Решетка 1-следов замкнутых классов кусочно-линейных функций

Кан А.Н.[1]

В настоящей работе найдена решетка 1-следов замкнутых классов кусочно-линейных функций.А. Н. Кан

Ключевые слова: кусочно-линейные функции, непрерывные кусочно-линейные функции, финитно-параллельные функции, непрерывные финитно-параллельные функции, непрерывные финитно-линейные функции, кусочно-параллельные функции, финитно-линейные функции, параллельные финитно-линейные функции, решетка 1-следов, функция Хэвисайда, 2-предполный класс.

1. Введение

В настоящей работе найдена решетка 1-следов замкнутых классов кусочно-линейных функций. Ранее, в работе [1] были рассмотрены кусочно параллельные функции и был найден единственный предполный класс C–финитно-линейных фукнций. Класс кусочно-параллельных функций является подклассом кусочно-линейных функций, которые и рассматриваются в данной работе. Данный класс связан с нейронными сетями [6]. Для класса кусочно-линейных функций были найдены все предполные классы [3]. Одним из таких классов стал класс согласованных функций, в котором был найден 2-предполный класс и доказано его единственность [5]. Также был исследован класс непрерывных кусочно-линейных функций, для которого также был найден единственный 2-предполный класс [4].

[1] *Кан Александр Николаевич* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: kan.alexander.n@gmail.com.

Kan Alexandr Nikolaevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

2. Основные понятия и определения

Рассмотрим следующие функции действительных аргументов:
1) Функция $\Theta(x)$ (Хэвисайда):

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases} \tag{1}$$

2) Функция $\Theta^{'}(x)$:

$$\Theta^{'}(x) = 1 - \Theta(-x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases} \tag{2}$$

3) Функция $F(x, y)$:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \leq 0 \\ x, & \text{иначе} \end{cases} \tag{3}$$

Введем некоторые обозначения:

1) Запись вида $f(\overline{a} \cdot t + \overline{b})$ равняется записи $f(a_1 \cdot t + b_1, ..., a_n \cdot t + b_n)$, где $\overline{a} = (a_1, ..., a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, ..., b_n)$.

2) Под операцией " $\cdot$ ", примененной к векторам, подразумевается операция скалярного произведения векторов.

3) Пусть $M \subset PL$, тогда $M^{(1)}$ это множество состоящие, из всех одноместных функций множества M.

4) Пусть $M \subset PL$, тогда $M^{(2)}$ это множество состоящие, из всех двухместных функций множества M.

5) В данной статье рассматривается замыкание по операциям супер позиции. Замыкание множества $M \subset PL$ по операциям суперпозиции, будем обозначать через $[M]$. [1]

Введем следующие определения:

Определение 1. *Функция $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$ называется линейной, если найдутся $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$ и $c \in \mathbb{R}$, такие что $f(\overline{x}) = \overline{x} \cdot \overline{a} + c$. Множество всех линейных функций обозначим через L.*

Пусть l_i - гиперплоскость, задаваемая уравнением $\overline{x} \cdot \overline{a_i} + c_i = 0, a_i \in \mathbb{R}^n \backslash \{\overline{0}\}, c_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., k$. Для каждой точки $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим вектор

$\sigma(\overline{x}) = (\sigma_1, ..., \sigma_k)$ с компонентами из множества $\{-1, 0, 1\}, \sigma_i = sgn(\overline{x} \cdot \overline{a_i} + c_i)$, где

$$sgn(b) = \begin{cases} -1, & \text{если } b < 0 \\ 0, & \text{если } b = 0 \\ 1, & \text{если } b > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Определение 2. *Две точки $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}$ эквивалентны относительно гиперплоскостей $l_1, ..., l_k$ тогда и только тогда, когда $\sigma(\overline{x}) = \sigma(\overline{y})$, обозначим это через $\overline{x} \sim \overline{y}$.*

Легко проверить, что отношение " $\sim$ " является отношением эквивалентности. Таким образом, пространство $\mathbb{R}^n$ разбивается на классы эквивалентности $R_1, ..., R_s$.

Определение 3. *Сигнатурой класса R называется вектор $\sigma(R) = \sigma(\overline{x})$, где $\overline{x}$ точка класса R.*

Пусть $R_1, ..., R_s$ - все классы эквивалентности на которые гиперплоскости $l_1, ..., l_k$ разбивают $\mathbb{R}^n$.

Определение 4. *Функция $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$ называется кусочно-линейной, если $\forall j \in \{1, ..., s\}$ найдутся $\overline{b_j} \in \mathbb{R}^n$ и $d_j \in \mathbb{R}$, что для всех $\overline{x} \in R_j$ выполняется $f(\overline{x}) = \overline{x} \cdot \overline{b_j} + d_j$. Линейную функцию $\overline{x} \cdot \overline{b_j} + d_j$, реализуемую на множестве R_j, обозначим $f_{R_j}(\overline{x})$. Множество всех кусочно-линейных функций обозначим через PL.*

Определение 5. *Функция $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ называется одноместной непрерывной финитно-линейной, если $f \in CPL^{(1)}$ и $\exists a, b, N \in \mathbb{R}$, что $f(x) = a \cdot x + b, \forall |x| > N$. Класс всех таких функций обозначим через $CFS^{(1)}$.*

Определение 6. *Функция $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ называется одноместной непрерывной финитно-параллельной, если $f \in PL^{(1)}$ и $\exists N, a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ такие, что $\forall x < -N, f(x) = a \cdot x + b_1$ и $\forall x > N, f(x) = a \cdot x + b_2$. Класс всех таких функций обозначим через $CFP^{(1)}$.*

Определение 7. *Функция $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ называется линейной с выколотыми точками, если $f \in PL^{(1)}$ и $\exists a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, .., s$, что $f(x) = a \cdot x + b, \forall x \in \mathbb{R}/\{a_1, .., a_s\}$ и $f(a_i) = b_i, i = 1, .., s$. Класс всех таких функций обозначим через $L^{'(1)}$.*

Определение 8. *Функция* $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ *называется одноместной параллельной финитно-линейной, если* $f \in PP^{(1)}$ *и* $\exists N, a, b \in \mathbb{R}$, *что* $f(x) = a \cdot x + b$, *при* $|x| > N$. *Класс всех таких функций обозначим через* $PFS^{(1)}$.

