уровня иерархии примитивно-рекурсивных функций. Одной из особенностей φ-термов, которая затрудняет работу с ними, является их «многоэтажность». В общем случае она не может быть устранена в силу того факта, что для класса всех примитивно-рекурсивных функций, находящихся на i-ом уровне иерархии Акста, отсутствует принадлежащая этому классу универсальная функция. В данной работе разработана

[1] *Коновалов Александр Юрьевич* — канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотр. лаб. математических проблем искусственного интеллекта каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: konoval@yopmail.com.

Konovalov Aleksandr Yurevich — Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Junior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems, Laboratory of Mathematical Problem of Artificial Intelligence.

техника, которая позволяет осуществлять эквивалентные преобразования φ-термов, решая нетривиальную задачу сведения одних φ-термов к другим. Автор полагает, что полученные результаты найдут применение в дальнейших исследованиях понятия строгой примитивно-рекурсивной реализуемости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №20-01-00670.

2. Иерархия примитивно-рекурсивных функций

Будем использовать следующую общеупотребительную символику для замены слов и словосочетаний естественного языка: $\rightleftharpoons$ — «есть по определению»; $\forall$ — «для всех»; $\exists$ — «существует»; $\Longleftrightarrow$ — «тогда и только тогда, когда»; $\Longrightarrow$ — «если ..., то ...»; $\neg$ — «неверно, что». Символ $\Box$ означает конец доказательста. Посредством $\mathbb{N}$ обозначаем множество натуральных чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

Примитивно-рекурсивными называют функции натурального аргумента, которые могут быть получены с помощью операций подстановки и рекурсии из следующих исходных функций: функции-константы $O(x) = 0$, функции прибавления единицы $S(x) = x + 1$ и семейства функций проекции $I_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ $(n = 1, 2, ...,\ 1 \leq i \leq n)$.

Пусть $p_1, p_2, \ldots$ — последовательность всех простых чисел. Посредством $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ будем обозначать натуральное число $p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$, а через $\mathsf{p}_i a$ — степень простого числа p_i при разложении натурального числа $a \geq 1$ на простые множители. Выражение $\mathsf{p}_i 0$ будем считать равным 0 для любого i.

Будем использовать следующее обозначение для функций-констант: $\mathsf{c}_a^n(x_1, \ldots, x_n) = a$ $(n \geq 1, a \geq 0)$. Последовательность функций f_n определяется в [1, §4] следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} f_0(x, y) &= y + 1; \\ f_1(x, y) &= x + y; \\ f_2(x, y) &= (x + 1) \cdot (y + 1); \\ \text{для } n \geq 3 \quad f_n(x + 1, y) &= f_n(x, f_n(x, y)), \\ f_n(0, y) &= f_{n-1}(y + 1, y + 1). \end{aligned}$$

Введем обозначения для функций сигнум и симметрической разности:

$$\mathsf{sg}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0; \end{cases} \quad x \ominus y = \begin{cases} x - y, & \text{если } x > y, \\ 0, & \text{если } x \leq y. \end{cases}$$

Следуя [2] и [5], определим иерархию классов $\mathbf{E}_0 \subseteq \mathbf{E}_1 \subseteq \ldots$, объединение которых есть в точности множество всех примитивно-рекурсивных функций. Будем говорить, что функция $\varphi(z,\overline{x})$ получена *ограниченной рекурсией* (по Аксту) из функций $\psi(\overline{x})$, $\chi(z,y,\overline{x})$ и $\xi(z,\overline{x})$, если выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\varphi(0,\overline{x}) &= \psi(\overline{x}),\\ \varphi(z+1,\overline{x}) &= \chi(z,\varphi(z,\overline{x}),\overline{x})\cdot \mathsf{sg}(\varphi(z,\overline{x}))\cdot \mathsf{sg}(\xi(z,\overline{x})\ominus\varphi(z,\overline{x})).\end{aligned}$$

Пусть $\Theta = \{\theta_1,\ldots,\theta_m\}$ — конечное множество функций натурального аргумента. Посредством $\mathbf{E}^4(\Theta)$ будем обозначать наименьший замкнутый относительно подстановки и ограниченной рекурсии класс функций, который содержит все функции из Θ, а также следующие базовые функции: S, sg, $\ominus$, f_4, I^n_i, c^n_a $(n\geq 1,\ 1\leq i\leq n,\ a\geq 0)$. Определим нумерацию функций из класса $\mathbf{E}^4(\Theta)$ индукцией по построению функций из этого класса:

- $\langle 0,k_i,i\rangle$ — номер функции θ_i, где k_i — валентность θ_i $(1\leq i\leq m)$;
- $\langle 1,1\rangle$ — номер функции S;
- $\langle 2,n,a\rangle$ — номер функции c^n_a $(n\geq 1,\ a\geq 0)$;
- $\langle 3,n,i\rangle$ — номер функции I^n_i $(n\geq 1,\ 1\leq i\leq n)$;
- $\langle 4,1\rangle$ — номер функции sg;
- $\langle 5,2\rangle$ — номер функции $\ominus$;
- $\langle 6,2\rangle$ — номер функции f_4;
- $\langle 7,n,e_0,e_1,\ldots,e_k\rangle$ — номер функции $\varphi(\overline{x}) = \psi(\chi_1(\overline{x}),\ldots,\chi_k(\overline{x}))$ при условии, что натуральное число e_0 — номер k-местной функции $\psi\in\mathbf{E}^4(\Theta)$, а натуральные числа $e_1,\ldots,e_k$ — номера n-местных функций $\chi_1,\ldots,\chi_k\in\mathbf{E}^4(\Theta)$ соответственно $(n\geq 1,\ k\geq 1)$;
- $\langle 8,n+1,e_0,e',e''\rangle$ — номер $(n+1)$-местной функции φ, полученной ограниченной рекурсией из функций ψ, χ и ξ:

  $$\begin{aligned}\varphi(0,\overline{x}) &= \psi(\overline{x}),\\ \varphi(z+1,\overline{x}) &= \chi(z,\varphi(z,\overline{x}),\overline{x})\cdot \mathsf{sg}(\varphi(z,\overline{x}))\cdot \mathsf{sg}(\xi(z,\overline{x})\ominus\varphi(z,\overline{x}))\end{aligned}$$

  при условии, что e_0,e',e'' — номера функций $\psi,\chi,\xi\in\mathbf{E}^4(\Theta)$ соответственно $(n\geq 1)$.

Множество всех номеров функций из класса $\mathbf{E}^4(\Theta)$ обозначаем через I^Θ. Если $e\in\mathsf{I}^\Theta$, то посредством φ^Θ_e обозначаем $\mathsf{p}_2 e$-местную функцию из $\mathbf{E}^4(\Theta)$ с номером e. Множество всех номеров n-местных функций из класса $\mathbf{E}^4(\Theta)$ обозначаем через I_n^Θ $(n \geq 1)$. Определим 2-местную функцию u^Θ:

$$\mathsf{u}^\Theta(e,a) \rightleftharpoons \begin{cases} \varphi_e^\Theta(\mathsf{p}_1 a, ..., \mathsf{p}_{(\mathsf{p}_2 e)} a), & \text{если } e \in \mathsf{I}^\Theta, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, функция u^Θ является универсальной для класса $\mathbf{E}^4(\Theta)$ в том смысле, что выполняется соотношение

$$\varphi_e^\Theta(a_1, \ldots, a_n) = \mathsf{u}^\Theta(e, \langle a_1, \ldots, a_n \rangle)$$

для всех натуральный чисел $a_1, \ldots, a_n$ и $e \in \mathsf{I}_n^\Theta$. Используя диагональный метод (рассмотрев функцию $\mathsf{u}^\Theta(x, \langle x \rangle)+1$) можно показать, что функция u^Θ не принадлежит классу $\mathbf{E}^4(\Theta)$.

