# A-полнота систем с добавками в классе линейных автоматов над кольцом двоично-рациональных чисел

Ронжин Д.В.

Представлено краткое изложение результатов, полученных при исследовании проблемы $A$-полноты систем линейных автоматов, функционирующих над кольцом двоично-рациональных чисел. Описаны условия $A$-полноты систем, содержащих все одноместные линейные автоматы и конечную добавку, а так же конечных систем, содержащих сумматор.

**Ключевые слова:** конечные автоматы,линейные автоматы, двоично-рациональные числа, A-полнота, предполный класс.

## 1. Введение

При исследовании задачи полноты систем конечных автоматов[1], нередко рассматривается вопрос об $A$-полноте[2] этих систем, а также задача полноты систем, содержащих добавки[3]. Интересным для изучения подклассом конечных автоматов являются линейные автоматы[4, 5], для которого описаны условия полноты конечных систем в терминах предполных классов.

Настоящая работа посвящена исследованию задачи $A$-полноты линейных автоматов, алфавиты состояний, входные и выходные алфавиты которых являются декартовыми произведениями множества двоично-рациональных чисел. Рассматриваются системы содержащие все одноместные линейные автоматы и конечную добавку, а также конечные системы, содержащие сумматор. Функции переходов и выходов автоматов в настоящей работе считаются линейными над кольцом двоично-рациональных чисел.

В отличие от случая автоматов над полем рациональных чисел[6], исследуемое в настоящей работе множество автоматов имеет конечный базис по операциям композиции [1], что приводит к задаче $A$-полноты конечных систем. В настоящей работе сформулированы полученные условия $A$-полноты в терминах предполных классов.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим кольцо двоично-рациональных чисел, которое является подкольцом в поле рациональных чисел:

$$\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}} = \left\{ \tfrac{m}{2^n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

Для обозначения того, что некоторая переменная $i$ пробегает подмножество натуральных чисел $\{1, 2, ..., k\}$ будем использовать запись $i \in [1, k]$. $\forall l, k \in \mathbb{N}$ будем рассматривать конечные автоматы[1] с входным алфавитом $\mathbb{Q}^l_{\frac{m}{2^n}}$, выходным алфавитом $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$ и алфавитом состояний $\mathbb{Q}^k_{\frac{m}{2^n}}$, функции переходов и выходов являются линейными[4, 5]. Данное множество будем называть множеством линейных автоматом над кольцом двоично-рациональных чисел, и обозначим $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$[6].
Заметим, что множество $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ имеет конечный базис по операциям композиции[1], а именно:

$$\mathbf{B} = \{V_{\bigoplus}(x, y), V_{\cdot(-\frac{1}{2})}(x), \xi_1(x)\}, \text{ где}$$

1) $V_{\bigoplus}(x, y)$ - сумматор с двумя входами в каждый такт,

2) $V_{\cdot(-\frac{1}{2})}(x)$ - умножитель на чило $-\frac{1}{2}$ в каждый такт,

3) $\xi_1(x)$ - задержка с единичным начальным состоянием.

Определим множество формальных степенных рядов над $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$:

$$\mathbb{Q}^{\infty}_{\frac{m}{2^n}}(\xi) = \left\{ \alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \xi^i \mid a_i \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}} \right\}$$

Сложение и умножение элементов из $\mathbb{Q}^{\infty}_{\frac{m}{2^n}}(\xi)$ определется покомпонентно, аналогично операциям над элементами $\mathbb{Q}^{\infty}_{\xi}$ [6].
Аналогично [6] будем называть элемент $\beta^{-1}(\xi) \in \mathbb{Q}^{\infty}_{\frac{m}{2^n}}(\xi)$ обратным к $\beta(\xi) \in \mathbb{Q}^{\infty}_{\frac{m}{2^n}}(\xi)$ если выполняется следующее соотношение:

$$\beta(\xi) \cdot \beta^{-1}(\xi) = 1$$

Несложно видеть, что обратимыми будут являться ряды, свободный коэффициент которых является обратимым элементом в $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$ (а именно - степенью двойки), то есть:

$$\forall \beta(\xi) \in \mathbb{Q}^{\infty}_{\frac{m}{2^n}}(\xi), \exists \beta^{-1}(\xi) \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \beta(0) = 2^k$$

Кольцо многочленов над $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$ будем обозначать $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}[\xi]$, а для обозначения того, что многочлены $P(\xi), Q(\xi) \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}[\xi]$ взаимно просты будем использовать запись $\gcd\left(P\left(\xi\right), Q\left(\xi\right)\right) = 1$.

