Оценка количества разметок графов групповых автоматов

Ищенко Р.А.[1]

Если в диаграмме Мура автомата без выходов убрать информацию о входных буквах, то получится ориентированный граф. Обратная операция, когда эта информация восстанавливается, называется разметкой графа автомата. В этой статье приводятся оценки числа разметок графов, приводящих к групповым автоматам.

Ключевые слова: групповой автомат, граф переходов, диаграмма Мура, перманент матрицы, факторизация.

1. Введение

Групповые автоматы без выхода $V = (A, Q, \varphi)$ таковы, что для любого $\alpha \in A^*$ отображение $\varphi_\alpha(q) = \varphi(q, \alpha)$ есть перестановка на множестве Q. Здесь A — входной алфавит, Q — множество состояний, $\varphi : Q \times A \to Q$ — функция переходов автомата V [1]. Класс групповых автоматов обладает рядом интересных особенностей, что было отмечено в работах [2, 3]. Пусть множество $E = \{(q, \varphi(q, \alpha)) \,|q \in Q, \alpha \in A\}$ образует ребра ориентированного графа $G = (Q, E)$. Автор рассматривает задачу восстановления группового автомата $V = (A, Q, \varphi)$ по заданному графу $G = (Q, E)$. Критерий возможности такого восстановления был рассмотрен автором в работе [4]. В данной статье изучен вопрос оценки количества таких восстановлений.

Для случая автомата с входным алфавитом из двух элементов найдена точная формула числа восстановлений. Кроме того, приводится критерий существования единственного восстановления.

Введем необходимые понятия и определения.

Определение 1. *Графом автомата* $V = (A, Q, \varphi)$ называется размеченный ориентированный граф $G = (Q, W, f)$, вершины которого соответствуют состояниям автомата, при этом

[1] *Ищенко Роман Андреевич* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ishchenko.roman1@gmail.com.

Ishchenko Roman Andreevich— graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

$$e = (q_i, q_j) \in W,\ f(e) = a \Leftrightarrow \varphi(q_i, a) = q_j,$$

где $f : W \to A$, $a \in A$.

Определение 2. *Групповым графом* будем называть ориентированный граф, ребра которого могут быть размечены таким образом, что образованный граф является графом некоторого группового автомата. Такую разметку будем называть г—*разметкой* или просто *разметкой.* Как было показано в [4]:

Утверждение 1. *Граф $G(Q, W)$ — групповой тогда и только тогда, когда существует такое число m, что для любой вершины $q \in Q$ входящая и исходящая степени вершины равны m (количеству элементов в алфавите соответствующего автомата).*

Ниже рассматривается *число разметок группового графа G*. При этом мы будем различать разметки с точностью до замены букв и/или кратных ребер. К примеру, две нижеприведенные разметки будут одинаковыми (Рис.1).

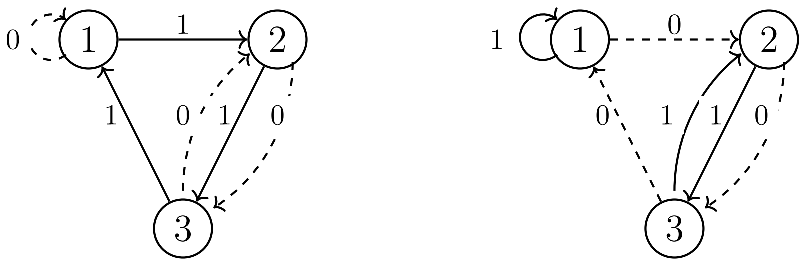

Рис. 1. Две одинаковые разметки группового графа.

Можно показать, что число различных разметок графа равно числу различных разложений соответствующей графу матрицы инцидентности в сумму матриц перестановок.

Определение 3. *Матрица инцидентности A ориентированного графа G* с числом вершин n (в дальнейшем просто *«матрица графа G»*) — это квадратная матрица порядка n, где значение элемента a_{ij} равно числу рёбер из i-ой вершины в j-ую вершину графа G.

Определение 4. *Матрицей перестановки P_σ* назовем матрицу размера $n \times n$ вида

$P_\sigma = \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ e_{\sigma(2)} \\ \cdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$, где e_i — вектор длины n, i-й элемент которого равен 1, а остальные равны 0.