Определим иерархию классов $\mathbf{E}^4(\Theta_0) \subseteq \mathbf{E}^4(\Theta_1) \subseteq \ldots$, задав последовательность множеств $\Theta_0 \subseteq \Theta_1 \subseteq \ldots$ следующим образом:

$$\Theta_0 = \varnothing, \quad \Theta_1 = \{\mathsf{u}^{\Theta_0}\}, \quad \ldots, \quad \Theta_i = \Theta_{i-1} \cup \{\mathsf{u}^{\Theta_{i-1}}\}, \quad \ldots$$

Будем использовать следующие сокращения:

$$\mathbf{E}_i \rightleftharpoons \mathbf{E}^4(\Theta_i),\ \mathsf{u}_i \rightleftharpoons \mathsf{u}^{\Theta_i},\ \mathsf{I}^i \rightleftharpoons \mathsf{I}^{\Theta_i},\ \mathsf{I}_n^i \rightleftharpoons \mathsf{I}_n^{\Theta_i},\ \varphi_e^i \rightleftharpoons \varphi_e^{\Theta_i}\ (i \geq 0, n \geq 1, e \geq 1).$$

Предложение 1. *Объединение* $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathbf{E}_i$ *представляет собой множество всех примитивно-рекурсивных функций.*

Доказательство. См. [1, Теорема 4.13], [2, Теорема на стр. 58]. □

Введем обозначения для следующих функций:

$$\mathsf{t}^n(x_1, \ldots, x_n) = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle;$$

$$\varepsilon(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y, \\ 0, & \text{если } x \neq y; \end{cases} \quad \mathsf{if}(z,x,y) = \begin{cases} x, & \text{если } z = 0, \\ y, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\mathsf{in}(z,i) = \begin{cases} 1, & \text{если } z \in \mathsf{I}^i, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad \mathsf{in}'(z,i,n) = \begin{cases} 1, & \text{если } z \in \mathsf{I}_n^i, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Предложение 2. *Функции сложения, умножения, возведения в степень и функции* $\varepsilon, \mathsf{if}, \mathsf{in}, \mathsf{in}', \mathsf{p}_n, \mathsf{t}^n$ $(n \geq 1)$ *принадлежат классу* $\mathbf{E}_0$.

Доказательство. Функции сложения, умножения и возведения в степень являются элементарными по Кальмару [1, стр. 8, 9]. Из [1, Теоремы 4.4, 4.7] и [2, Теорема на стр. 58] следует, что все элементарные по Кальмару функции принадлежат $\mathbf{E}_0$. Функция in принадлежит классу $\mathbf{E}_0$ в силу [2, §2], [5, §46]. Остальные функции принадлежат классу $\mathbf{E}_0$, так как могут быть получены при помощи следующих подстановок:

- $\varepsilon(x, y) = (1 \ominus \mathsf{sg}(x \ominus y)) \cdot (1 \ominus \mathsf{sg}(y \ominus x))$

- $\mathsf{if}(z, x, y) = (1 \ominus z) \cdot x + \mathsf{sg}(z) \cdot y$

- $t^n(x_1, \ldots, x_n) = p_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_n}$

- $\mathsf{p}_n(x) = \mathsf{exp}(x, p_n)$, где exp — элементарная по Кальмару функция, определяемая на стр. 13 в [1].

- $\mathsf{in}'(z, i, n) = \mathsf{in}(z, i) \cdot \varepsilon(\mathsf{p}_2 z, n)$

$\square$

Для всякой функции $g \in \mathbf{E}_0$ фиксируем некоторый ее номер в классе $\mathbf{E}_0$, который будем обозначать $\Lambda[g]$. Без ограничения общности будем считать, что имеет место $1 \leq \mathsf{p}_1\Lambda[g] \leq 6$, если g — базовая функция, т.е. для базовых функций фиксирован именно тот номер, который указан в определении нумерации класса $\mathbf{E}^4(\Theta)$. Множество всех n-местных функций из класса $\mathbf{E}_0$ обозначаем $\mathbf{E}_0^n$ $(n \geq 1)$.

3. φ-термы

Назовем *φ-атомами* предметные переменные и натуральные числа. Будем говорить, что выражение t есть *φ-терм*, если выполняется одно из следующих условий:

- t — φ-атом;

- t имеет вид $g(t_1, \ldots, t_n)$, где $g \in \mathbf{E}_0^n$, и $t_1, \ldots, t_n$ — φ-термы $(n \geq 1)$;

- t имеет вид $\varphi_s^v(t_1, \ldots, t_n)$, где $s, t_1, \ldots, t_n$ — φ-термы, v — φ-атом $(n \geq 1)$.

Через $Var(t)$ обозначаем множество всех предметных переменных, входящих в φ-терм t. Будем называть *замкнутыми* те φ-термы, которые не содержат переменных.

Для каждого замкнутого φ-терма t индуктивно определим его *значение* $\mathsf{v}(t) \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. Будем писать $!t$, если $\mathsf{v}(t) \neq -1$.

- $\mathsf{v}(a) \rightleftharpoons a$, если a — натуральное число;

- $\mathsf{v}(g(t_1, \ldots, t_n)) \rightleftharpoons \begin{cases} g(\mathsf{v}(t_1), \ldots, \mathsf{v}(t_n)), & \text{если } !t_1, \ldots, !t_n; \\ -1, & \text{иначе} \end{cases}$, где $g \in \mathbf{E}_0^n$;

- $\mathsf{v}(\varphi^i_s(t_1,\ldots,t_n)) \rightleftharpoons$

$$\rightleftharpoons \quad \begin{cases} \varphi^i_{\mathsf{v}(s)}(\mathsf{v}(t_1),\ldots,\mathsf{v}(t_n)), & \text{если } !s, !t_1,\ldots,!t_n \text{ и } \mathsf{v}(s)\in \mathsf{I}^i_n; \\ -1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Через $[k_1,\ldots,k_n/x_1,\ldots,x_n]\,t$ будем обозначать результат подстановки в φ-терм t натуральных чисел $k_1,\ldots,k_n$ вместо всех вхождений переменных $x_1,\ldots,x_n$ соответственно. Пусть $t_0,\ t_1,\ t_2$ — φ-термы, все переменные которых содержатся среди списка переменных $x_1,\ldots,x_n$. Будем говорить, что φ-термы t_1 и t_2 *условно равны*, и писать $t_1 \simeq t_2$, если имеет место

$$\mathsf{v}([k_1,\ldots,k_n/x_1,\ldots,x_n]\,t_1) = \mathsf{v}([k_1,\ldots,k_n/x_1,\ldots,x_n]\,t_2) \qquad (1)$$

для всех натуральных чисел $k_1,\ldots,k_n$. Будем говорить, что φ-терм t_2 является *доопределением* φ-терма t_1, и писать $t_1 \preccurlyeq t_2$, если имеет место соотношение (1) для всех натуральных чисел $k_1,\ldots,k_n$, для которых верно $![k_1,\ldots,k_n/x_1,\ldots,x_n]\,t_1$. Назовем φ-терм t_0 *всюду определенным*, если выполняется $![k_1,\ldots,k_n/x_1,\ldots,x_n]\,t_0$ для всех натуральных чисел $k_1,\ldots,k_n$. Нетрудно показать, что отношения $\simeq$ и $\preccurlyeq$, а также понятие всюду определенного терма не зависят от выбора списка переменных $x_1,\ldots,x_n$.