Аналогично $\mathbf{R}(\mathbb{Q})$[6] определим множество дробно-рациональных функций от переменной $\xi$ с коэффициентами из $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$ следующим образом:

$$\mathbf{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}) = \left\{ \tfrac{P(\xi)}{Q(\xi)} \mid P(\xi), Q(\xi) \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}[\xi], Q(0) = 1, \gcd\left(P(\xi),\ Q(\xi)\right) = 1 \right\}$$

Можно заметить, что $\mathbf{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ является подкольцом в кольце $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}$.

Приведем формулировки следующих лемм без доказательств, поскольку они аналогичны доказательствам в работе[6]:

**Лемма 1.** $\forall V(x_1, ..., x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}), \exists R_0, R_1, ..., R_l \in \boldsymbol{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$, *такие что:*

$$V(x_1, ..., x_l) = R_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{l} R_i \cdot x_i.$$

**Лемма 2.** $\forall V(x_1, ..., x_l) \colon (\mathbb{Q}^{\infty}_{\frac{m}{2^n}})^l \ \to \mathbb{Q}^{\infty}_{\frac{m}{2^n}}$, *такого что:*

$$\begin{gathered} V(x_1, ..., x_l) = R_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{l} R_i \cdot x_i \\ R_i \in \boldsymbol{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}), i \in [0, l] \end{gathered}$$

*верно, что* $V(x_1, ..., x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$.

Множители $R_k$ будем называть коэффициентами отображения.

В настоящей работе, без ограничения общности, не будем различать автоматы из $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ и отображения, которые они реализуют.

Рассмотрим задачу $A$-полноты[2] системы линейных автоматов в $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$. Система линейных автоматов $M$ будет называться $A$-полной, если $\forall V \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ и $\forall \tau \in \mathbb{N}$, в $K(M)$ существует автомат $V'$, совпадающий с автоматом $V$ на словах длины $\tau$. $A$ - замыкание системы $M$ будем обозначать через $A(M)$.

## 3. Вспомогательные обозначения

Для любого $R \in \mathbf{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$, через $R(t)$ будем обозначать коэффициент ряда при $\xi^t$.

$\forall a \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}, \forall b \in \mathbb{Z}$, будем говорить что $a \vdots b$, в случае если числитель числа $a$ кратен $b$ как целое число.

Определим несколько вспомогательных классов, о которых далее будут сформулированы утверждения.

1) Зафиксируем конечное множество $\mathbf{P}$ простых чисел, отличных от двойки:

$$\mathbf{P} = \{p_i | p_i \neq 2 \text{ - простое число, } i \in [1, k]\}.$$

Будем говорить, что автомат $V \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$, такой что:

$$V(x_1, .., x_l) = R_0 + \sum_{i=1}^{l} R_i \cdot x_i$$
$$\forall i \in [0, l], R_i \in \mathbf{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$$

обладает $\mathbf{P}$-свойством, если с точностью до переименования входов автомата $V$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

а) $\exists i \in [1, k] : R_j(0) \vdots p_i, \forall j \in [1, l]$

б) $R_j(0) \vdots p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k, \forall j \in [2, l]$

Очевидно, что все константные и одноместные автоматы обладают $\mathbf{P}$-свойством.

Определим множество $V_{\mathbf{P}}$ следующим образом:

$$V_{\mathbf{P}} = \{V \ | V \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}), V - \text{ обладает } \mathbf{P} \text{ - свойством } \}$$

2) Будем говорить, что автомат $V(x_1, ..., x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$, который реализует отображение:

$$V(x_1, .., x_l) = R_0 + \sum_{i=1}^{l} R_i \cdot x_i$$
$$\forall i \in [0, l], R_i \in \mathbf{R}(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$$

обладает **D**-свойством, если с точностью до переименования входов автомата $V$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

а) $l \leq 1$

б) $\exists p > 2$ - простое : $R_i(0) \vdots p$;

Определим класс $D$ следующим образом:

$$D = \{V \ |V \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}), V - \text{ обладает } \mathbf{D} \text{ - свойством } \}$$