Определение 9. *Функция* $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ *называется одноместной кусочно-параллельной, если* $f \in PL^{(1)}$ *и* $\exists a_i, x_i^1, x_i^2 \in \mathbb{R} : i = 1, .., s$, *что* $f(x) = a_i + l(x)$,*при* $x \in (x_i^1, x_i^2)$, *где* $l(x) \in L^{(1)}$. *Класс всех таких функций обозначим через* $PP^{(1)}$.

Определение 10. *Функция* $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ *называется одноместной финитно-линейной, если* $f \in PL^{(1)}$ *и* $\exists a, b, N \in \mathbb{R}$ *такие, что* $f(x) = a \cdot x + b, \forall |x| > N$. *Класс всех таких функций обозначим через* $FS^{(1)}$.

Определение 11. *Функция* $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ *называется одноместной финитно-параллельной, если* $f \in PL^{(1)}$ *и* $\exists a, b_1, b_2, N \in \mathbb{R}$ *такие, что* $f(x) = a \cdot x + b_1$,*при* $x < -N$, *и* $f(x) = a \cdot x + b_2$,*при* $x > N$, *Класс всех таких функций обозначим через* $FP^{(1)}$.

3. Подрешетка 1-следов замкнутых классов непрерывных кусочно-линейных функций

Пусть $M \subseteq CFS^{(1)}$ тогда верна следующая лемма.

Лемма 1. $CFS^{(1)} \subseteq [M \cup L] \Longleftrightarrow M \not\subseteq L^{(1)}$.

Доказательство. Пусть $f_1 \in CFS^{(1)} \backslash L^{(1)}$.

$$f_1(x) = \begin{cases} a_1 \cdot x + b_1, & \text{если } x \le c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2, & \text{если } c_1 \le x \le c_2 \\ . \\ . \\ a_{n-1} \cdot x + b_{n-1}, & \text{если } c_{n-2} \le x \le c_{n-1} \\ a_1 \cdot x + b_1, & \text{если } x \ge c_{n-1} \end{cases} \tag{5}$$

Так как у нас имеются все линейные функции, то отняв от $f_1(x)$ функцию $a_1 \cdot x + b_1$, получим функцию $f_2(x)$.

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq c_1 \\ a_2^{'} \cdot x + b_2^{'}, & \text{если } c_1 \leq x \leq c_2 \\ . & \\ . & \\ a_{n-1}^{'} \cdot x + b_{n-1}^{'}, & \text{если } c_{n-2} \leq x \leq c_{n-1} \\ 0, & \text{если } x \geq c_{n-1} \end{cases} \quad (6)$$

Далее, так как у нас имеются все линейные функции, мы не будем подробно описывать такие линейные преобразования над функцией как отражение, сдвиг на константу, сжатие и растяжение.

Данная функция ограничена, а следовательно существует максимум. Пусть

$$max_{left} = \{x \mid f_2(x) = max(f_2) \text{ и } \forall x^{'} < x, f_2(x^{'}) < max(f_2)\} \quad (7)$$

Построим функцию, которая будет иметь единственный максимум в точке ноль.

$$f_3(x) = f_2(x + max_{left}) + f_2(-x + max_{left}) \quad (8)$$

Отнимем константу от получившейся функции так, чтобы функция была всюду меньше нуля кроме небольшой окрестности в точке ноль.

$$f_4(x) = f_3(x) - max(f_3) + c \quad (9)$$

График функции f_4 схематично может быть изображен как показано на Рис. 1.

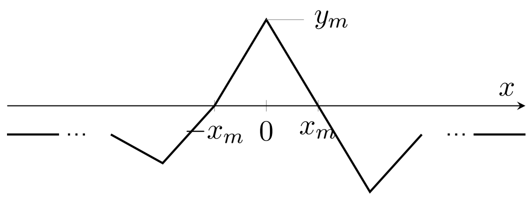


Рис. 1

Изменим функцию f_2 так, чтобы первый изгиб функции начинался в точке ноль и был направлен наверх.

$$f_2'(x) = f_2(x + c_1) \tag{10}$$

Функция f_2' выглядит как показано на Рис. 2.

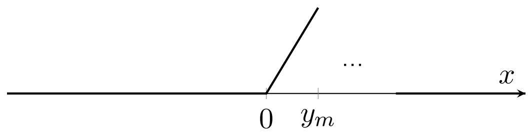


Рис. 2

Далее, подставим функцию f_4 в функцию f_2'. Получим функцию «симметричная горка». Ее график можно увидеть на Рис. 3.

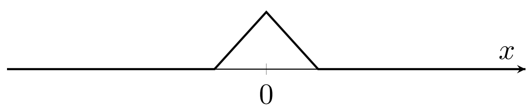


Рис. 3

Так как мы имеем все линейные функции то мы можем получить произвольную функцию вида «симметричная горка».

Из получившихся функций и линейных функций построим произвольную функцию вида «горка». То есть функцию которая может имеет различные углы при правом и левом изгибе. Пусть $g(x)$ произвольная функция вида «горка». Рассмотрим две функции $g_l(x)$ и $g_r(x)$, которые принадлежат семейству «симметричная горка» и имеют угол наклона изгиба как левый изгиб и правый изгиб $g(x)$ соответственно. Пусть $g_l(x)$ имеет горку, которая заканчивается в точке ноль, а $g_r(x)$ имеет горку, начинающуюся в точке ноль. Тогда сложив две эти функции мы получим функцию $g_1(x)$ (Рис. 4)

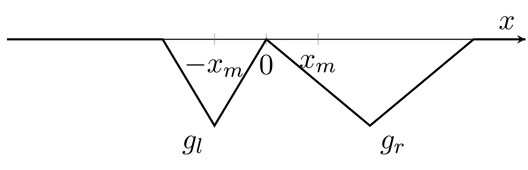


Рис. 4

Функция $g_1(x)$ имеет в себе искомую «горку». Рассмотрим функцию $p(x)$ которая имеет вид как показано на Рис.5.

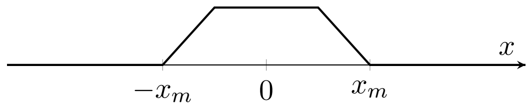


Рис. 5

Функцию $p(x)$ легко получить сложив две соответствующие функции из класса «симметричная горка». Далее сложим функцию $g_1(x)$ с функцией $p(x)$ и получим функцию $g_2(x)$, которая схематично можно изобразить как показано на Рис. 6.