Определим отношение $u \in_{\overline{a}} t$, где u — φ-атом, t — φ-терм, $\overline{a}$ — конечная последовательность элементов множества $\mathbb{N}\cup\{\uparrow,\downarrow\}$, индукцией по построению φ-терма t:

- $u \in_0 u$;
- $u \in_{i,\overline{q}} g(t_1,\ldots,t_n)$, если $u \in_{\overline{q}} t_i$ $(1\le i\le n,\ g\in \mathbf{E}^n_0)$;
- $u \in_{\uparrow} \varphi^u_s(t_1,\ldots,t_n)$;
- $u \in_{\downarrow,\overline{q}} \varphi^u_s(t_1,\ldots,t_n)$, если $u \in_{\overline{q}} s$;
- $u \in_{i,\overline{q}} \varphi^u_s(t_1,\ldots,t_n)$, если $u \in_{\overline{q}} t_i$ $(1\le i\le n)$.

Произвольную тройку $(u,t,\overline{a})$, для которой имеет место $u \in_{\overline{a}} t$, назовем *вхождением* φ-атома u в φ-терм t. Будем говорить, что φ-атом u имеет вхождение в φ-терм t, если верно $u \in_{\overline{a}} t$ для некоторой последовательности $\overline{a}$. *Уровнем* вхождения $(u,t,\overline{a})$ назовем число символов $\downarrow$ в последовательности $\overline{a}$. Будем говорить, что вхождение $(u,t,\overline{a})$ есть *вхождение в качестве верхнего индекса*, если последовательность $\overline{a}$ оканчивается символом $\uparrow$. Вхождения $(u,t,\overline{a})$, для которых последний символ последовательности $\overline{a}$ есть 0, назовем *вхождениями в качестве аргумента.*

Нетрудно видеть, что любое вхождение есть либо вхождение в качестве верхнего индекса, либо вхождение в качестве аргумента.

Множество всех φ-атомов, которые имеют вхождения в качестве верхнего индекса в φ-терм t с уровнем вхождения равным i, обозначаем $In^i(t)$. Множество всех переменных, которые имеют вхождения в качестве аргумента в φ-терм t с уровнем вхождения равным i, обозначаем $Arg^i(t)$. *Высотой* φ-терма t назовем уровень вхождения, имеющего наибольших уровень среди среди всех вхождений φ-атомов в него. Высоту φ-терма t обозначаем через $h(t)$. Следующие леммы непосредственно следуют из выше определенных понятий.

Лемма 1. *Пусть s, $t_1,\dots,t_n$ — φ-термы, u — φ-атом, i — натуральное число. Тогда выполняются следующие соотношения*

$$In^i(g(t_1,\dots,t_n)) = \bigcup_{k=1}^{n} In^i(t_k), \quad Arg^i(g(t_1,\dots,t_n)) = \bigcup_{k=1}^{n} Arg^i(t_k),$$

$$In^0(\varphi_s^u(t_1,\dots,t_n)) = \{u\} \cup \bigcup_{k=1}^{n} In^0(t_k), \;\; Arg^0(\varphi_s^u(t_1,\dots,t_n)) = \bigcup_{k=1}^{n} Arg^0(t_k),$$

$$In^{i+1}(\varphi_s^u(t_1,\dots,t_n)) = In^i(s) \cup \bigcup_{k=1}^{n} In^{i+1}(t_k),$$

$$Arg^{i+1}(\varphi_s^u(t_1,\dots,t_n)) = Arg^i(s) \cup \bigcup_{k=1}^{n} Arg^{i+1}(t_k).$$

Лемма 2. *Пусть s, $t_1,\dots,t_n$ — φ-термы, u — φ-атом. Тогда выполняются следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} h(u) &= 0; \\ h(g(t_1,\dots,t_n)) &= \max(h(t_1),\dots,h(t_n)), \text{ где } g \in \mathbf{E}_0^n; \\ h(\varphi_s^u(t_1,\dots,t_n)) &= \max(h(s)+1,\; h(t_1),\dots,h(t_n)). \end{aligned}$$

Предложение 3. *Пусть t — φ-терм. Тогда для всех натуральных чисел n имеет место*

$$h(t) \le n \Longleftrightarrow In^n(t) = \varnothing. \tag{2}$$

Доказательство. Индукция по построению φ-терма t.

Пусть t — φ-атом и n — произвольное натуральное число. Тогда верно $h(t) = 0$ и $In^n(t) = \varnothing$. Следовательно, имеет место (2).

Пусть t имеет вид $g(t_1,\dots,t_m)$ и n — произвольное натуральное число. Тогда, применяя предположение индукции и леммы 1, 2, получаем

$$h(t) \le n \Longleftrightarrow \forall i = 1,\dots,m : h(t_i) \le n \Longleftrightarrow \\ \forall i = 1,\dots,m : In^n(t_i) = \varnothing \Longleftrightarrow In^n(t) = \varnothing.$$

Пусть t имеет вид $\varphi_s^u(t_1, \ldots, t_m)$ и n — произвольное натуральное число. Заметим, что верно $h(t) > 0$ и $u \in In^0(t)$. Таким образом, имеет место (2) при $n = 0$. Если $n > 0$, то, применяя предположение индукции и леммы 1, 2, получаем

$$h(t) \leq n \Longleftrightarrow h(s) \leq n-1 \text{ и } \forall i = 1, \ldots, m : h(t_i) \leq n \Longleftrightarrow \\ In^{n-1}(s) = \varnothing \text{ и } \forall i = 1, \ldots, m : In^n(t_i) = \varnothing \Longleftrightarrow In^n(t) = \varnothing.$$

□

4. Λ-выражения

Пусть t — φ-терм, $\overline{x} = x_1, \ldots, x_m$ — список предметных переменных. Определим φ-терм $\Lambda\overline{x}.\, t$ индукцией по построению φ-терма t:

- $\Lambda\overline{x}.\, a \rightleftharpoons \Lambda[\mathsf{c}_a^m]$, где a — натуральное число;
- $\Lambda\overline{x}.\, y \rightleftharpoons \Lambda[I_k^m]$, если y есть x_k $(1 \leq k \leq m)$;
- $\Lambda\overline{x}.\, y \rightleftharpoons \langle 2, m, y\rangle$, если переменная y не входит в список $\overline{x}$;
- $\Lambda\overline{x}.\, \varphi_s^u(t_1, \ldots, t_n) \rightleftharpoons \langle 7, m, s, \Lambda\overline{x}.\, t_1, \ \ldots, \ \Lambda\overline{x}.\, t_n\rangle$;
- $\Lambda\overline{x}.\, g(t_1, \ldots, t_n) \rightleftharpoons \langle 7, m, \Lambda[g], \Lambda\overline{x}.\, t_1, \ \ldots, \ \Lambda\overline{x}.\, t_n\rangle$.