Заметим, что утверждение 1 может быть переформулировано в терминах матриц следующим образом: *граф G — групповой тогда и только* *тогда, когда найдется такое число m, что сумма чисел в любой строке и любом столбце его матрицы равна m.* Такую матрицу мы будем называть *групповой*, а число m — *степенью матрицы.*

По определению группового графа каждый подграф графа группового автомата из ребер с заданной буквой будет иметь матрицу инцидентности, являющейся матрицей некоторой перестановки. Множество всех матриц перестановок, являющихся подматрицами матрицы A (в дальнейшем иногда *«подматриц перестановок»*) будем обозначать $P(A)$. Натуральное число k будем называть *кратностью подматрицы перестановки* P, если $P^k \subseteq A$, где $P^k = \underbrace{P * \cdots * P}_{k}$, а $P^{k+1} \nsubseteq A$.

Кратностью k матрицы A будем называть максимальную кратность её подматрицы перестановки.

Определение 5. *Перманентом матрицы A* называется число

$$Per(A) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi_i} = \sum_{\pi \in S_n} a_{1,\pi_1} a_{2,\pi_2} \dots a_{n,\pi_n},$$

где сумма берется по всем перестановкам π чисел от 1 до n.

Обозначим $Per(n,k)$ максимально возможное значение перманента для бинарных (состоящих только из 0 и 1) групповых матриц порядка n степени k. Множество всех разметок матрицы A будем обозначать $C(A)$, количество разметок матрицы A обозначим $g\left(A\right)$, $g(A) = |C\left(A\right)|$.

Обозначим множество разметок матрицы A степени m, содержащих подматрицу B степени k, как $C\left(A|B\right)$, т.е. $C\left(A|B\right) = \Big\{\{P_1, P_2, \dots, P_m\} \in C(A) \,|\, \exists\; i_1, \dots, i_k \;\bigcup_{j=1}^{k} P_{i_k} = B\Big\}$.

Обозначим также $g\left(A|B\right) = |C(A|B)|$.

Перед тем, как перейти к основным результатам, докажем несколько свойств групповых матриц.

2. Свойства групповых матриц

Утверждение 2. *Для групповой матрицы A степени m и групповой подматрицы B степени k справедливо:*

$$g(A|B) = g(A - B) \cdot g(B).$$

Доказательство. Утверждение очевидно следует из того, что $C(A|B) = C(A - B) \times C(B)$, где $\times$ — декартово произведение множеств. □

Утверждение 3. *Для любой групповой матрицы A и групповой подматрицы B справедливо $g(B) \leqslant g(A)$.*

Доказательство. $g\,(B) \leqslant g\,(A - B) \cdot g\,(B) = g(A|B) \leqslant g(A)$. □

Утверждение 4. *При перестановке строк или столбцов групповой матрицы количество разметок не меняется.*

Доказательство. Без ограничения общности, пусть матрица A' получена из матрицы A степени m путем перестановки строк i и j. Тогда множество перманентных подматриц матриц $P_1, P_2, \ldots, P_m$ является разметкой матрицы A тогда и только тогда, когда множество перманентных подматриц $P'_1,\ P'_2, \ldots, P'_m$ — правильная разметка матрицы A', где для любого i P'_i получена из матрицы P_i перестановкой строк i и j. □

3. Оценки количества разметок

Для оценки количества разметок выведем в явном виде формулу зависимости количества разметок матрицы A от количества разметок её подматриц.

Теорема 1. *Пусть $P\,(A) = P_1, \ldots, P_s$ — множество подматриц перестановок матрицы A степени m, при этом для любого $i \in \{1, \ldots, s\}$ кратность подматрицы P_i равна k_i, тогда:*

$$g(A) = \frac{\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_i} g(A - jP_i)}{m}.$$

Доказательство. Поставим матрице A в соответствие гиперграф G' следующим образом:

- Каждой подматрице перестановки P_i поставим в соответствие k_i вершин графа $P_i^1, P_i^2, \ldots, P_i^{k_i}$.
- Для каждого разложения A на матрицы перестановки $A = \sum_{i=1}^{s} j_i P_i$ соответствующей разметке $\{\underbrace{P_1, \ldots, P_1}_{j_1}, \ldots, \underbrace{P_s, \ldots, P_s}_{j_s}\}$ поставим в

  соответствие ребро из m вершин $\{P_1^1,\ P_1^2, \ldots,\ P_1^{j_1}, \ldots, P_s^1,\ P_s^2, \ldots,\ P_s^{j_s}\}$.