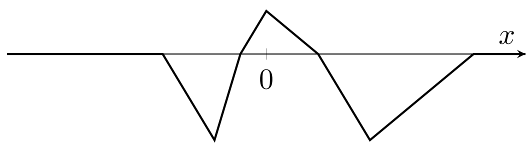


Рис. 6

Мы почти получили искомую функцию, осталось только избавиться от ненужных изгибов. Данную процедуру мы делали ранее. Просто подставим функцию $g_2(x)$ в функцию $d(x)$ из класса симметричная горка.

$$d(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x <= 0 \\ x, & \text{если } 0 < x <= max(g_2(x)) \\ . \\ . \end{cases} \tag{11}$$

Функция $d(g_2(x))$ и будет искомой функцией.

Следовательно мы можем получить произвольную функцию из класса «горка». С помощью данных функций попытаемся построить произвольную функцию из класса $CFS^{(1)}$.

Пусть мы хотим получить функцию $g(x) \in CFS^{(1)}$, которая имеет n изгибов, $n > 3$. Если функция имеет 3 изгиба то это функция из класса «горка», а такие функции мы получать умеем. Пусть кол-во изгибов больше трех тогда покажем, что их можно уменьшить на один. Без ограничения общности можно считать что функция $g(x)$ имеет вид как показано на рис.7.

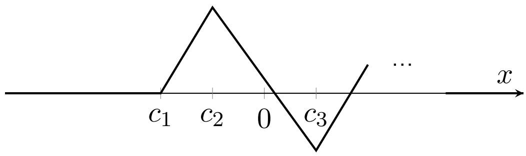


Рис. 7

Прибавим к ней функцию $g_{c1}(x)$ которая принадлежит классу «горка». Функция $g_{c1}(x)$ имеет вид как показано на Рис. 8.

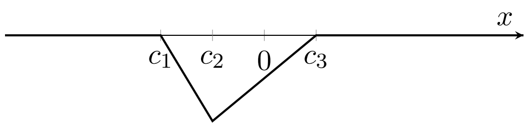


Рис. 8

То есть, функция $g_{c_1}(x)$ имеет изгибы в тех же точках что и функция $g(x)$ имеет первые три изгиба. Линейная функция реализуемая на интервале (c_1, c_2) у функции $g_{c_1}(x)$ равна соответствующей функции реализуемой на том же интервале у функции $-g(x)$. Сложив функции $g(x)$ и $g_{c_1}(x)$ получим, что результирующая функция равна нулю на интервале (c_1, c_2), а следовательно не имеет изгиба в точке c_1. Проделав такую операцию несколько раз мы получим функцию вида «горка», которую мы получать умеем. То есть, мы доказали что с помощью функций из класса «горка» мы можем получить произвольную функцию из класса $CFS^{(1)}$. Лемма доказана. $\square$

Следствие 1. *Класс $L^{(1)}$ является единственным максимальным собственным 1-следом в классе $CFS^{(1)}$.*

Пусть $M \subseteq CFP^{(1)}$ тогда верна следующая лемма.

Лемма 2. $CFP^{(1)} \subseteq [M \cup L] \Longleftrightarrow M \nsubseteq CFS^{(1)}$

Доказательство. Пусть $f(x) \in CFP^{(1)} \backslash CFS^{(1)}$. Без ограничения общности можно считать, что при $x < N$, где $N \in \mathbb{R}, f(x) = 0$. Это всегда можно сделать добавив к имеющейся функции некую линейную функцию. Сначала покажем что у нас имеются все функции из класса $CFS^{(1)}$.

Из данной функции легко получить некую функцию из класса $CFS^{(1)}$, которая при это не будет линейной. Например, можно сложить функцию $f(x)$ с функцией $-f(x+c)$, где $c \in \mathbb{R}$. Из предыдущей теоремы следует что из получившейся функции мы можем получить все функции из класса CFS. Далее докажем что $CFP \subseteq [\{f(x)\} \cup CFS]$. Путь функция $f(x)$ имеет вид как показано на Рис. 9. Рассмотрим функцию $g(x) \in CFS^{(1)}$ (Рис. 10), которая почти совпадает с функцией $f(x)$.

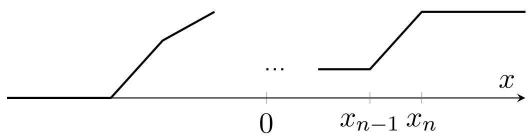


Рис. 9

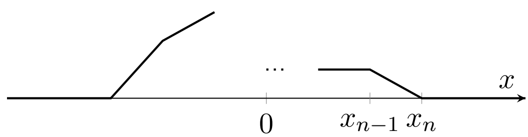


Рис. 10

Данные функции отличаются только на интервалах (x_{n-1}, x_n) и (x_n, ∞). Если отнять от функции $f(x)$ функцию $g(x)$, то мы получим функцию $s(x) = f(x) - g(x)$, которая имеет вид как показано на Рис. 11.

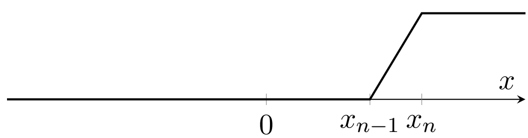


Рис. 11

С помощью линейных функций можно получить произвольную функцию такого вида. Пусть функция $f(x) \in CFP^{(1)}$ произвольная функция которую мы хотим получить. Тогда $f(x) = g(x) + s(x)$, где $g(x) \in CFS^{(1)}$ это почти совпадающая функция, а функция $s(x) = f(x) - g(x)$ которые мы получать умеем. Лемма доказана. $\square$

Следствие 2. *Класс $CFS^{(1)}$ является единственным максимальным собственным 1-следом в классе $CFP^{(1)}$.*

Задача 2-полноты класса CPL была рассмотрена в работе [4]. Было доказано, что класс $CFP^{(2)}$ единственный 2-предполный класс в $CPL^{(2)}$. Из доказательства вытекает следующие утверждение.

Следствие 3. *класс $CFP^{(1)}$ является единственным максимальным собственным 1-следом в классе $CPL^{(1)}$.*

4. Подрешетка 1-следов замкнутых классов кусочно-линейных функций допускающие разрывы

Пусть $M \subseteq L'^{(1)}$ тогда верна следующая лемма.

