О функциональной системе полиномов с рациональными коэффициентами

Алексиадис Н.Ф.

[1]В настоящей статье исследуется проблема полноты для полиномиальных функций с рациональными коэффициентами, а также задачи функционального характера, порожденные ее решением, а именно: изучение структуры замкнутых и предполных классов, задача о базисах полных систем[2]. В частности, доказано, что

1) система функций является полной тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном предполном классе;

2) мощность множества всех предполных классов равна континууму.

3) существует полная система, не имеющая базиса.

Ключевые слова: полином, функциональная система, проблема полноты, рациональная функция, замкнутые классы.

1. Предварительные сведения

С целью полноты изложения и независимости материала приведем некоторые сведения из теории функциональных систем, необходимые для дальнейшего изложения[3]. При изложении материала в основном используется терминология книг [4] и [5].

Пусть G – некоторое (конечное или бесконечное) множество, содержащее не менее двух элементов.

Обозначим через F_G множество всех функций $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, переменные которых определены на множестве G и сами функции принимают значения из этого же множества G. Предполагается, что множество

[1]aleksiadis@yandex.ru

[2]Ранее автором было исследовано функциональные системы полиномов с натуральными и целыми коэффициентами (см. [1] - [2])

[3]Читатели, знакомые с основными понятиями теории функциональных систем, могут пропустить этот раздел.

F_G содержит и все функции от нулевого числа переменных, т.е. функции, являющиеся просто элементами (константами) множества G.

Пусть $F_G^{(n)}$ множество всех n-местных функций из F_G $(n = 0, 1, 2, ...)$.

Очевидно, что $F_G^{(0)} = G$ и $F_G = \cup_{n=0}^{\infty} F_G^{(n)}$.

Говорят, что *функция* $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ *существенно зависит от переменной* x_i, если существуют такие два набора

$$(c_1, ..., c_{i-1}, a, c_{i+1}, ..., c_n) \text{ и } (c_1, ..., c_{i-1}, b, c_{i+1}, ..., c_n)$$

значений переменных $x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n$, что

$$f(c_1, ..., c_{i-1}, a, c_{i+1}, ..., c_n) \neq f(c_1, ..., c_{i-1}, a, b_{i+1}, ..., c_n).$$

В этом случае мы говорим, что x_i является *существенной переменной функции* $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$.

Если x_i не является существенной переменной $f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$, то она называется *фиктивной переменной функции* $f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$.

Пусть $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ и $g(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ две произвольные функции из F_G и пусть x_i фиктивная переменная функции $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$. Если для любых $c_1, ..., c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, ..., c_n$ значений переменных $x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n$ имеем

$$f(c_1, ..., c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, ..., c_n) = g(c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n),$$

то говорят, что функция $g(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ получается из функции $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ *удалением (изъятием) фиктивной переменной* x_i и, наоборот, функция $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ получена из функции $g(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ *добавлением фиктивной переменной* x_i.

Две функции называются *равными*, если одна из них может быть получена из другой путем добавления или изъятия некоторых фиктивных переменных.

Замечание 1. *В дальнейшем будем считать, что вместе с функцией f заданы и все равные ей функции, т.е. функции рассматриваем с точностью до фиктивных переменных.*

Замечание 2. *Если дана конечная система функций $f_1, f_2, ..., f_m$ (где $m \geq 1$), то можно считать, что все они зависят от одних и тех же переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, т.е. имеют вид*

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Замечание 3. *Если дана функция, отличная от константы, то путем отождествления переменных из нее можно получить равную ей функцию, все переменные которой являются существенными.*

Алгебра $\mathbf{F}_G = (F_G, O)$, где F_G – некоторое множество функций (не обязательно все) из G в G, а O – некоторое множество операций, при этом эти операции замкнуты относительно множества F_G, называется *функциональной системой* (*ф.с.*) $\mathbf{F}_G$.

Для произвольного подмножества M множества F_G обозначим через $I_O(M)$ множество всех функций из F_G, которые получаются из M с помощью конечного числа применения операций из O. Множество $I_O(M)$ называется *замыканием множества* M.