Заметим, что $g\,(A)$ равно количеству ребер гиперграфа G'. Так как каждое ребро соединяет ровно m вершин, то $g\,(A) = \frac{\sum_{P \in V} \deg P}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_i} \deg P_i^j}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_i} g(A - jP_i)}{m}$, так как $\deg P_i^j$ равно количеству разметок матрицы A, содержащих ровно j подматриц P_i (далее применяем Утв 1). Теорема доказана. □

Следствие 1. *Для групповой бинарной матрицы A степени m справедливо*

$$g(A) = \frac{\sum_{P \in P(G)} g(A-P)}{m}.$$

Теорема 2. *Для групповой матрицы A степени m порядка n выполнено*

$$g\left(A\right) \leqslant \prod_{i=1}^{m} Per(n,i).$$

Доказательство. Докажем оценку индукцией по m.

База индукции ($m = 1$). Групповая матрица степени 1 является матрицей перестановки и очевидным образом имеет единственную разметку. При этом, подставляя в формулу $m = 1$, получаем:

$$\prod_{i=1}^{m} Per\left(n,i\right) = Per\left(n,1\right) = 1.$$

Индуктивный переход ($m-1 \to m$). Предположим, что утверждение справедливо для всех групповых матриц степени $m-1$. Рассмотрим групповую матрицу $A = (a_{i,j})$ степени m. Пусть $P\left(A\right) = \{P_1, \ldots, P_s\}$ — множество подматриц перестановок матрицы A степени m, при этом для любого $i \in \{1, \ldots, s\}$ кратность подматрицы P_i равна k_i, кратность A равна $k = \max\limits_{i \in \{1,\ldots,s\}} k_i$.

Рассмотрим бинарную матрицу $A' = (a'_{i,j})$ порядка n, в которой

$$a'_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{i,j} \neq 0, \\ 0, & \text{если } a_{i,j} = 0, \end{cases} \text{где } i, j \in \{1, \ldots n\}.$$

Заметим, что $Per\left(A'\right) = s$.

Пользуясь соответственно Теоремой 1, Утверждением 2, предположением индукции, определением кратности матрицы, неравенством $k \leqslant m$ и определением $Per(n,m)$, получаем:

$$g\left(A\right) = \frac{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_i} g\left(A - jP_i\right)}{m} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{s} k_i \cdot g\left(A - P_i\right)}{m} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sum_{i=1}^{s}\left(k_i \cdot \prod_{j=1}^{m-1} Per\left(n,j\right)\right)}{m} = \frac{\prod_{j=1}^{m-1} Per\left(n,j\right) \cdot \sum_{i=1}^{s} k_i}{m} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{sk}{m} \cdot \prod_{j=1}^{m-1} Per\left(n,j\right) \leqslant \frac{Per\left(A'\right) \cdot m}{m} \cdot \prod_{j=1}^{m-1} Per\left(n,j\right) \leqslant \prod_{j=1}^{m} Per\left(n,j\right).$$

Теорема доказана. $\square$

Заметим, что для случая бинарных матриц оценка Теоремы 2 может быть улучшена:

Теорема 2.1. *Для групповой бинарной матрицы A степени m порядка n выполнено*

$$g(A) \leqslant \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^{m} Per(n,i).$$

Для доказательства теоремы достаточно повторить шаги доказательства Теоремы 2, учитывая, что для любого $i \in \{1,\ldots,s\}$ $k_i = k = 1$.

Приведем верхние оценки перманента матрицы и выведем с их помощью следствия из Теорем 2 и 3.

Утверждение 5 ([5, 6]). *Пусть $A = (a_{i,j})$ — бинарная матрица порядка n. Обозначим сумму чисел в i-ой строке как $r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$, $i = 1,2,\ldots,n$. Тогда*

$$Per(A) \leqslant \prod_{i=1}^{n} (r_i!)^{\frac{1}{r_i}} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \frac{r_i+1}{2}.$$

Следствие 2. *Для групповой матрицы A степени m порядка n выполнено*

$$g(A) \leqslant \prod_{i=1}^{m} (i!)^{\frac{n}{i}} \leqslant \left(\frac{(m+1)!}{2^m}\right)^n.$$

Доказательство. Используя Теорему 2 и подставляя для любого $i = 1,2,\ldots,n$ в неравенства Утверждения 3 вместо сумм строк r_i степень соответствующей матрицы, получаем:

$$g(A) \leqslant \prod_{i=1}^{m} Per(n,i) \leqslant \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (i!)^{\frac{1}{i}} \leqslant \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} \frac{i+1}{2};$$

$$g(A) \leqslant \prod_{i=1}^{m} (i!)^{\frac{n}{i}} \leqslant \left(\frac{(m+1)!}{2^m}\right)^n.$$

Следствие доказано. □

Аналогично получаем

Следствие 2.1. *Для групповой бинарной матрицы A степени m порядка n выполнено*

$$g(A) \leqslant \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^{m} (i!)^{\frac{n}{i}} \leqslant \frac{1}{m!} \left(\frac{(m+1)!}{2^m}\right)^n.$$

Докажем нижнюю оценку количества разметок бинарной матрицы при помощи нижней оценки перманента.