Отметим, что если переменная y не входит в список $\overline{x}$, то имеет место $\mathsf{v}([a/y]\, \Lambda\overline{x}.\, y) = \Lambda[\mathsf{c}_a^m]$ для всех натуральных чисел a.

Предложение 4. *Пусть t — φ-терм, $\overline{x}$ — список предметных переменных. Тогда*

$$In^i(\Lambda\overline{x}.\, t) = In^{i+1}(t) \text{ для всех } i \geq 0; \tag{3}$$

$$Arg^i(\Lambda\overline{x}.\, t) = Arg^{i+1}(t) \text{ для всех } i > 0; \tag{4}$$

$$Arg^0(\Lambda\overline{x}.\, t) = Arg^1(t) \cup (Arg^0(t) - \overline{x}). \tag{5}$$

Доказательство. Индукция по построению φ-терма t.

- Докажем соотношение (3).

  Пусть t — φ-атом. Тогда $In^i(\Lambda\overline{x}.\, t) = \varnothing = In^{i+1}(t)$, так как в φ-термах t и $\Lambda\overline{x}.\, t$ нет верхних индексов.

  Пусть t имеет вид $g(t_1, \ldots, t_n)$. Тогда, применяя предположение индукции и лемму 1, получаем

$$In^i(\Lambda\overline{x}.\, t) = In^i(\langle 7, m, \Lambda[g], \Lambda\overline{x}.\, t_1, \ \ldots, \ \Lambda\overline{x}.\, t_n\rangle) = \\ = \bigcup_{k=1}^{n} In^i(\Lambda\overline{x}.\, t_k) = \bigcup_{k=1}^{n} In^{i+1}(t_k) = In^{i+1}(g(t_1, \ldots, t_n)).$$

Пусть t имеет вид $\varphi_s^u(t_1, \dots, t_n)$. Тогда, применяя предположение индукции и лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} In^i(\Lambda\overline{x}.\, t) = In^i(\langle 7, m, s, \Lambda\overline{x}.\, t_1,\ \dots,\ \Lambda\overline{x}.\, t_n\rangle) = \\ = In^i(s) \cup \bigcup_{k=1}^{n} In^i(\Lambda\overline{x}.\, t_k) = In^i(s) \cup \bigcup_{k=1}^{n} In^{i+1}(t_k) = \\ = In^{i+1}(\varphi_s^u(t_1, \dots, t_n)). \end{aligned}$$

- Докажем соотношение (4).

  Пусть t — φ-атом. Тогда $h(t) = h(\Lambda\overline{x}.\, t) = 0$. Т.к. $i > 0$, получаем $Arg^i(\Lambda\overline{x}.\, t) = \varnothing = Arg^i(t)$.

  В остальных случаях используем предположение индукции и лемму 1 аналогично доказательству соотношения (3).

- Докажем соотношение (5).

  Пусть t — натуральное число a. Тогда

$$Arg^0(\Lambda\overline{x}.\, a) = Arg^0(\Lambda[\mathsf{c}_a^m]) = \varnothing = Arg^1(a) \cup (Arg^0(a) - \overline{x}).$$

  Пусть t есть x_i $(1 \leq i \leq n)$. Тогда

$$Arg^0(\Lambda\overline{x}.\, x_i) = Arg^0(\Lambda[I_i^m]) = \varnothing = Arg^1(x_i) \cup (Arg^0(x_i) - \overline{x}).$$

  Пусть t — предметная переменная z, не входящая в список $\overline{x}$. Тогда

$$Arg^0(\Lambda\overline{x}.\, z) = Arg^0(\langle 2, m, z\rangle) = \{z\} = Arg^1(z) \cup (Arg^0(z) - \overline{x}).$$

  Пусть t имеет вид $g(t_1, \dots, t_n)$. Тогда, используя предположение индукции и лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} Arg^0(\Lambda\overline{x}.\, t) = Arg^0(\langle 7, m, \Lambda[g], \Lambda\overline{x}.\, t_1,\ \dots,\ \Lambda\overline{x}.\, t_n\rangle) = \\ = \bigcup_{k=1}^{n} Arg^0(\Lambda\overline{x}.\, t_k) = \bigcup_{k=1}^{n} Arg^1(t_k) \cup \bigcup_{k=1}^{n} (Arg^0(t_k) - \overline{x}) = \\ = Arg^1(g(t_1, \dots, t_n)) \cup (Arg^0(g(t_1, \dots, t_n)) - \overline{x}). \end{aligned}$$

Пусть t имеет вид $\varphi^u_s(t_1, \ldots, t_n)$. Тогда, применяя предположение индукции и лемму 1, получаем

$$\begin{aligned}
Arg^0(\Lambda\overline{x}.\,t) &= Arg^0(\langle 7, m, s, \Lambda\overline{x}.\,t_1,\ \ldots,\ \Lambda\overline{x}.\,t_n\rangle) = \\
&= Arg^0(s) \cup \bigcup_{k=1}^{n} Arg^0(\Lambda\overline{x}.\,t_k) = \\
&= Arg^0(s) \cup \bigcup_{k=1}^{n} Arg^1(t_k) \cup \bigcup_{k=1}^{n} (Arg^0(t_k) - \overline{x}) = \\
&= Arg^1(\varphi^u_s(t_1, \ldots, t_n)) \cup (Arg^0(\varphi^u_s(t_1, \ldots, t_n)) - \overline{x}).
\end{aligned}$$

□

Введем следующие обозначения:

$$In^{\geq i}(t) \rightleftharpoons \bigcup_{k=i}^{\infty} In^k(t), \quad Arg^{\geq i}(t) \rightleftharpoons \bigcup_{k=i}^{\infty} Arg^k(t). \quad (i \geq 0)$$

Из соотношений (3), (4) следует

$$In^{\geq i}(\Lambda\overline{x}.\,t) = In^{\geq i+1}(t) \text{ для всех } i \geq 0, \tag{6}$$

$$Arg^{\geq i}(\Lambda\overline{x}.\,t) = Arg^{\geq i+1}(t) \text{ для всех } i > 0. \tag{7}$$

Предложение 5. *Пусть t — φ-терм, $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ — списки предметных переменных. Тогда выполняются следующие соотношения:*

$$In^{\geq i}(\Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_1.\,t) = In^{\geq i+n}(t) \text{ для всех } i \geq 0; \tag{8}$$

$$Arg^{\geq i}(\Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_1.\,t) = Arg^{\geq i+n}(t) \text{ для всех } i > 0; \tag{9}$$

$$Arg^0(\Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_1.\,t) = (\ldots((Arg^0(t) - \overline{x}_1) \cup Arg^1(t)) \ldots - \overline{x}_n) \cup Arg^n(t); \tag{10}$$

$$Arg^{\geq 0}(\Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_1.\,t) = (\ldots((Arg^0(t) - \overline{x}_1) \cup Arg^1(t)) \ldots - \overline{x}_n) \cup Arg^{\geq n}(t). \tag{11}$$

