

Треугольники и уравнения Лагранжа

Алешин С.В.¹

Рассматривается задача о равновесном взаимном расположении двух треугольников. Предлагается решение этой задачи на основе метода множителей Лагранжа. Двукратная итерация этого метода дает аналитическое решение.

Ключевые слова: метод Лагранжа, преобразование на плоскости, подобие, вращение, сдвиг, треугольник.

Рассматривается задача о равновесном взаимном расположении двух треугольников. В работе [1] предложена система уравнений, решение которой дает ответ на эту задачу. В данной заметке мы предлагаем применить метод множителей Лагранжа. Решение ищется с помощью двукратной итерации этого метода, что дает аналитическое решение задачи Библ. 2 назв.

На плоскости (X, Y) заданы два треугольника - $\triangle ABC$ с вершинами $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ и $\triangle HGW$ с вершинами $H(h_1, h_2)$, $G(g_1, g_2)$, $W(w_1, w_2)$. Требуется указать отображение $\xi : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$,

$$X' = d_1X + d_2Y + \alpha; \quad Y' = -d_2X + d_1Y + \beta, \quad (1)$$

являющееся суперпозицией преобразований подобия и вращения (они определены матрицей D) и сдвига на вектор s :

$$D = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ -d_2 & d_1 \end{vmatrix}; \quad s = (\alpha, \beta).$$

Искомое отображение ξ переводит треугольник $\triangle HGW$ в треугольник $\triangle H'G'W'$, такой, что расстояния от «новых» вершин H', G', W' до соответствующих вершин A, B, C равны и минимальны, то есть

$$\rho(A, H') = \rho(B, G') = \rho(C, W').$$

¹Алешин Станислав Владимирович — доктор физ-мат наук, профессор, каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: stanislav.aleshin@rambler.ru.

Aleshin Stanislav Vladimirovich — Dr.Sc., Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Таким образом, мы приходим к задаче

Найти $\min \rho(A, H')$

при условии

$$\begin{cases} \rho(A, H') = \rho(B, G') = \rho(C, W'), \\ H' = D \cdot H + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}; G' = D \cdot G + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}; W' = D \cdot W + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (2)$$

В результате решения задачи треугольник $\triangle HGW$ преобразован в треугольник $\triangle H'G'W'$, который находится в равновесном положении с треугольником $\triangle ABC$, при этом расстояние ρ - минимально.

Интерес может представить то, что решение получается в два шага, и каждый из них это стандартный метод Лагранжа [2], то есть в итоге получаем некоторый комбинированный метод.

Чтобы избежать громоздких формульных преобразований, мы рассмотрим несколько численных примеров, которые, на наш взгляд, хорошо иллюстрируют этот метод.

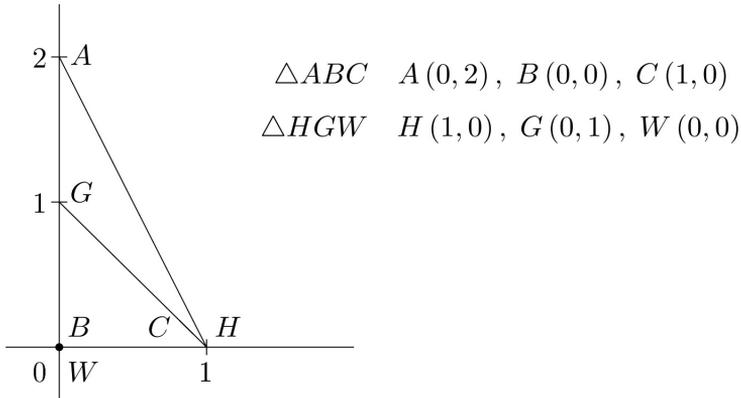


Рис. 1. Пример 1.