Утверждение 6 ([7]). *Пусть A — бинарная матрица порядка n с $Per\,(A) > 0$. Пусть вектор R сумм строк матрицы A, $R = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ — невозрастающий. Тогда*

$$Per(A) \geqslant \prod_{i=1}^{n} \max\{1, r_i - n + i\}.$$

Следствие 3. *Перманент любой матрицы A степени m составляет не менее $m!$*

Доказательство.

$$Per\,(A) \geqslant \prod_{i=1}^{n} \max\{1, m - n + i\} = \prod_{i=1}^{n-m} 1 \cdot \prod_{i=n-m+1}^{n} (m - n + i) = m!$$

□

Теорема 3. *Для групповой бинарной матрицы A степени m порядка n выполнено*

$$g\,(A) \geqslant \prod_{k=0}^{m-1} k!$$

Доказательство. Докажем оценку индукцией по m.

База индукции ($m = 1$). Любая групповая матрица степени 1 является матрицей перестановки и имеет единственную разметку. При этом, подставляя в формулу $m = 1$, получаем

$$\prod_{k=0}^{m-1} k! = 0! = 1.$$

Индуктивный переход ($m - 1 \to m$). Предположим, что утверждение справедливо для всех групповых бинарных матриц степени $m-1$. Рассмотрим групповую матрицу $A = (a_{i,j})$ степени m.

Пусть $P\,(A) = \{P_1, \ldots, P_s\}$ — множество подматриц перестановок матрицы A, тогда

$$g\,(A) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{s} g\,(A - P_i) \geqslant \frac{1}{m} Per\,(A) \cdot \min_{i=1,\ldots,s} g\,(A - P_i) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{m} m! \prod_{k=0}^{m-2} k! = \prod_{k=0}^{m-1} k!$$

Теорема доказана. □

В качестве нижней оценки максимального количества разметок для матрицы с заданными порядком и кратностью оценим число разметок для матриц определенного вида в случае $n \vdots m$.

Теорема 4. *Для любых натуральных m и n таких, что $n \vdots m$, существует такая групповая матрица степени m порядка n, что $g(A) \geqslant \frac{1}{m!}\left(\frac{m\prod_{k=0}^{m} k!}{3}\right)^{\frac{n}{m}}$.*

Доказательство. Пусть $n = ml$. Рассмотрим групповую матрицу , на диагонали которой расположены полные подматрицы степени m:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}1&\cdots&1\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 1&\cdots&1\end{matrix}}_{m} & & & \\ & \underbrace{\begin{matrix}1&\cdots&1\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 1&\cdots&1\end{matrix}}_{m} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underbrace{\begin{matrix}1&\cdots&1\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 1&\cdots&1\end{matrix}}_{m} \end{pmatrix}}^{l}$$

Докажем, что

$$g(A) = (m!)^{l-1} \cdot \big(g(K_m)\big)^{l}. \qquad (1)$$

Каждой подматрице перестановки матрицы A можно поставить в соответствие строку из l матриц $(P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_l)$, где P_i — перманентная подматрица K_m. Так как каждая из «клеток» K_m может быть разложена на подматрицы перестановки независимо от других «клеток», то задача поиска количества разметок матрицы может быть переформулирована как определение количества различных с точностью до перестановки строк таблиц размера $l \times m$, в ячейках которых расположены подматрицы перестановки K_m, а объединение матриц в любом столбце дает K_m.

P_1^1	P_2^1	$\dots$	P_l^1
P_1^2	P_2^2	$\dots$	P_l^2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_1^l	P_2^l	$\dots$	P_l^l

Таблица 1. Представление разложения матрицы А в виде таблицы из перманентных подматрице.

В таблице 1:

- $\bigcup_{j=1}^{m} P_1^j = K_m$ для любого $i \in \{1, \dots, l\}$,
- $\bigcup_{i=1}^{l} P_i^j$ — перманентная подматрица A для любого $j \in \{1, \dots, m\}$,
- $\bigcup_{i=1}^{l} \bigcup_{j=1}^{m} P_i^j = A$.