Доказательство. Соотношения (8), (9) следуют из (6), (7) соответственно. Применяя (9) при $i = 1$, получаем

$$\begin{aligned}
Arg^{\geq 0}(\Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_1.\,t) &= Arg^0(\Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_1.\,t) \cup Arg^{\geq 1}(\Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_1.\,t) = \\
&= Arg^0(\Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_1.\,t) \cup Arg^{\geq n+1}(t).
\end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (11) сводится к (10). Докажем (10) индукцией по n. При $n = 1$ соотношение (10) справедливо в силу предложения

4. Используя предположение индукции для натурального числа n равного $n-1$, получаем

$$
\begin{aligned}
&Arg^0(\Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_1.\, t) = \\
&\quad = (\ldots((Arg^0(\Lambda\overline{x}_1.\, t) - \overline{x}_2) \cup Arg^1(\Lambda\overline{x}_1.\, t))\ldots - \overline{x}_n) \cup Arg^{n-1}(\Lambda\overline{x}_1.\, t).
\end{aligned}
$$

Используя тот факт, что для каждого $i = 1, \ldots, n-1$ в силу предложения 4 имеет место $Arg^i(\Lambda\overline{x}_1.\, t) = Arg^{i+1}(t)$, получаем (10). □

Предложение 6. *Пусть t — φ-терм, $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ — списки предметных переменных и множество $Arg^{\geq i}(t)$ не содержит переменных из списка $\overline{x}_i$ для каждого $i = 1, \ldots, n$. Тогда имеет место*

$$Arg^{\geq 0}(\Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_1.\, t) = Arg^{\geq 0}(t) - \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n.$$

Доказательство. Применяя (11), получаем

$$
\begin{aligned}
&Arg^{\geq 0}(\Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_1.\, t) = \\
&\qquad = (\ldots((Arg^0(t) - \overline{x}_1) \cup Arg^1(t))\ldots - \overline{x}_n) \cup Arg^{\geq n}(t) = \\
&\qquad = \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} Arg^k(t) \cup Arg^{\geq n}(t)\right) - \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n = Arg^{\geq 0}(t) - \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n.
\end{aligned}
$$

□

Предложение 7. *Пусть t — φ-терм, v — φ-атом, $\overline{x} = x_1, \ldots, x_m$ — список предметных переменных, и верно $In^0(t) \subseteq \{v\}$. Тогда имеет место следующее условное равенство:*

$$\varphi^v_{\Lambda\overline{x}.\, t}(\overline{x}) \simeq t. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть все переменные, входящие в φ-термы v и t, содержатся среди списка $\overline{y} = y_1, \ldots, y_l$. Осуществим подстановку произвольных натуральных чисел $\overline{k} = k_1, \ldots, k_l$ в правую и левую части условного равенства (12) вместо всех вхождений переменных $y_1, \ldots, y_l$ соответственно, и докажем, что имеет место

$$\mathsf{v}([\overline{k}/\overline{y}]\, \varphi^v_{\Lambda\overline{x}.\, t}(\overline{x})) = \mathsf{v}([\overline{k}/\overline{y}]\, t)$$

индукцией по построению φ-терма t. Обозначим натуральное число $[\overline{k}/\overline{y}]v$ через j, и список натуральных чисел $[\overline{k}/\overline{y}]\overline{x}$ через $\overline{k'}$.

- Пусть t есть натуральное число a. Тогда $\Lambda\overline{x}.\, t$ есть $\Lambda[\mathsf{c}^m_a]$ и имеет место:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{v}([\overline{k}/\overline{y}]\, \varphi^v_{\Lambda\overline{x}.\, t}(\overline{x})) &= \mathsf{v}(\varphi^{[\overline{k}/\overline{y}]\, v}_{[\overline{k}/\overline{y}]\, \Lambda[\mathsf{c}^m_a]}([\overline{k}/\overline{y}]\, \overline{x})) = \mathsf{v}(\varphi^j_{\Lambda[\mathsf{c}^m_a]}(\overline{k'})) = \\
&= \mathsf{c}^m_a(\overline{k'}) = a = \mathsf{v}(a) = \mathsf{v}([\overline{k}/\overline{y}]t).
\end{aligned}
$$

- Пусть t есть переменная x_i $(1 \leq i \leq m)$. Тогда $\Lambda\overline{x}.\,t$ есть $\Lambda[I_i^m]$ и имеет место:

$$\mathsf{v}([\overline{k}/\overline{y}]\,\varphi^v_{\Lambda\overline{x}.\,t}(\overline{x})) = \mathsf{v}(\varphi^{[\overline{k}/\overline{y}]\,v}_{[\overline{k}/\overline{y}]\,\Lambda[I_i^m]}([\overline{k}/\overline{y}]\,\overline{x})) = \mathsf{v}(\varphi^j_{\Lambda[I_i^m]}(\overline{k'})) = \\ = I_i^m(\overline{k'}) = k_i' = \mathsf{v}(k_i') = \mathsf{v}([\overline{k}/\overline{y}]x_i) = \mathsf{v}([\overline{k}/\overline{y}]t).$$

- Пусть t есть переменная z, которая не входит в список $\overline{x}$. Обозначим $[\overline{k}/\overline{y}]\,z$ через b. Тогда имеет место $\mathsf{v}([\overline{k}/\overline{y}]\Lambda\overline{x}.\,t) = \mathsf{v}(\langle 2, m, b\rangle) = \Lambda[\mathsf{c}_b^m]$ и верно:

$$\mathsf{v}([\overline{k}/\overline{y}]\,\varphi^v_{\Lambda\overline{x}.\,t}(\overline{x})) = \mathsf{v}(\varphi^j_{[\overline{k}/\overline{y}]\,\Lambda\overline{x}.\,t}(\overline{k'})) = \mathsf{v}(\varphi^j_{\langle 2,m,b\rangle}(\overline{k'})) = \\ = \mathsf{c}_b^m(\overline{k'}) = b = \mathsf{v}([\overline{k}/\overline{y}]\,z) = \mathsf{v}([\overline{k}/\overline{y}]t).$$

- Пусть t имеет вид $g(t_1, \ldots, t_n)$, где $g \in \mathbf{E}_0^n$ $(n \geq 1)$. Введем следующие обозначения:

$$t' \rightleftharpoons [\overline{k}/\overline{y}]\,t,\;\; (\Lambda\overline{x}.\,t)' \rightleftharpoons [\overline{k}/\overline{y}]\,\Lambda\overline{x}.\,t, \\ t_i' \rightleftharpoons [\overline{k}/\overline{y}]\,t_i,\;\; (\Lambda\overline{x}.\,t_i)' \rightleftharpoons [\overline{k}/\overline{y}]\,\Lambda\overline{x}.\,t_i \;\; (1 \leq i \leq n).$$

Тогда

$$(\Lambda\overline{x}.\,t)' = [\overline{k}/\overline{y}]\,\Lambda\overline{x}.\,t = [\overline{k}/\overline{y}]\,\langle 7, m, \Lambda[g], \Lambda\overline{x}.\,t_1,\; \ldots,\; \Lambda\overline{x}.\,t_n\rangle = \\ = \langle 7, m, \Lambda[g], (\Lambda\overline{x}.\,t_1)',\; \ldots,\; (\Lambda\overline{x}.\,t_n)'\rangle. \quad (13)$$

Из (13) следует, что верно $!(\Lambda\overline{x}.\,t)'$ и имеет место $\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t)') \in \mathsf{I}_m^j$ тогда и только тогда, когда для всех $i = 1, \ldots, n$ верно $!(\Lambda\overline{x}.\,t_i)'$ и имеет место $\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t_i)') \in \mathsf{I}_m^j$.