Преобразование определяется соотношениями

$$H' = (d_1 h_1 + d_2 h_2 + \alpha; -d_2 h_1 + d_1 h_2 + \beta) = (d_1 + \alpha; -d_2 + \beta),$$

$$G' = (d_1 g_1 + d_2 g_2 + \alpha; -d_2 g_1 + d_1 g_2 + \beta) = (d_2 + \alpha; d_1 + \beta),$$

$$W' = (d_1 w_1 + d_2 w_2 + \alpha; -d_2 w_1 + d_1 w_2 + \beta) = (\alpha; \beta).$$

Вместо параметра ρ в равенствах берем ρ^2 , то есть

$$\rho^2(A, H') = \rho^2(B, G') = \rho^2(C, W'),$$

$$[0 - (d_1 + \alpha)]^2 + [2 - (-d_2 + \beta)]^2 = [0 - (d_2 + \alpha)]^2 + [0 - (d_1 + \beta)]^2 = \\ = [1 - \alpha]^2 + \beta^2.$$

Таким образом, экстремальная задача для данной пары треугольников имеет вид

$$[1 - \alpha]^2 + \beta^2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} d_1^2 + d_2^2 + 2d_1\alpha - 2d_2\beta + 2\alpha - 4\beta + 4d_2 + 3 = 0, \\ d_1^2 + d_2^2 + 2d_2\alpha + 2d_1\beta + 2\alpha - 1 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

В качестве функционала взята величина $\rho^2(C, W') = (1 - \alpha)^2 + \beta^2$, что в дальнейшем приводит к упрощению уравнений.

Для решения задачи применим метод множителей Лагранжа. Функционал Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L} = (1 - \alpha)^2 + \beta^2 + \lambda_1 \cdot R_1 + \lambda_2 \cdot R_2.$$

Здесь R_1 (соответственно R_2) – левая часть первого (соответственно второго) равенства системы (3).

Система уравнений Лагранжа имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_1} = \lambda_1(2d_1 + 2\alpha) + \lambda_2(2d_1 + 2\beta) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_2} = \lambda_1(2d_2 + 4 - 2\beta) + \lambda_2(2d_2 + 2\alpha) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = -2(1 - \alpha) + \lambda_1(2d_1 + 2) + \lambda_2(2d_2 + 2) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = 2\beta + \lambda_1(-2d_2 - 4) + \lambda_2(2d_1) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Исключая множители λ_1, λ_2 из первых двух уравнений, получаем равенство (левую часть этого равенства обозначим R_3):

$$R_3 = (d_1 + \alpha)(d_2 + \alpha) - (d_1 + \beta)(d_2 + 2 - \beta) = 0. \quad (5)$$

Это соотношение берем в качестве уравнения связи второй экстремальной задачи

$$\begin{cases} (1 - \alpha)^2 + \beta^2 \rightarrow \min, \\ R_3 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Для этой задачи уравнения Лагранжа имеют вид

$$F = (1 - \alpha)^2 + \beta^2 + \lambda \cdot R_3, \\ \frac{\partial F}{\partial d_1} = \lambda \cdot \frac{\partial R_3}{\partial d_1} = \lambda[d_2 + \alpha - d_2 - 2 + \beta] = \lambda[\alpha - 2 + \beta] = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial d_2} = \lambda \cdot \frac{\partial R_3}{\partial d_2} = \lambda[d_1 + \alpha - d_1 - \beta] = \lambda[\alpha - \beta] = 0.$$

Отсюда $\alpha - \beta = 0, \alpha + \beta = 2$, т.е. $\alpha = \beta = 1$.