Лемма 3. $L'^{(1)} \subseteq [M \cup L] \Longleftrightarrow M \nsubseteq L^{(1)}$

Доказательство. Пусть $f(x) \in L'^{(1)} \backslash L'^{(1)}$. Без ограничения общности можно считать, что функция $f(x)$ всюду равна нулю за исключение n точек. Пусть функция $f(x)$ имеет единственную точку максимума x_{max} (аналогично теореме полноты в классе CFS), а в точке x_{smax} функция равняется второму по величине значению функции $f(x)$. Пусть функция $f(x)$ выглядит как показано на Рис. 12.

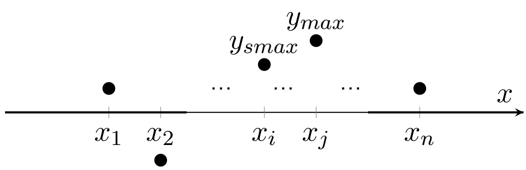


Рис. 12

Простыми линейными преобразованиями получим функцию $f'(x) = N \cdot (f(x + x_j) - y_{max})$, где $N > \frac{|x_1 - x_j|}{|y_{max} - y_{smax}|}$ и функцию
$f''(x) = \frac{1}{y_{max}} \cdot f(x + x_j)$. Подставим функцию $f'(x)$ в функцию $f''(x)$. Так как функция $f'(x)$ равна нулю только в точке ноль, а вне нуля строго меньше $-|x_j - x_1|$, то результирующая функция $g(x)$ будет всюду равна нулю, а в нуле равна единице. Из такой функции с одной выколотой точкой легко построить произвольную функцию $g(x) \in L'^{(1)}$ с n выколотыми точками.

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot p(x + a_i) + (a \cdot x + b) \tag{12}$$

Лемма доказана. $\square$

Следствие 4. *Класс $L^{(1)}$ является единственным максимальным собственным 1-следом в классе $L^{'(1)}$.*

Пусть $M \subseteq PFS^{(1)}$ тогда верна следующая лемма.

Лемма 4. $PFS^{(1)} \subseteq [M \cup L] \Longleftrightarrow M \not\subseteq L^{'(1)}$

Доказательство. Путь $f(x) \in PFS^{(1)} \backslash L^{'(1)}$. Как и ранее будем считать, что функция $f(x)$ на концах равна нулю и имеет единственный максимум. Рассмотрим два случая:

1) Максимум функции $f(x)$ это точка. Тогда по аналогии с предыдущей теоремой из функции $f(x)$ можно получить все функции из $L^{'(1)}$. К функции $f(x)$ прибавим такую функцию из $L^{'(1)}$, чтобы у результирующей функции $f^{'}(x)$ максимум был интервал. Пусть функция $f^{'}(x)$ выглядит как показано на Рис. 13.

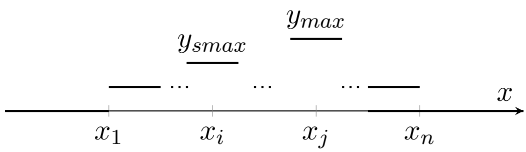


Рис. 13

Рассмотрим две функции. Первая функция $g_1(x) = N \cdot (f^{'}(x + x_j) - y_{max})$, где $N > \frac{|x_1 - x_j|}{|y_{max} - y_{smax}|}$ и функцию $g_2(x) = \frac{1}{y_{max}} \cdot f^{'}(x + x_j)$. Подставим функцию $g_1(x)$ в функцию $g_2(x)$. Так как функция $g_1(x)$ равна нулю в некой окрестности точки ноль, а вне этой окрестности строго меньше нуля и при этом, функция $g_2(x)$ равна нулю при $x < -|x_j - x_1|$, то результирующая функция $l(x)$ будет равна единице в некой окрестности точки ноль а вне окрестности равна нулю (Рис. 14).

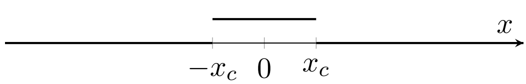


Рис. 14

Пусть $g(x)$ произвольная функция из $PFS^{(1)}$. Тогда $g(x)$ можно представить в следующем виде:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot l(c_i \cdot x + a_i) + \sum_{i=1}^{n} b_i^{'} \cdot p(x + a_i^{'}) + (a \cdot x + b) \qquad (13)$$

2) Максимум функции $f(x)$ это интервал. Построим функцию $l(x)$ так же как и в первой части. Далее рассмотрим функцию:

$$p^{'}(x) = l(x) - l(2 \cdot x - x_c) - l(2 \cdot x + x_c) \qquad (14)$$

Функция $p^{'}(x)$ равна единице только в точке ноль, а в остальных случаях функция равна нулю. То есть мы получили функцию с одной выколотой точкой, а следовательно можем получить весь класс $L^{'(1)}$. Как и в первой части доказательства мы получили функции $p(x)$ и $l(x)$ а значит можем получить весь класс PFS. Лемма доказана. □

Следствие 5. *Класс $L^{'(1)}$ является единственным максимальным собственным 1-следом в классе $PFS^{(1)}$.*

Пусть $M \subseteq PP^{(1)}$ тогда верна следующая лемма.

Лемма 5. $PP^{'(1)} \subseteq [M \cup L] \iff M \not\subseteq PFS^{(1)}$

Доказательство. Данная теорема была доказана в работе [1]. □

Следствие 6. *Класс $PFS^{(1)}$ является единственным максимальным собственным 1-следом в классе $PP^{(1)}$.*

Пусть функция $f(x) \in FS^{(1)} \backslash PFS^{(1)}$, тогда верна следующая лемма.

Лемма 6. $FS^{(1)} \subseteq [PFS^{(1)} \cup L \cup \{f(x)\}]$.

Доказательство. Пусть имеются все функции из $PFS^{(1)}$ и линейные функции, а также функция $f(x) \in FS^{(1)} \backslash PFS^{(1)}$. Без ограничения общности будем считать, что $f(x) = 0$, при $|x| > N, N \in \mathbb{R}$. Так как $(x) \notin PFS^{(1)}$, то существует интервал (x_i, x_{i+1}), где функция не равна константе. Пусть функция $f(x)$ выглядит ка показано на Рис. 15.