3) $\forall p > 2$, где $p$ - простое число, определим класс $M_p$ следующим образом:

$$M_p = \Big\{ V(x_1, .., x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}) | V(x_1, .., x_l) = R_0(\xi) + \textstyle\sum_{i=1}^{l} R_i(\xi) \cdot x_i, \\ R_i(1) \vdots p, \forall i \in [1, l] \Big\}$$

4) $\forall p > 2$, где $p$ - простое число, определим класс $T_p$ следующим образом:

$$T_p = \Big\{ V(x_1, .., x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}) | V(x_1, .., x_l) = R_0(\xi) + \textstyle\sum_{i=1}^{l} R_i(\xi) \cdot x_i, \\ R_0(0) \vdots p \Big\}$$

5) Определим класс $T_{int}$ следующим образом:

$$T_{int} = \Big\{ V(x_1, .., x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}) | V(x_1, .., x_l) = R_0(\xi) + \textstyle\sum_{i=1}^{l} R_i(\xi) \cdot x_i, \\ R_i(0) \in \mathbb{Z}, \forall i \in [1, l] \Big\}$$

6) Определим класс $T_{\geq 0}$ следующим образом:

$$T_{\geq 0} = \Big\{ V(x_1, .., x_l) \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}) | V(x_1, .., x_l) = R_0(\xi) + \textstyle\sum_{i=1}^{l} R_i(\xi) \cdot x_i, \\ R_i(0) \geq 0, \forall i \in [1, l] \Big\}$$

## 4. Основные результаты

Множество линейных автоматов из $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ арности $\leq 1$ обозначим $V^1$. Далее приводятся основные результаты без доказательства.

**Лемма 3.** $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \boldsymbol{P} = \{p_i | p_i \neq 2$ *- простое число,* $i \in [1,k]\}$, $\forall$ *простого* $p > 2$, *верно что:*

$V_{\boldsymbol{P}}$, $D$, $M_p$, $T_p$, $T_{int}$, $T_{\geq 0}$ *— A-предполные классы.*

**Лемма 4.** *Пусть* $M \subset L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ *- конечная система.Если*$\forall \boldsymbol{P}$ *- конечного подмножества простых чисел, не содержащего двойку* $M \not\subseteq V_{\boldsymbol{P}}$, *то* $M \not\subseteq D$.

**Теорема 1.** *Пусть* $M \subset L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ *- конечная система.Если* $\forall \boldsymbol{P}$ *- конечного подмножества простых чисел, не содержащего двойку* $M \not\subseteq V_{\boldsymbol{P}}$, *то* $A(M \cup V^1) = L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$.

**Теорема 2.** *Пусть* $M \subset L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ *- конечная система. Если* $\forall p > 2$ *- простого, выполняется:*

$$M \not\subseteq T_p, M_p, T_{int}, T_{\geq 0},$$

*то* $A(M \cup \{V_{\bigoplus}(x,y)\}) = L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$.

Автор выражает признательность своему научному руководителю, доценту кафедры МаТИС механико-математического факультета МГУ, к.ф.-м.н., Часовских Анатолию Александровичу, за постановку задачи и помощь в проведении исследования.

## Список литературы

[1] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., *Введение в теорию автоматов*, НАУКА, Москва, 1985, 320 с.

[2] Буевич В.А., “О полноте, А-полноте и t-полноте в классе автоматных отображений”, *Интеллектуальные системы*, **10**:1-4 (2006), 613–638

[3] Бабин Д.Н., Летуновский А.А., “О возможностях суперпозиции, при наличии в базисе автоматов фиксированной добавки из булевых функций и задержки”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **19**:3 (2015), 15–22

[4] Часовских А.А., “Проблема полноты для класса линейно-автоматных функций”, *Дискретная математика*, **27**:2 (2015), 134–151

[5] Chasovskikh A.A., “Completeness problem for the class of linear automata functions”, *Discrete Mathematics and Applications*, **26**:2 (2016), 89–104

[6] Ронжин Д.В., “Линейные автоматы над полем рациональных чисел”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21**:4 (2017), 144–155

## A-completeness of systems with additives of linear automata over the ring of dyadic rationals

**Ronzhin D.V.**

A brief description of results of A-completeness problem for linear finite state automata, functioning over the ring of dyadic rationals is given. Conditions of A-completeness for systems, containing all one-valued linear automata with finite additive and finite systems with a summing automaton are stated.

*Keywords:* finite state automata, linear automata, dyadic rationals, A-completeness, maximum subclasses.