Оставшиеся два уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -2(1 - \alpha) + \lambda[2\alpha + d_1 + d_2] = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = 2\beta + \lambda[2\beta - d_2 + d_1 - 2] = 0.$$

Отсюда, при $\alpha = 1$

$$2 + d_1 + d_2 = 0.$$

Подставляя $d_1 = -2 - d_2, \alpha = 1, \beta = 1$ в любое из уравнений (3), получаем решение, которое должно удовлетворять ограничениям экстремальной задачи (3):

$$2d_2^2 + 4d_2 + 1 = 0 \quad \text{или} \quad d_2 = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

В итоге имеем два решения задачи (3):

$$\alpha = 1, \beta = 1, d_1 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, d_2 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

или

$$\alpha = 1, \beta = 1, d_1 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, d_2 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Новое положение треугольника $\triangle H'G'W'$ определяется вершинами (рис. 2)

$$H' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \right); G' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right); W' = (1, -1).$$

При этом выполнены нужные равенства.

$$\rho(A, H') = \rho(B, G') = \rho(C, W').$$

Второй пример показывает, что уравнения Лагранжа могут давать не наилучшее, а допустимое решение.

Исходная конфигурация приведена на рис. 3. Она похожа на задачу 1, однако отличается выбором пар соответствующих вершин. Вершине $A(0, 2)$ теперь соответствует вершина $G(0, 1)$, вершине $B(0, 0)$ - вершина $W(0, 0)$, и вершине $C(1, 0)$ - вершина $H(0, 0)$.

Нетрудно заметить, что положение равновесия достигается, если поднять треугольник $\triangle WGH$ вверх по оси Y на $\frac{1}{2}$. При этом расстояния между соответствующими вершинами станут равны $\frac{1}{2}$. Такому решению соответствуют значения параметров $d_1 = 1, d_2 = 0, \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$.

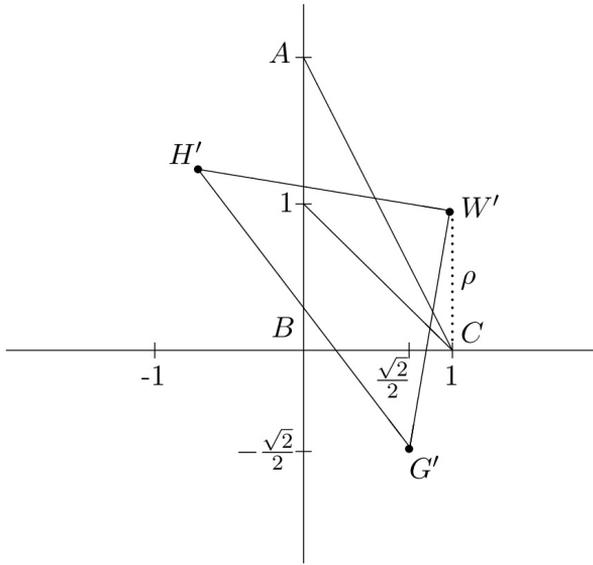


Рис. 2.

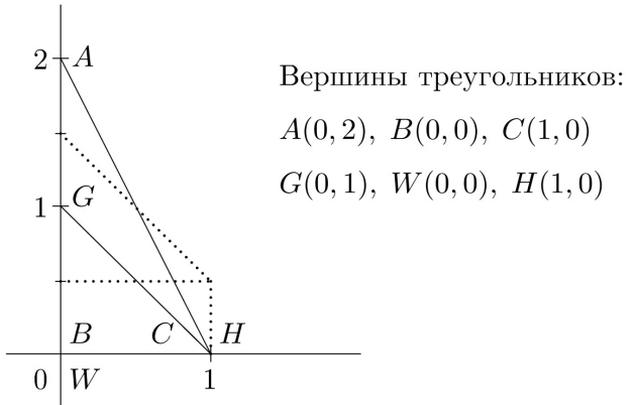


Рис. 3.

Экстремальная задача имеет вид

$$\min(\alpha^2 + \beta^2),$$

$$\begin{cases} (d_2 + \alpha)^2 + (2 - d_1 - \beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2) = 0, \\ (1 - d_1 - \alpha)^2 + (-d_2 + \beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Функционал Лагранжа:

$$\Phi = \alpha^2 + \beta^2 + \lambda_1[1] + \lambda_2[2].$$

Здесь, [1] (соответственно, [2]) - левая часть первого (соответственно, второго) равенства системы (7).