С замыканием множества естественным образом можно связать оператор замыкания.

Оператор, переводящий произвольное подмножество M множества F_G на множество $I_O(M)$, называется *оператором замыкания* (*относительно операций из* O) и обозначается через I_O (или через $[\,]$, если множество операций O известно и из контекста понятно о каких операциях идет речь, т.е. вместо $I_O(M)$ пишем $[M]$).

Легко заметить, что для любых подмножеств M, M_1, M_2 множества F_G :

- $M \subseteq I_O(M)$;
- $I_O(I_O(M)) = M$;
- Если $M_1 \subseteq M_2$, то $I_O(M_1) \subseteq I_O(M_2)$.

Множество $M (M \subseteq F_G)$ называется (*функционально*) *замкнутым*, если $I_O(M) = M$.

Замкнутое множество принято называть *замкнутым классом.*

Ясно, что

- $I_O(M)$ *является замкнутым классом* $(\forall M \subseteq F_G)$;
- *пустое множество является замкнутым классом*;
- *ножество* F_G *также является замкнутым классом.*

Пусть V – произвольное подмножество множества G. Обозначим через $U(V)$ множество всех таких функций $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ из F_G, что

$$f(c_1, c_2, ..., c_n) \in V, \text{ если } c_1, c_2, ..., c_n \in V.$$

В этом случае $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *функцией, сохраняющей множество* V, а $U(V)$ – *классом, сохраняющим множество* V.

Замечание 4. *Легко заметить, что для любого непустого собственного подмножества* V *множества* G *(т.е.* $V \neq \varnothing$ *и* $V \neq F_G$*) выполнено:*

- $U(V) \neq \varnothing$;
- $U(V) \neq F_G$;
- $V \subseteq U(V)$;
- $I_O(U(V)) = U(V)$;
- $U^{(0)}(V) = V$, *где* $U^{(0)}(V)$ *– множество всех нульместных функций, т.е. констант из* $U(V)$.

Более того, для любых двух подмножеств V_1 *и* V_2 *множества* G *выполнено:*

$U(V_1) \neq U(V_2)$, *если* $V_1 \neq V_2$.

Подмножество M множества F_G называется (*функционально*) *полным* в $\mathbf{F}_G$, если $I_O(M) = F_G$.

Полное множество принято называть *полной системой*.

Из замечания (4) следует справедливость следующего утверждения. Если множество $M(M \subseteq G)$ содержит полную систему в F_G, то M также является полной системой в F_G.

Система функций $B(B \subseteq F_G)$ называется *базисом ф.с.* $\mathbf{F}_G$, если B полна в $\mathbf{F}_G$, но всякая ее собственная подсистема не является полной в $\mathbf{F}_G$.

Подмножество M множества F_G называется *предполным* (*максимальным*) *классом в* $\mathbf{F}_G$, если $I_O(M) \neq F_G$, но для любой функции f из $F_G \setminus M$ выполнено $I_O(M \cup \{f\}) = F_G$.

Очевидно, что *предполный класс является замкнутым классом.*

Замечание 5. *Отметим, что для доказательства предполноты в* $\mathbf{F}_N$ *множества* $M(M \subseteq F_G)$ *нужно показать, что*

- $M \neq \varnothing$ *и* $M \neq F_G$;
- M *замкнутый класс;*
- *для любого* f *из* $F_G \setminus M$ *система* $M \cup \{f\}$ *полна в* F_G.

Если T произвольный замкнутый класс в $\mathbf{F}_G$, то аналогичным образом определяются замкнутый класс в T, предполный класс в T, полная система в T и базис множества T.

Система K замкнутых подмножеств множества F_G называется *критериальной системой в* $\mathbf{F}_G$, если любое множество $M(M \subseteq F_G)$ является полным в $\mathbf{F}_G$ тогда и только тогда, когда оно целиком не содержится ни в одном классе системы K.

В ф.с. $\mathbf{F}_G$ критериальной системой является, например, множество всех замкнутых классов, отличных от всего F_G. В общем случае последняя критериальная система является "избыточной". Это позволяет перейти к рассмотрению более "экономных" критериальных систем и с этой точки зрения может быть уточнено строение критериальной системы.