Согласно лемме 1 имеет место $In^0(g(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} In^0(t_i)$. Следовательно для каждого из φ-термов $t_1, \ldots, t_n$ выполняется условие доказываемого предложения: $In^0(t_i) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} In^0(t_i) \subseteq \{v\}$. Таким образом, в силу предположения индукции выполняются следующие соотношения:

$$\mathsf{v}(\varphi^j_{(\Lambda\overline{x}.\,t_i)'}(\overline{k'})) = \mathsf{v}(t_i') \;\; (1 \leq i \leq n). \quad (14)$$

Из (14) следует, что верно $!(\Lambda\overline{x}.\,t_i)'$ и $\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t_i)') \in \mathsf{I}_m^j$ тогда и только тогда, когда верно $!t_i'$ $(1 \leq i \leq n)$.

Рассмотрим случай, когда $\mathsf{v}(t_i') = -1$ для некоторого натурального числа i $(1 \leq i \leq n)$. Тогда или $\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t_i)') = -1$, или $\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t_i)') \notin \mathsf{I}_m^j$.

Следовательно, или $\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t)') = -1$, или $\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t)') \notin \mathsf{I}^j_m$. Таким образом, имеет место:

$$\mathsf{v}([\overline{k}/\overline{y}]\,\varphi^v_{\Lambda\overline{x}.\,t}(\overline{x})) = \mathsf{v}(\varphi^j_{(\Lambda\overline{x}.\,t)'}(\overline{k'})) = -1 = \\ = \mathsf{v}(g(t'_1,\ldots,t'_n)) = \mathsf{v}(t') = \mathsf{v}([\overline{k}/\overline{y}]\,t).$$

Теперь пусть $!t'_1,\ldots,!t'_n$. Тогда $!(\Lambda\overline{x}.\,t_i)'$ и $\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t_i)') \in \mathsf{I}^j_m$ для всех $i = 1,\ldots,n$. Следовательно, верно $!(\Lambda\overline{x}.\,t)'$ и $\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t)') \in \mathsf{I}^j_m$. Таким образом, имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}\mathsf{v}([\overline{k}/\overline{y}]\,\varphi^v_{\Lambda\overline{x}.\,t}(\overline{x})) &= \varphi^j_{\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t)')}(\overline{k'}) = \\ &= \varphi^j_{\langle 7,m,\Lambda[g],\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t_1)'),\ldots,\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t_n)')\rangle}(\overline{k'}) = \\ &= \varphi^j_{\Lambda[g]}(\varphi^j_{\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t_1)')}(\overline{k'}),\ldots,\varphi^j_{\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t_n)')}(\overline{k'})) = \\ &= g(\mathsf{v}(t'_1),\ldots,\mathsf{v}(t'_n)) = \mathsf{v}(g(t'_1,\ldots,t'_n)) = \mathsf{v}(t').\end{aligned}$$

- Пусть t имеет вид $\varphi^u_s(t_1,\ldots,t_n)$ $(n \geq 1)$. Из $In^0(t) \subseteq \{v\}$ следует, что верхний индекс u есть φ-атом v. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}&t' \rightleftharpoons [\overline{k}/\overline{y}]\,t,\ (\Lambda\overline{x}.\,t)' \rightleftharpoons [\overline{k}/\overline{y}]\,\Lambda\overline{x}.\,t,\\ &t'_i \rightleftharpoons [\overline{k}/\overline{y}]\,t_i,\ (\Lambda\overline{x}.\,t_i)' \rightleftharpoons [\overline{k}/\overline{y}]\,\Lambda\overline{x}.\,t_i\ (1 \leq i \leq n),\\ &s' \rightleftharpoons [\overline{k}/\overline{y}]\,s.\end{aligned}$$

Тогда

$$(\Lambda\overline{x}.\,t)' = [\overline{k}/\overline{y}]\,\Lambda\overline{x}.\,t = [\overline{k}/\overline{y}]\,\langle 7,m,s,\Lambda\overline{x}.\,t_1,\ \ldots,\ \Lambda\overline{x}.\,t_n\rangle = \\ = \langle 7,m,s',(\Lambda\overline{x}.\,t_1)',\ \ldots,\ (\Lambda\overline{x}.\,t_n)'\rangle. \quad (15)$$

Из (15) следует, что верно $!(\Lambda\overline{x}.\,t)'$ и имеет место $\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t)') \in \mathsf{I}^j_m$ тогда и только тогда, когда имеет место $!s'$ и $\mathsf{v}(s') \in \mathsf{I}^j_n$, и для всех $i = 1,\ldots,n$ верно $!(\Lambda\overline{x}.\,t_i)'$ и $\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t_i)') \in \mathsf{I}^j_m$.

Согласно лемме 1 имеет место $In^0(\varphi^v_s(t_1,\ldots,t_n)) = \{v\} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} In^0(t_i)$. Следовательно, для каждого из φ-термов $t_1,\ldots,t_n$ выполняется условие доказываемого предложения: $In^0(t_i) \subseteq \{v\} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} In^0(t_i) \subseteq \{v\}$. Таким образом, в силу предположения индукции выполняются соотношения (14). Из (14) следует, что имеет место $!(\Lambda\overline{x}.\,t_i)'$ и $\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t_i)') \in \mathsf{I}^j_m$ тогда и только тогда, когда верно $!t'_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

Рассмотрим случай, когда $\mathsf{v}(t'_i) = -1$ для некоторого натурального числа i $(1 \leq i \leq n)$. Тогда или $\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t_i)') = -1$, или $\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t_i)') \notin \mathsf{I}^j_m$.

Следовательно, или $\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t)') = -1$, или $\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t)') \notin \mathsf{I}^j_m$. Таким образом, имеет место:

$$\begin{aligned}\mathsf{v}([\overline{k}/\overline{y}]\,\varphi^v_{\Lambda\overline{x}.\,t}(\overline{x})) = \mathsf{v}(\varphi^j_{(\Lambda\overline{x}.\,t)'}(\overline{k'})) = -1 = \\ = \mathsf{v}(\varphi^j_{s'}(t'_1,\ldots,t'_n)) = \mathsf{v}(t') = \mathsf{v}([\overline{k}/\overline{y}]\,t).\end{aligned} \quad (16)$$

Рассмотрим случай, когда $\mathsf{v}(s') = -1$ или $\mathsf{v}(s') \notin \mathsf{I}^j_n$. Тогда или $\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t)') = -1$, или $\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t)') \notin \mathsf{I}^j_m$. Таким образом, имеет место цепочка равенств (16).