Количество различных перестановок из m элементов равно $m!$, поэтому количество различных возможных столбцов таблицы равно $m! \cdot g(K_m)$, следовательно, количество различных наборов из l столбцов равно $\left(m! \cdot g(K_m)\right)^l$, а с точностью до перестановки m строк — $\frac{\left(m! \cdot g(K_m)\right)^l}{m!} = (m!)^{l-1} \cdot \left(g\left(K_m\right)\right)^l$.

Докажем, что

$$g\left(K_m\right) \geqslant \frac{\prod_{k=0}^{m} k!}{3\,(m-1)!}. \tag{2}$$

Для $m = 1, 2$ утверждение очевидно, рассмотрим $m \geqslant 3$. Согласно Теореме 1, $g\left(K_m\right) = \frac{\sum_{P \in P(K_m)} g(K_m - P)}{m}$. Заметим, что для любой перманентной матрицы $P \in P\left(K_m\right)$ из матрицы $K_m - P$ может быть получена матрица $K_m - E$ (где E — единичная матрица) путем перестановки соответствующих строк: достаточно сделать n шагов, где на i-м шаге строка с нулем в i-м столбце при необходимости переставляется с i-ой строкой.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \tag{3}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

С учетом Утверждения 4 получаем:

$$g\left(K_m\right)=\frac{\sum_{P\in P(K_m)} g(K_m-P)}{m}=\frac{Per\left(K_m\right)\cdot g(K_m-E)}{m}=$$
$$=\frac{Per\left(K_m\right)\cdot\sum_{P\in P(K_m-E)} g(K_m-E-P)}{m(m-1)}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{Per\left(K_m\right)\cdot Per\left(K_m-E\right)\cdot\min_{P\in P(K_m-E)} g\left(K_m-E-P\right)}{m(m-1)}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{Per\left(K_m\right)\cdot Per\left(K_m-E\right)\cdot\prod_{k=0}^{m-3} k!}{m(m-1)}$$

Заметим, что $Per\left(K_m\right)$ равен числу всевозможных перестановок из m элементов, т.е. $Per\left(K_m\right)=m!$. Задача поиска $Per\left(K_m-E\right)$ эквивалентна задаче определения количества перестановок на множестве из m элементов, которые не оставляют ни одного элемента фиксированным. Можно показать [8], что число таких перестановок равно $m!\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{k!}$. Легко убедиться, что $\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{k!}\geqslant\frac{1}{3}$, и после ряда преобразований мы получаем выражение 2.

Подставляя выражение 2 в выражение 1, получаем:

$$g\left(A\right)\geqslant(m!)^{l-1}\cdot\left(\frac{\prod_{k=0}^{m} k!}{3\left(m-1\right)!}\right)^{l}=\frac{1}{m!}\left(\frac{m!\prod_{k=0}^{m} k!}{3\left(m-1\right)!}\right)^{l}=\frac{1}{m!}\left(\frac{m\prod_{k=0}^{m} k!}{3}\right)^{l}.$$

Подставляя $\frac{n}{m}$ вместо l, получаем доказательство Теоремы. □

4. Случай $m=2$

Для групповых графов в алфавите из двух элементов количество правильных разметок может быть в явном виде выражено через перманент соответствующей ей бинарной матрицы.

Теорема 5. *Пусть $A=(a_{i,j})$ — групповая матрица степени 2 порядка n. Рассмотрим бинарную матрицу $A'=(a'_{i,j})$ порядка n, в которой* $a'_{i,j}=\begin{cases}1, & \text{если } a_{i,j}\neq 0,\\ 0, & \text{если } a_{i,j}=0,\end{cases}$ *где $i,j\in\{1,\dots n\}$. Тогда количество разметок матрицы равно:*

$$g(A')=\begin{cases}\frac{Per(A')}{2}, & \text{если } A\neq 2E,\\ 1, & \text{если } A=2E.\end{cases}$$

Доказательство. Случай $A=2E$ очевиден. Заметим, что если $A\neq 2E$, то кратности всех перманентных подматриц равны 1. Пользуясь Теоремой 1 и тем, что для любой подматрицы $P\in P(A)$ степень $g(A-P)$

равна 1, получаем:

$$g\left(A'\right) = \frac{\sum_{P\in P(A)} g(A-P)}{2} = \frac{Per\left(A'\right)}{2}.$$

$\square$

Теорема 6. *Количество разметок групповой матрицы A степени 2 не превышает $g(A) \leqslant 2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1}$, и эта оценка достижима.*

Доказательство. Можно показать [9], что перманент групповой матрицы A степени 2 не превышает $2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$, что с учетом Теоремы 5 доказывает верхнюю оценку.