Система уравнений Лагранжа:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial d_1} = \lambda_1[d_1 + \beta - 2] + \lambda_2[d_1 + \alpha - 1] = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial d_2} = \lambda_1[d_2 + \alpha] + \lambda_2[d_2 - \beta] = 0.$$

Устраняя λ_1 и λ_2 , получаем равенство

$$R = \alpha^2 + \beta^2 + d_1\beta - d_2\beta + d_1\alpha + d_2\alpha + d_2 - \alpha - 2\beta = 0, \quad (8)$$

которое используем для получения второй системы Лагранжа.

Функционал Лагранжа

$$\hat{\Phi} = \alpha^2 + \beta^2 + \lambda \cdot R.$$

Система уравнений

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial d_1} = \lambda \frac{\partial R}{\partial d_1} = \lambda[\beta + \alpha] = 0, \text{ т.е. } \beta = -\alpha,$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial d_2} = \lambda \frac{\partial R}{\partial d_2} = \lambda[-\beta + \alpha + 1] = 0, \text{ т.е. } -2\beta + 1 = 0, \beta = \frac{1}{2}, \alpha = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \alpha} = 2\alpha + \lambda \frac{\partial R}{\partial \alpha} = -1 + \lambda[-2 + d_1 + d_2] = 0,$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \beta} = 2\beta + \lambda \frac{\partial R}{\partial \beta} = 1 + \lambda[-1 + d_2 - d_1] = 0.$$

Из двух первых равенств этой системы получаем $\beta = \frac{1}{2}, \alpha = -\frac{1}{2}$.

Используя два оставшихся равенства, получаем

$$-3 + 2d_1 = 0, \quad d_1 = \frac{3}{2}.$$

Подставляя в основные уравнения (7), получаем

$$d_2^2 - d_2 - \frac{1}{4} = 0, \quad d_2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

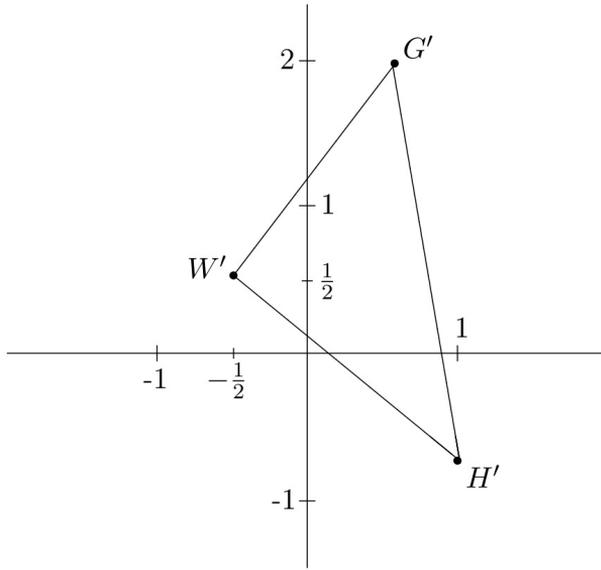


Рис. 4.

Таким образом, решение задачи

$$G' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2 \right); \quad H' = \left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right); \quad W' = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Это решение приведено на рис. 4.

Наконец, пример с тупоугольным треугольником, который уже находится в «равновесном» положении, и решение уравнений Лагранжа должно это отражать. На рис. 5 приведена исходная ситуация.

Следуя той же схеме решения, что в двух предыдущих задачах, рассмотрим «неподвижный» треугольник $\triangle ABC$ и «подвижный» тупоугольный треугольник $\triangle HGW$.