Пусть теперь $!s'$, $!t'_1,\ldots,!t'_n$ и $\mathsf{v}(s') \in \mathsf{I}^j_n$. В этом случае имеет место $!(\Lambda\overline{x}.\,t_i)'$ и $\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t_i)') \in \mathsf{I}^j_m$ для всех $i = 1,\ldots,n$. Следовательно, верно $!(\Lambda\overline{x}.\,t)'$ и $\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t)') \in \mathsf{I}^j_m$. Таким образом, имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}&\mathsf{v}([\overline{k}/\overline{y}]\,\varphi^v_{\Lambda\overline{x}.\,t}(\overline{x})) = \\ &\quad = \varphi^j_{\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t)')}(\overline{k'}) = \varphi^j_{\langle 7,m,\mathsf{v}(s'),\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t_1)'),\ldots,\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t_n)')\rangle}(\overline{k'}) = \\ &\qquad = \varphi^j_{\mathsf{v}(s')}(\varphi^j_{\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t_1)')}(\overline{k'}),\ldots,\varphi^j_{\mathsf{v}((\Lambda\overline{x}.\,t_n)')}(\overline{k'})) = \\ &\qquad\quad = \varphi^j_{\mathsf{v}(s')}(\mathsf{v}(t'_1),\ldots,\mathsf{v}(t'_n)) = \mathsf{v}(\varphi^j_{s'}(t'_1,\ldots,t'_n)) = \mathsf{v}(t').\end{aligned}$$

□

Предложение 8. *Пусть t — φ-терм, $v_1,\ldots,v_n$ — φ-атомы, $\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n$ — списки предметных переменных и для каждого $i = 1,\ldots,n$ верно $In^{i-1}(t) \subseteq \{v_i\}$. Тогда имеет место следующее условное равенство:*

$$\varphi^{v_1}_{\cdot^{\cdot^{\cdot}}\varphi^{v_n}_{\Lambda\overline{x}_n\ldots\Lambda\overline{x}_1.\,t}(\overline{x}_n)\cdots}(\overline{x}_1) \simeq t. \quad (17)$$

Доказательство. Индукция по n. Для $n = 1$ доказываемое утверждение верно в силу предложения 7. Предположим, что оно справедливо для натурального числа n равного $n-1$. Тогда из предложения 4 следует, что для всех $i = 1,\ldots,n-1$ верно $In^{i-1}(\Lambda\overline{x}_1.\,t) = In^i(t) \subseteq \{v_{i+1}\}$. Таким образом, в силу предположения индукции имеет место

$$\varphi^{v_2}_{\cdot^{\cdot^{\cdot}}\varphi^{v_n}_{\Lambda\overline{x}_n\ldots\Lambda\overline{x}_2.\Lambda\overline{x}_1.\,t}(\overline{x}_n)\cdots}(\overline{x}_1) \simeq \Lambda\overline{x}_1.\,t. \quad (18)$$

Согласно предложению 7 верно

$$\varphi^{v_1}_{\Lambda\overline{x}_1.\,t}(\overline{x}) \simeq t. \quad (19)$$

Из (18), (19) получаем (17). □

5. Основные результаты

Пусть t — φ-терм и $Var(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$. Будем использовать запись $f(x_1, \ldots, x_n) := t$ в случае, когда мы хотим рассмотреть частичной функция f типа $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, определяемую соотношением

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} \mathsf{v}([a_1, \ldots, a_n/x_1, \ldots, x_n]t), & \text{если } ![a_1, \ldots, a_n/x_1, \ldots, x_n]t; \\ \text{не определено}, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{20}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — произвольный набор натуральных чисел. При этом о функции f будем говорить, что она *определяется* φ-термом t. Пусть t — замкнутый φ-терм и имеет место $!t$. Будем использовать запись $e := t$ для введения в рассмотрение натурального числа e равного $\mathsf{v}(t)$.

Теорема 1. *Пусть t — φ-терм, $v_0, \ldots, v_n$ — φ-атомы, $\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_n, \overline{y}$ — списки предметных переменных, и выполняются следующие условия:*

1) *$h(t) \le n + 1$;*

2) *для каждого $i = 0, \ldots, n$ множество $Arg^{\ge i+1}(t)$ не содержит переменных из списка $\overline{x}_i$;*

3) *для каждого $i = 0, \ldots, n$ верно $In^i(t) \subseteq \{v_i\}$;*

4) *$Arg^{\ge 0}(t) - \overline{x}_0 \ldots \overline{x}_n \subseteq \overline{y}$.*

Тогда выполняются следующие утверждения:

1) *$Var(\Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_0.\, t) \subseteq \overline{y}$;*

2) *$h(\Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_0.\, t) = 0$;*

3) *функция $f(\overline{y}) := \Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_0.\, t$ принадлежит классу $\mathbf{E}_0$;*

4) *имеет место условное равенство*

$$\varphi^{v_0}(\ldots \varphi^{v_n}_{f(\overline{y})}(\overline{x}_n) \ldots)(\overline{x}_0) \simeq t. \tag{21}$$

Доказательство. Из условия 1 и предложений 3, 5 получаем

$$In^{\ge 0}(\Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_0.\, t) = In^{\ge n+1}(t) = \varnothing.$$

Применяя предложение 3, устанавливаем справедливость утверждения 2. Из утверждения 2 следует, что φ-терм $\Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_0.\, t$ не содержит вхождений в качестве верхних индексов. Таким образом, применяя (6), получаем

$$Var(\Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_1.\, t) = Arg^{\geq 0}(\Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_1.\, t) = Arg^{\geq 0}(t) - \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n \tag{22}$$

Из (22) и условия 4 следует утверждение 1. В силу утверждения 1 функция $f(\overline{y}) := \Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_0.\, t$ корректно определена. Утверждение 3 следует из утверждения 2. Утверждение 4 получаем из условий 2, 3 и предложения 8. □

Теорема 2. *Пусть t — φ-терм, $v_0, \ldots, v_n$ — φ-атомы, $\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_n$ — списки предметных переменных, для которых выполняются следующие условия:*

1) $h(t) \leq n + 1$;

2) *для каждого $i = 0, \ldots, n$ множество $Arg^{\geq i+1}(t)$ не содержит переменных из списка $\overline{x}_i$;*

3) *для каждого $i = 0, \ldots, n$ верно $In^i(t) \subseteq \{v_i\}$;*

4) $Arg^{\geq 0}(t) \subseteq \overline{x}_0 \ldots \overline{x}_n$.