В качестве примеров матриц, на которых эта оценка достижима, для случая четного n рассмотрим групповую матрицу, у которой на диагонали расположены полные подматрицы степени 2, для случая нечетного n — ее незначительную модификацию.

четное n

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

нечетное n

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что перманент данных матриц равен соответственно $2^{\frac{n}{2}}$ и $2^{\frac{n-1}{2}}$, поэтому количество разметок в обоих случаях равно $2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1}$. Теорема доказана. $\square$

5. Критерий единственности разложения

Теорема 7. *Пусть A — групповая матрица степени m, $P\left(A\right) = \{P_1, \ldots, P_s\}$ — множество подматриц перестановок, при этом для любого $i \in \{1, \ldots, s\}$ кратность подматрицы P_i равна k_i, тогда матрица A имеет единственную разметку тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{s} k_i = m$.*

Доказательство. **Необходимость**. Пусть матрица A имеет единственную правильную разметку $A = p_1 P_1 + \ldots + p_s P_s$, $p_i \in \mathbb{N}_0$ — количество матриц P_i в разложении матрицы A, $\sum_{i=1}^{s} p_i = m$. Заметим, что тогда $\sum_{i=1}^{s} k_i \geqslant \sum_{i=1}^{s} p_i = m$.

Предположим, что $\sum_{i=1}^{s} k_i > m$, тогда существует такое $l \in \{1, \ldots, s\}$, что $k_l > p_l$. Рассмотрим матрицу $A' = A - k_l P_l$. Граф A' является групповым степени $m - k_l$ и может быть разложен в сумму $A' = p'_1 P_1 + \ldots + p'_s P_s$, при этом $p'_l = 0$. Тогда разложение $A = p'_1 P_1 + \ldots + k_l P_l + \ldots + p'_s P_s$ отличается от исходного ввиду того, что $k_l > p_l$, противоречие.

Достаточность. Пусть $\sum_{i=1}^{s} k_i = m$. Предположим, что граф G имеет не менее двух различных правильных разметок:

$$\begin{cases} A = p_1 P_1 + \cdots + p_s P_s \\ A = p'_1 P_1 + \cdots + p'_s P_s \\ \quad \ldots \end{cases}$$

Существует такое $l \in \{1, \ldots, n\}$, что $p'_l \neq p_l$, без ограничения общности $p'_l > p_l$. Тогда $\sum_{i=1}^{s} k_i \geqslant \sum_{i=1}^{s} \max(p_i, p'_i) \geqslant \sum_{i \in \{1,\ldots,s\} \setminus l} p_i + p'_l > \sum_{i=1}^{s} p_i = m$. Противоречие. Теорема доказана. $\square$

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., “Введение в теорию автоматов”, *Наука*, 1985, 320.

[2] Алешин С. В., “Алгебраические системы автоматов”, *МАКС Пресс*, 2016, 192.

[3] Бабин Д. Н., “Особенности схем автоматных функций с операцией суперпозиции”, *МАКС Пресс*, 2019, 42.

[4] Ищенко Р. А., “Графы групповых автоматов”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21**:2 (2017), 111–116.

[5] Brègman, L. M., “Some properties of nonnegative matrices and their permanents”, *Doklady Akademii Nauk*, **211**:1 (1973), 27–30.

[6] Minc, H., “Upper bounds for permanents of (0, 1)-matrices”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **69**:6 (1963), 789–791.

[7] Ostrand, P. A, “Systems of distinct representatives, II”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **32**:1 (1970), 1–4.

[8] Rosen, K. H., *Handbook of discrete and combinatorial mathematics*, 2000, 1183.

[9] Van Lint J. H., Wilson R. M., Wilson R. M., *A course in combinatorics*, Cambridge university press, Cambridge, 2001, 616 pp.

Estimation of the number of labelings of group automata graphs

Ishchenko R.A.

If we remove symbols of a state diagram, then we get a directed graph. The inverse operation, when this information is restored, is called graph labeling. This article estimates the number of graph labelings that lead to a group automata.

Keywords: group automata, transition graph, state diagram, permanent, matrix decomposition.