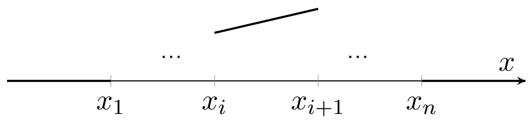


Рис. 15

Построим две функции:
1) Прибавим к функции $f(x)$ функцию $l_1(x) \in PFS^{(1)}$, которая увеличит значение результирующей функции $f^{'}(x)$ на интервале (x_i, x_{i+1}) так чтобы значение функции $f^{'}(x)$ на этом интервале было много больше чем вне этого интервала. Простыми линейными преобразованиями изменим функцию $f^{'}(x)$ так чтобы у результирующей функции $f^{''}(x)$ данный интервал изменился на интервал $(0, 1)$, функция реализующаяся на этом интервале была проводником, а вне интервала $(0, 1)$ функция была много меньше нуля.
2) Прибавим к функции $f(x)$ функцию $l_2(x) \in PFS^{(1)}$, которая опустит у результирующей функции $g^{'}(x)$ значение функции на интервале (x_i, x_{i+1}) к оси Ox. Простыми линейными преобразованиями изменим функцию $g^{'}(x)$ так чтобы у результирующей функции $g^{''}(x)$ данный интервал изменился на интервал $(0, 1)$, функция реализующаяся на этом интервале была проводником, и при $x < N, N \in \mathbb{R}$, функция $g^{''}(x)$ равнялась нулю. Подставим функцию $f^{''}(x)$ в функцию $g^{''}(x)$ получим функцию $h(x)$ (Рис. 16), которая на интервале $(0, 1)$ равна функции "проводник а вне интервала равна нулю.

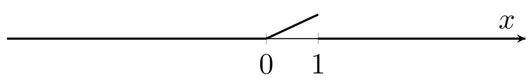


Рис. 16

Пусть $g(x)$ произвольная функция из $FS^{(1)}$. Тогда $g(x)$ можно представить как:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot h(c_i \cdot x + a_i) + r(x) \tag{15}$$

где $r(x) \in PFS^{(1)}$. Лемма доказана. □

Пусть функция $f(x) \in FS^{(1)} \backslash CFS^{(1)}$, тогда верна следующая лемма.

Лемма 7. $FS^{(1)} \subseteq [CFS^{(1)} \cup L \cup \{f(x)\}]$.

Доказательство. Пусть функция $f(x) \in FS^{(1)} \backslash CFS^{(1)}$. Следовательно существует такая точка разрыва a, что функция $f(x)$ в этой точке равна c, а в малой окрестности слева(справа) от этой точки равна некой линейной функции. Линейными преобразованиями сделаем так чтобы функция имела точку разрыва в нуле и равнялась единице в этой точке, а в малой окрестности слева равнялась константе ноль (Рис. 17).

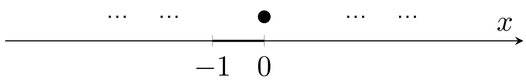


Рис. 17

Рассмотрим функцию $g(x) \in CFS^{(1)}$, которая имеет вид как показано на Рис. 18.

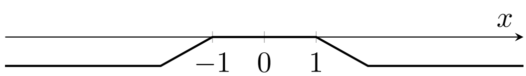


Рис. 18

Функция $g(x)$ на концах ровняется константе c, $-1 < c < 0$. Следовательно, подставив функцию $g(x)$ в функцию $f(x)$ мы получим функцию $h(x)$, которая имеет вид как показано на Рис 19.

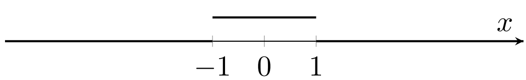


Рис. 19

Из Леммы 4 следует что с помощью функции $h(x)$ и линейных функций мы можем получить все функции из множества $PFS^{(1)}$. Возьмем произвольную функцию $w(x) \in CFS^{(1)} \setminus PFS^{(1)}$. Из леммы 6 следует, что $FS^{(1)} \subseteq [\{w(x)\} \cup PFS^{(1)} \cup L]$. Лемма доказана. $\square$

Пусть $M \subseteq FS^{(1)}$ тогда верна следующая лемма.

Лемма 8. *$FS^{(1)} \subseteq [M \cup L] \Longleftrightarrow M \not\subseteq PFS^{(1)}$ и $M \not\subseteq CFS^{(1)}$*

Доказательство. Пусть $f_c(x) \in FS^{(1)} \backslash CFS^{(1)}$. Из леммы 7 следует что можно получить функцию $f_c^{'}(x)$, которая в нуле равняется единице а в малой окрестности слева от нуля равняется константе ноль (Рис. 17). Далее рассмотрим функцию $g(x) \in M, g(x) \notin L)$. Без ограничения общности можно считать что $g(x) = 0$, при $|x| > N, N \in \mathbb{R}$. Следовательно функция $g(x)$ имеет точку максимума или точку где функция стремится к максимуму. Будем считать что такая точка единственная. Рассмотрим случаи:

1) Максимум принимается на интервале(полуинтервале, отрезке) (x_1, x_2) и функция $g(x)$ равняется константе c на этом интервале(полуинтервале, отрезке). С помощью линейных преобразований сделаем так чтобы максимум функции $g(x)$ равнялся нулю и принимался на интервале(полуинтервале, отрезке) $(-1, 1)$, а вне этого интервала удовлетворяла следующим ограничениям $0 > g(x) > -1$. Тогда подставив функцию $g(x)$ в функцию $f_c^{'}(x)$ получим функцию $h(x)$ (Рис. 19). Из леммы 7 следует что с помощью функций $h(x)$ и $f_p(x) \notin PFS$ и линейных функций можно получить все множество $FS^{(1)}$.

2) Максимум принимается(стремится к максимуму) на интервале(полуинтервале, отрезке) (x_1, x_2) и функция $g(x)$ равняется линейной функции $l(x) \in L^{(1)}$ на этом интервале(полуинтервале, отрезке). Рассмотрим функцию $g^{'}(x) = g(x) + g(-x + x_1 + x_2)$. Данная функция является суммой функции $g(x)$ и этой же функции отраженной относительно центра интервала(полуинтервала, отрезка) (x_1, X_2). Следовательно функция $g^{'}(x)$ на интервале(полуинтервале, отрезке) будет равняться некой константе c. Свели к случаю 1. 3) Максимум принимается(стремится к максимуму) на интервале(полуинтервале, отрезке) (x_1, x_2) и функция $g(x)$ равняется линейной функции $l_1(x) \in L^{(1)}$ на интервале(полуинтервале) $(x_1, (x_1 + x_2)/2)$ и равняется линейной функции $l_2(x) \in L^{(1)}$ на интервале(полуинтер-вале) $((x_1 + x_2)/2, x_2)$, причем $l_1(x) = l_2(-x + x_1 + x_2)$. Рассмотрим функцию $g^{'}(x) = g(x) + g(-x + x_1 + (x_1 + x_2)/2)$. Данная функция имеет максимум на интервале(полуинтервал, отрезке) $(x_1, (x_1 + x_2)/2)$ и равна некой константе на этом интервале(полуинтервал, отрезке). Свели к случаю 1.