Задача имеет вид

$$\begin{aligned} \rho^2(A, H') &\rightarrow \min, \\ \begin{cases} \rho^2(A, H') - \rho^2(C, W') = 0, \\ \rho^2(B, G') - \rho^2(C, W') = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial d_1} = \lambda_1 [\beta - \alpha] + \lambda_2 \left(2 \left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) d_1 + \alpha \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) +$$

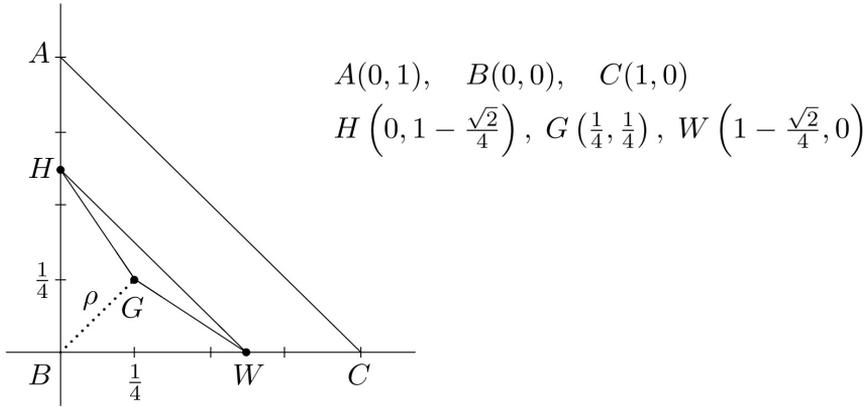


Рис. 5.

$$\begin{aligned}
 & +\lambda_2 \left(+\frac{3}{2}\beta - 2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \right) = 0, \\
 \frac{\partial}{\partial d_2} &= \lambda_1 (\alpha + \beta) + \lambda_2 \left(2 \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) d_2 + \frac{1}{2}\alpha \right) + \quad (10) \\
 & +\lambda_2 \left(-\beta \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Исключая λ_1 и λ_2 , получаем функционал Φ для второй задачи Лагранжа

$$\begin{aligned}
 \Phi &= (\beta - \alpha) \left(2d_2 \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{2}\alpha - \beta \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) - \\
 & - (\alpha + \beta) \left(2d_1 \left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \alpha \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{2}\beta + 2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \right) = 0. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Вторая задача Лагранжа дает уравнения

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi}{\partial d_1} &= \left[(\alpha + \beta) \cdot 2 \left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \lambda = 0, \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial d_2} &= \left[(\beta - \alpha) \cdot 2 \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \lambda = 0,
 \end{aligned}$$

из которых следует

$$\alpha + \beta = 0, \beta - \alpha = 0, \alpha = \beta = 0.$$

Подставляя эти значения в (9), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8}d_1^2 + \frac{5}{16}d_2^2 + \frac{1}{8}d_1d_2 = \\ & = 2 - 2d_1 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + d_2^2 \left(\frac{9}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Это уравнение выполнено при $d_1 = 1, d_2 = 0$, таким образом, решение

$$\alpha = 0, \beta = 0, d_1 = 1, d_2 = 0.$$

То есть треугольник $\triangle GHW$ остается на месте, при этом расстояния совпадают

$$\rho(A, H') = \rho(B, G') = \rho(C, W').$$

Список литературы

- [1] Козлов В.Н., *Введение в математическую теорию зрительного восприятия*, Издательство центра прикладных исследований МГУ, Москва, 2007.
- [2] Тихомиров В.М., *Рассказы о максимумах и минимумах*, МЦНМО, Москва, 2006.

References

- [1] Kozlov V.N., *Vvedenie v matematicheskuyu teoriyu zritel'nogo vospriyatiya [Introduction to the mathematical theory of visual perception]*, Publishing House of the Center for Applied Research of Moscow State University, Moscow, 2007 (in Russian).
- [2] Tikhomirov V.M., *Rasskazy o maksimumakh i minimumakh [Stories about the highs and lows]*, MCCME, Moscow, 2006 (in Russian).

Triangles and Lagrange Equations Aleshin S.V.

The paper considers the problem of the equilibrium mutual arrangement of two triangles and proposes a solution to this problem based on the method of Lagrange multipliers. Two-time iteration of this method gives analytical solution.

Keywords: Lagrange method, transformation on a plane, similarity, rotation, shift, triangle.