Тогда выполняются следующие утверждения:

1) *φ-терм $\Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_0.\, t$ является замкнутым;*

2) $h(\Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_0.\, t) = 0$;

3) $!\Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_0.\, t$;

4) *для натурального числа $e := \Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_0.\, t$ выполняется условное равенство*

$$\varphi^{v_0 \, {}^{\ddots} \, {}_{\varphi_e^{v_n}(\overline{x}_n)} \, {}^{\iddots}}(\overline{x}_0) \simeq t. \tag{23}$$

Доказательство. Утверждения 1, 2 получаем применением теоремы 1. Утверждение 3 следует из утверждений 1, 2. Из утверждения 1, 3 получаем, что натуральное число $e := \Lambda\overline{x}_n \ldots \Lambda\overline{x}_0.\, t$ корректно определено. Утверждение 4 следует из условий 2, 3 и предложения 8. □

Предложение 9. *Для каждого $n \geq 1$ найдется такая функция $g_n \in \mathbf{E}_0^2$, что имеет место*

$$\varphi^{v \, {}^{\ddots} \, {}_{\varphi_z^v(x_1)} \, {}^{\iddots}}(x_n) \preccurlyeq \varphi^{v \, {}^{\ddots} \, {}_{\varphi_{g_n(z,v)}^v(x_1)} \, {}^{\iddots}}(x_n) \tag{24}$$

и φ-терм из правой части (24) является всюду определенным.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\phi(z,v) := \mathsf{if}(\mathsf{in}'(z,v,1), \Lambda[\mathsf{c}^1_0], z)$. Нетрудно видеть, что для всех натуральных чисел a, i верно $\phi(a,i) \in \mathsf{I}^i_1$, и имеет место $\phi(a) = a$, если $a \in \mathsf{I}^i_1$.

Доказательство проведем индукцией по натуральному числу n. Положим функцию g_1 равной ϕ и покажем, что выполняется (24) для $n = 1$. Действительно, пусть натуральные числа a, b, i таковы, что верно $!\varphi^i_a(b)$. Тогда $a \in \mathsf{I}^i_1$ и $\phi(a,i) = a$. Следовательно, $\varphi^i_a(b) = \varphi^i_{\phi(a,i)}(b)$. Покажем теперь, что φ-терм $\varphi^v_{\phi(z,v)}(x)$ является всюду определенным. Действительно, для всех натуральных чисел a, b, i верно $\phi(a,i) \in \mathsf{I}^i_1$ и следовательно имеет место $!\varphi^i_{\phi(a,i)}(b)$.

Построим функцию g_{n+1} в предположении, что имеется функция g_n, для которой выполняется (24). В силу теоремы 1 имеет место

$$\varphi^v_{\varphi^v_{\ddots_{\varphi^v_z(x_1)}\iddots}(x_n)}(x_{n+1}) \preccurlyeq \varphi^v_{\phi\left(\varphi^v_{\ddots_{\varphi^v_{g_n(z,v)}(x_1)}\iddots}(x_n),\, v\right)}(x_{n+1}) \simeq \varphi^v_{\varphi^v_{\ddots_{\varphi^v_{g_{n+1}(z,v)}(x_1)}\iddots}(x_n)}(x_{n+1}), \quad (25)$$

где

$$g_{n+1}(z,v) := \Lambda x_1 \ldots \Lambda x_n.\ \phi\left(\varphi^v_{\ddots_{\varphi^v_{g_n(z,v)}(x_1)}\iddots}(x_n),\, v\right).$$

Покажем, что φ-терм из правой части (25) является всюду определенным. Осуществим подстановку натуральных чисел $i, a, b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}$ вместо переменных $v, z, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ в (25). В силу предположения индукции имеет место $!\varphi^i_{\ddots_{\varphi^i_{g_n(a,i)}(b_1)}\iddots}(b_n)$. Тогда

$$\phi\left(\varphi^i_{\ddots_{\varphi^i_{g_n(a,i)}(b_1)}\iddots}(b_n),\, i\right) \in \mathsf{I}^i_1$$

и выполняется

$$!\varphi^i_{\phi\left(\varphi^i_{\ddots_{\varphi^i_{g_n(a,i)}(b_1)}\iddots}(b_n),\, i\right)}(b_{n+1}).$$

Следовательно, имеет место $!\varphi^i_{\varphi^i_{\ddots_{\varphi^i_{g_{n+1}(a,i)}(b_1)}\iddots}(b_n)}(b_{n+1})$. □

Предложение 10. *Пусть $i, a_1, \dots, a_n$ — натуральные числа. Не существует такого натурального числа e, для которого выполняется соотношение*

$$\varphi^i_{\ddots_{\varphi^i_{\varphi^i_z(x)}(a_1)\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}(a_n) \preccurlyeq \varphi^i_{\ddots_{\varphi^i_{\varphi^i_e(z,x)}(a_1)\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}(a_n). \tag{26}$$

Доказательство. Предположим противное: для некоторого натурального числа e верно (26). Тогда в силу теоремы 2 верно

$$\varphi^i_{\ddots_{\varphi^i_{\varphi^i_z(z)}(a_1)\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}(a_n)+1 \preccurlyeq \varphi^i_{\ddots_{\varphi^i_{\varphi^i_e(z,z)}(a_1)\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}(a_n)+1 \simeq$$

$$\simeq \varphi^i_{\ddots_{\varphi^i_{\varphi^i_{e'}(z)}(a_1)\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}(a_n) \preccurlyeq \varphi^i_{\ddots_{\varphi^i_{\varphi^i_{e''}(z)}(a_1)\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}(a_n),$$

где $e' := \Lambda z.\Lambda x_1 \dots \Lambda x_n. \left[\varphi^i_{\ddots_{\varphi^i_{\varphi^i_e(z,z)}(a_1)\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}(a_n)+1\right]$ и $e'' = g_{n+1}(e', i)$, а g_{n+1} — функция из предложения 9. Тогда $!\varphi^i_{\ddots_{\varphi^i_{\varphi^i_{e''}(e'')}(a_1)\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}(a_n)$.

Следовательно, $\varphi^i_{\ddots_{\varphi^i_{\varphi^i_{e''}(e'')}(a_1)\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}(a_n)+1 = \varphi^i_{\ddots_{\varphi^i_{\varphi^i_{e''}(e'')}(a_1)\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}(a_n)$.

Получили противоречие. □

Список литературы

[1] A. Grzegorczyk, "Some classes of recursive functions", *Rozprawy matematyczne*, **4** (1953), 1–46.

[2] P. Axt, "Enumeration and the Grzegorczyk hierarchy", *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **9** (1963), 53–65.

[3] Z. Damnjanovic, "Strictly primitive recursive realizability", *The Journal of Symbolic Logic*, **59**:4 (1994), 1210-1227.

[4] V. Plisko, "Primitive recursive realizability and basic propositional logic", *Utrecht University, Logic Group Preprint Series*, **261** (2007), 27 pp.

[5] С. К. Клини, *Введение в метаматематику.*, Мир, М., 1957.

References

[1] A. Grzegorczyk, "Some classes of recursive functions", *Rozprawy matematyczne*, **4** (1953), 1–46.

[2] P. Axt, “Enumeration and the Grzegorczyk hierarchy”, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **9** (1963), 53–65.

[3] Z. Damnjanovic, “Strictly primitive recursive realizability”, *The Journal of Symbolic Logic*, **59**:4 (1994), 1210-1227.

[4] V. Plisko, “Primitive recursive realizability and basic propositional logic”, *Utrecht University, Logic Group Preprint Series*, **261** (2007), 27 pp.

[5] S. K. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, Wolters-Noordhoff, 1952.

Λ-expressions for primitive recursive functions in the Grzegorczyk hierarchy

Konovalov A.Yu.

In this paper we consider Λ-expressions constructed from universal functions for functional classes of the Grzegorczyk hierarchy. We will find a sufficient condition such that a given Λ-expression determines a primitive recursive function from some level of the Grzegorczyk hierarchy.

Keywords: Grzegorczyk hierarchy, primitive recursive functions, strictly primitive recursive realizability.