4)Максимум функции $g(x)$ это выколотая точка. Аналогично теореме 3, рассмотрим две функции. Первая функция $g^{'}(x)$ имеет максимум в точке ноль и значение максимума равно нулю, при этом вне нуля функция всюду меньше некого значения $N \in \mathbb{R}$. Вторая функция $g^{''}(x)$ равняется единице в точке ноль, а при $|x| > N$ равняется нулю. Подставив функцию $g^{'}(x)$ в функцию $g^{''}(x)$ мы получим функцию с одной выколотой точкой, тогда из леммы 3 следует что мы можем получить все функции из множества $L^{'(1)}$. Прибавим к функции $g(x)$ нужную функцию $l^{'} \in L^{'(1)}$ мы избавимся от всех выколотых точек. Свели к первым трем случаям. Лемма доказана. $\square$

Следствие 7. *Класс $PFS^{(1)}$ и класс $CFS^{(1)}$ является максимальными собственными 1-следами класса $PP^{(1)}$ и других таких классов не существует.*

Пусть функция $f(x) \in FP^{(1)} \backslash FS^{(1)}$, тогда верна следующая лемма.

Лемма 9. $FP^{(1)} \subseteq [FS^{(1)} \cup L \cup \{f(x)\}]$.

Доказательство. Пусть функция $g(x) \in FP^{(1)} \backslash FS^{(1)}$. Без ограничения общности можно считать что функция $g(x) = 0$, при $x < -N$ и $g(x) = c$, при $x \geq N$, где $N \in \mathbb{R}$. Рассмотри функцию $g_s(x)$, такую что $g_s(x) = g(x)$, при $x < N$ И $g_s(x) = 0$, при $x \geq N$. Очевидно, функция $g_s(x)$ принадлежит множеству $FS^{(1)}$. Построим функцию $w(x) = g(x) - g_s(x)$. Данная функция будет равняться нулю, при $x < N$ и равняться константе c, при $x \geq N$. Следовательно функция $w(x)$ принадлежит множеству $PP^{(1)}$ одноместных кусочно параллельных функций но не принадлежит классу $PFS^{(1)}$. Из леммы 5 следует что из функции $w(x)$ и линейных функций можно получить все множество $PP^{(1)}$. Пусть функция $f(x)$ произвольная функция из множества $FP^{(1)}$. Без ограничения общности можно считать что функция $f(x) = 0$, при $x < -N$ и $f(x) = c$, при $x > N$, где $N \in \mathbb{R}$. Представим функцию $f(x)$ как сумму двух функций:

$$f(x) = f_s(x) + f_p(x) \tag{16}$$

где

$$f_s(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x < N \\ 0, & \text{если } x \geq N \end{cases} \tag{17}$$

$$f_P(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < N \\ c, & \text{если } x \geq N \end{cases} \tag{18}$$

Так как функция $f_s(x)$ принадлежит множеству $FS^{(1)}$, а функция $f_p(x)$ принадлежит множеству $PP^{(1)}$, то мы можем получить произвольную функция $f(x)$ из множества $PF^{(1)}$. Лемма доказана. $\square$

Пусть функция $f(x) \in FP^{(1)} \backslash PP^{(1)}$, тогда верна следующая лемма.

Лемма 10. $FP^{(1)} \subseteq [PP^{(1)} \cup L \cup \{f(x)\}]$.

Доказательство. Пусть функция $g(x) \in FP^{(1)} \backslash PP^{(1)}$. Без ограничения общности можно считать что функция $g(x) = 0$, при $x < -N$ и $g(x) = c$, при $x \geq N$, где $N \in \mathbb{R}$. Из леммы 9 следует что функцию $g(x)$ можно представить как сумму двух функций $g_s(x) \in FS^{(1)}$ и $g_p(x) \in PP^{(1)}$. Следовательно можно получить функцию $g_s(x) = g(x) - g_p(x)$. Функция $g_s(x)$ принадлежит множеству $FS^{(1)}$, но не принадлежит множеству $PFS^{(1)}$. Так как $PFS^{(1)} \subseteq PP^{(1)}$, то из леммы 6 следует, что имея все множество $PFS^{(1)}$ и функцию не принадлежащую этому множеству можно получить все множество $FS^{(1)}$. Имея множество $PP^{(1)}$ и множество $FS^{(1)}$ из леммы 9 следует что можно получить произвольную функцию из $FP^{(1)}$. Лемма доказана. □

Пусть функция $f(x) \in FP^{(1)} \backslash CFP^{(1)}$, тогда верна следующая лемма.

Лемма 11. $FP^{(1)} \subseteq [CFP^{(1)} \cup L \cup \{f(x)\}]$.

Доказательство. Пусть функция $g(x) \in FP^{(1)} \backslash CFP^{(1)}$. Без ограничения общности можно считать что функция $g(x) = 0$, при $x \leq 0$ и $g(x) = c$, при $x \geq N$, где $N \in \mathbb{R}$. Рассмотрим функцию $g^{'}(x) = g(x) + g(-x)$. Функция $g^{'}(x)$ равняется константе c, при $|x| > N$, следовательно данная функция принадлежит множеству $FS^{(1)}$. Так как функция $g^{'}(x) = g(x)$ при $x > 0$, то она не принадлежит множеству $CFS^{(1)}$. Из леммы 7 следует, что имея все множество $CFS^{(1)}$ и функцию не принадлежащую этому множеству можно получить все множество $FS^{(1)}$. Из леммы 9 следует, что имея все множество $FS^{(1)}$ и функцию не принадлежащую этому множеству можно получить все множество $FP^{(1)}$. Лемма доказана. □

Пусть $M \subseteq FP^{(1)}$ тогда верна следующая лемма.

Лемма 12. $FP^{(1)} \subseteq [M \cup L] \Longleftrightarrow M \nsubseteq PP^{(1)}$*,* $M \nsubseteq CFP^{(1)}$ *и* $M \nsubseteq FS^{(1)}$*.*

Доказательство. Пусть функция $g_{cfp}(x) \in FP^{(1)} \backslash CFP^{(1)}$. Без ограничения общности можно считать что функция $g(x) = 0$, при $x \leq 0$ и $g(x) = c$, при $x \geq N$, где $N \in \mathbb{R}$. Аналогично утверждению 5 получим функцию $g^{'}_{cfs}(x)$, которая принадлежит множеству $FS^{(1)}$, но не принадлежит множеству $CFS^{(1)}$. Пусть функция $g_{pp}(x) \notin PP^{(1)}$. Без ограничения общности можно считать что функция $g(x) = 0$, при $x \leq 0$ и $g(x) = c$, при $x \geq N$, где $N \in \mathbb{R}$. Рассмотрим функцию $g_{pfs}(x) = g_{pp}(x) + g_{pp}(-x)$.

Функция $g_{pfs}(x)$ равняется константе c, при $|x| > N$, следовательно данная функция принадлежит множеству $FS^{(1)}$. Так как функция $g_{pfs}(x) = g_{pp}(x)$ при $x > 0$, то она не принадлежит множеству $PFS^{(1)}$. Из теоремы 6 следует что имея функцию $g_{pfs}(x)$ и функцию $g_{cfs}(x)$, а также все линейные функции можно получить все множество $FS^{(1)}$. Из утверждения 3 следует что имея множество $FS^{(1)}$ и функцию не принадлежащую этому множеству, а также все линейные функции можно получить все множество $FP^{(1)}$ Лемма доказана. □

Следствие 8. *Класс $PP^{(1)}$, класс $FS^{(1)}$ и класс $CFP^{(1)}$ является максимальными собственными 1-следами класса $FP^{(1)}$ и других таких классов не существует.*

Пусть функция $f(x) \in PL^{(1)} \backslash FP^{(1)}$, тогда верна следующая лемма.

Лемма 13. $PL^{(1)} \subseteq [FP^{(1)} \cup L \cup \{f(x)\}]$.

Доказательство. Пусть функция $g(x) \in PL^{(1)} \backslash FP^{(1)}$. Без ограничения общности можно считать что функция $g(x) = c$, при $x < N$ и $g(x) = a \cdot x$, при $x \geq 0$, где $N, a, c \in \mathbb{R}$. Возьмем функцию $g_{fp}(x) \in FP^{(1)}$.

$$g_{fp}(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x < 0 \\ 0, & \text{если } x \geq 0 \end{cases} \tag{19}$$

Отнимем функцию $g_{fp}(x)$ от функции $g(x)$.

$$d(x) = g(x) - g_{fp}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ a \cdot x, & \text{если } x \geq 0 \end{cases} \tag{20}$$

Из работы [2] известно, что с помощью функции $d(x)$ и всех линейных функций можно получить все множество $CPL^{(1)}$.
Пусть $f(x)$ произвольная функция из множества $PL^{(1)}$. Без ограничения общности можно считать что функция $f(x) = c$, при $x < N$ и $g(x) = a \cdot x$, при $x \geq 0$, где $N, a, c \in \mathbb{R}$. Представим функцию $f(x)$ в виде суммы двух функций.

$$f(x) = f_{fp}(x) + f_{cpl}(x) \tag{21}$$

Где функция $f_{fp}(x) \in FP^{(1)}$.

$$f_{fp}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x < 0 \\ 0, & \text{если } x \geq 0 \end{cases} \tag{22}$$

Функция $f_{cpl}(x) \in CPL^{(1)}$.

$$f_{cpl}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ a \cdot x, & \text{если } x \geq 0 \end{cases} \tag{23}$$

Лемма доказана. □

Пусть функция $f(x) \in PL^{(1)} \backslash CPL^{(1)}$, тогда верна следующая лемма.

Лемма 14. *$PL^{(1)} \subseteq [CPL^{(1)} \cup L \cup \{f(x)\}]$.*

Доказательство. Пусть функция $g(x) \in PL^{(1)} \backslash CPL^{(1)}$. Без ограничения общности можно считать что функция имеет разрыв в точке ноль, значение функции в точке разрыва равно единице, а на интервале $(-e, 0)$, где $e \in \mathbb{R}_+$, функция равна константе ноль. Возьмем функцию $g_{cpl}(x) \in CPL^{(1)}$.

$$g_{cpl}(x) = \begin{cases} -e, & \text{если } x < -e \\ x, & \text{если } -e \leq x < 0 \\ 0, & \text{если } x \geq 0 \end{cases} \tag{24}$$

Подставим функцию $g_{cpl}(x)$ в функцию $g(x)$. Получим функцию, которая равна нулю при $x < 0$ и равна единице при $x \geq 0$, то есть функцию $\Theta(x)$. Из работы [1] известно что имея функцию $\Theta(x)$ и все линейные функции можно получить все множество $PP^{(1)}$. Так как функция $g_{cpl}(x)$ принадлежит множеству $FP^{(1)}$, но не принадлежит множеству $PP^{(1)}$, то из утверждения 4 следует что можно получить все множество $FP^{(1)}$. А имея множество $CPL^{(1)}$ и множество $FP^{(1)}$ можно получить все множество $PL^{(1)}$ (утверждение 7). Лемма доказана. □

Пусть $M \subseteq PL^{(1)}$ тогда верна следующая лемма.

Лемма 15. *$PL^{(1)} \subseteq [M \cup L] \Longleftrightarrow M \not\subseteq FP^{(1)}$ и $M \not\subseteq CPL^{(1)}$*

Доказательство. Покажем что можно получить все множество $FP^{(1)}$. Пусть функция $g_{nc}(x)$ не принадлежит множеству $CPL^{(1)}$. Без ограничения общности можно считать что функция $g_{nc}(x) = 0$, при $x \geq 0$ и

$g_{nc}(x) = a \cdot x + b$, при $x < -N$, где $N, a, b \in \mathbb{R}$. Рассмотрим функцию $g'_{nc}(x) = g_{nc}(x) - g_{nc}(x + N)$.

$$g'_{nc}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geq 0 \\ g_{nc}(x), & \text{если } -N < x < 0 \\ . \\ . \\ const, & \text{если } x < -2 \cdot N \end{cases} \tag{25}$$

Из уравнения следует что функция $g'_{nc}(x)$ принадлежит множеству $FP^{(1)}$ и так как на интервале $(-N, 0)$, функция $g'_{nc}(x)$ равна функции $g_{nc}(x)$, она не содержится в множестве $CFP^{(1)}$. Далее рассмотрим функцию $g_{nfp}(x)$ которая не содержится в множестве $FP^{(1)}$. Без ограничения общности можно считать что функция $g_{nfp}(x) = 0$, при $x \geq 0$ и $g_{nfp}(x) = a \cdot x + b$, при $x < -N$, где $N, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Рассмотрим функцию $g'_{nc}(x) = g_{nc}(x) - g_{nc}(x + N + e), e \in \mathbb{R}$.

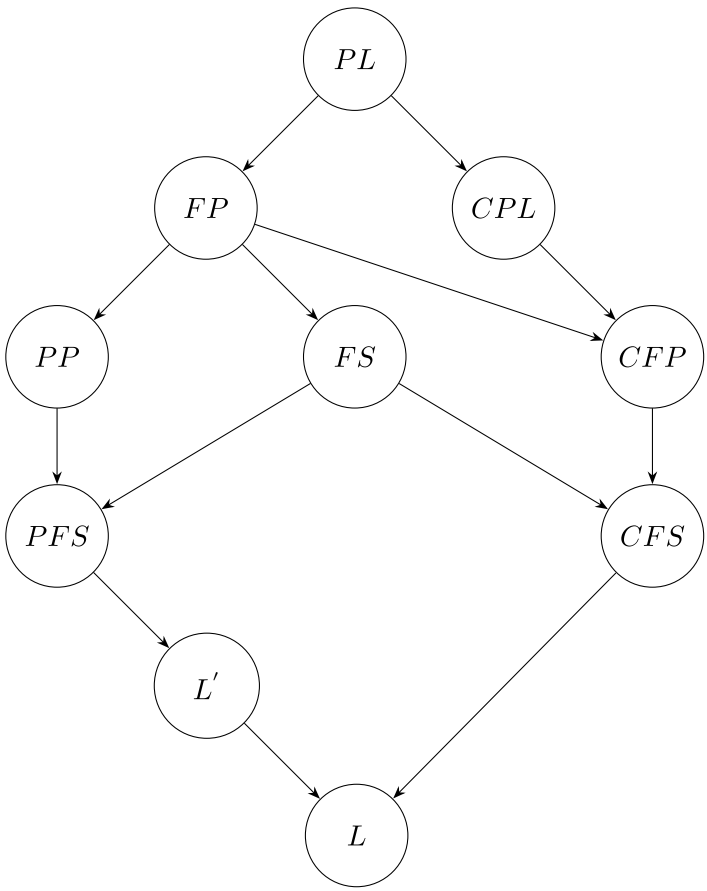
$$g'_{nfp}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geq 0 \\ g_{nfp}(x), & \text{если } -N < x < 0 \\ . \\ . \\ a \cdot x + b, & \text{если } -(N + e) < x < -N \\ . \\ . \\ const, & \text{если } x < -2 \cdot N + e, const \neq 0 \end{cases} \tag{26}$$

Из уравнения следует что функция $g'_{nfp}(x)$ принадлежит множеству $FP^{(1)}$, но так как константа $const \neq 0$, не принадлежит множеству $FS^{(1)}$. На интервале $(-(N + e), -N)$ функция $g'_{nfp}(x)$ равна линейной функции отличной от константы, следовательно данная функция не принадлежит множеству $PP^{(1)}$. Из лемма 12 следует что множество $(g'_{nc}, g'_{nfp} \cup L)$ порождает множество $FP^{(1)}$. Из лемма 9 следует что имея все множество $FP^{(1)}$ и функцию $g_{nfp}(x) \notin FP^{(1)}$, можно получить все множество $PL^{(1)}$. Лемма доказана. $\square$

Следствие 9. *Класс $FP^{(1)}$ и класс $CPL^{(1)}$ является максимальными собственными 1-следами класса $PL^{(1)}$ и других таких классов не существует.*

5. Основная теорема решетки 1-следов замкнутых классов кусочно-линейных функций

Рассмотрим граф G_1:



Решетка 1-следов

где вершинами графа являются соответствующие 1-следы замкнутых классов, а направленное ребро из вершины A в вершину B означает, что B является максимальным собственным подмножеством 1-следа A. Тогда верна следующая теорема.

Теорема 1. *Граф G_1 описывает полную решетку 1-следов замкнутых классов кусочно-линейных функций.*

Доказательство. Доказательство данной теоремы вытекает из лемм $1-$ 15 и следствий $1-9$. □

6. Заключение.

В данной статье была описана решетка 1-следов замкнутых классов кусочно-линейных функций. Дальнейшей задачей станет описание решетки 2-следов в этом классе. А также для каждого множества из решетки 1-следов найти все замкнутые классы проекция на одноместные функции которых совпадает с данным множеством.

Автор выражает искреннюю признательность А. А. Часовских за постановку задачи, обсуждение результатов, советы и замечания.

Список литературы

[1] В. С. Половников, *Об оптимизации структурной реализации нейронных сетей*, диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-матем. наук, Москва, 2007.

[2] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин, *Введение в теорию автоматов*, Наука, Москва, 1985, 320 pp.

[3] А. Н. Кан, “Вопросы выразимости в классе нейронных функций”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **19**:1 (2015), 15–21

[4] А. Н. Кан, “Вопросы полноты в классе кусочно-линейных непрерывных функций”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21**:4 (2017), 46–56

[5] А. Н. Кан, “Вопросы выразимости в классе согласованных функций”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:2 (2019), 125–133

[6] П. П. Степанов, “Искусственные нейронные сети”, *Молодой учёный*, **138**:4 (2017), 185–187

The lattice of 1-traces of closed classes of piecewise linear functions

Kan A.N.

In the present paper, we find the lattice of 1-traces of closed classes of piecewise linear functions.

Key words: piecewise linear functions, continuous piecewise linear functions, finite-parallel functions, continuous finite-parallel functions, continuous finite linear functions, piecewise parallel functions, finite linear functions, parallel finite linear functions, 1-trace lattice, Heaviside function, 2-precomplete class.