Критериальная система называется *приведенной*, если она не содержит собственных подсистем, являющихся критериальными.

Замечание 6. *Следует отметить, что в функциональной системе* $\mathbf{F}_G$ *приведенная система, если она существует, определяется однозначно и состоит из всех предполных классов в* F_G *(см. [4].)*

Замкнутый класс $T(T \subseteq F_G)$ называется *конечно-порожденным*, если в T существует конечная полная система.

Функциональная система $\mathbf{F}_G$ является конечно-порожденной, если F_G конечно-порожденный класс.

$\mathbf{F}_G$ называется *функциональной системой счетной мощности*, если F_G счетное множество.

В ф.с. $\mathbf{F}_G$ множество $M(M \subseteq F_G)$ называется полной системой относительно множества D, если $D \subseteq M$ и M полная система в $\mathbf{F}_G$.

И, наконец, приведем одно (нужное в дальнейшем) утверждение.

Если в функциональной системе каждый замкнутый класс содержится в некотором предполном классе, то множество всех предполных классов образует (приведенную) критериальную систему (см.[3]).

2. Постановка задачи

Одной из основных проблем в теории функциональных систем является *проблема полноты, состоящая в описании всех подмножеств данного множества* F_G*, которые являются полными в* $\mathbf{F}_G$.

В теории функциональных систем выделяют два подхода к решению проблемы полноты: алгоритмический и алгебраический. В первом случае ставится вопрос о существовании алгоритма, устанавливающего полноту или неполноту заданных систем функций. Во втором случае задача заключается в получении критериев (т.е. необходимых и достаточных условий) полноты.

Изучение проблемы полноты осуществлялось путем исследования конкретных функциональных систем. Во многих этих конкретных системах решение проблемы полноты было сведено к описанию всех предполных классов в ней, суть которого заключается в следующем: данная система функций является полной тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из предполных классов. Исторически сложилось так, что метод решения проблемы полноты в терминах предполных классов стал одним из основных для функциональных систем.

Целью настоящей работы является исследование проблемы полноты для функциональной системы полиномов с рациональными коэффициентами[4]; более подробно, решение следующего круга задач.

1) *Полнота систем функций*:
   - *является ли множество всех предполных классов критериальной системой*?
   - *найти число предполных классов*;
   - *найти предполные классы (по возможности).*

2) *Задача о базисах*:
   - *имеет ли базис каждая полная система*?
   - *мощность базисов.*

3. Определение функциональной системы полиномов с рациональными коэффициентами

В этом разделе мы приводим определение функциональной системы полиномиальных функций с рациональными коэффициентами. Но сначала несколько стандартных обозначений.

N – множество всех натуральных чисел (включая число 0).

Z – множество всех целых чисел.

Q – множество всех рациональных чисел.

[4]Определение этой системы см. ниже в разделе 1.3.

$|A|$ – мощность множества A.
c_0 – мощность счетного множества.
c – мощность континуума.
$\equiv$ – обозначим, по определению, тождественно равно.
Для удобства изложения полагаем, что $0^0 = 1$.
$\square$ – квадрат будет обозначать "конец доказательства".

Выражение вида $cx_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$, где $n, k_1, k_2, ..., k_n \in N$, а $c \in Q$ называется *мономом с рациональным коэффициентом*, зависящим от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$; при этом, когда $n = 0$, тогда заданный моном является просто константой c, т.е. мономом с рациональным коэффициентом, зависящим от 0-го числа переменных.

Конечная сумма мономов с рациональным коэффициентами называется *полиномом с рациональным коэффициентом.*

Обозначим через $P_Q^{(n)}(n = 0, 1, 2, ...)$ множество всех функций из Q^n в Q, задаваемых полиномами с рациональными коэффициентами и зависящих от n переменных, а через P_Q множество всех функций, задаваемых полиномами с рациональными коэффициентами, т.е. $P_Q = \cup_{n=0}^{\infty} P_Q^{(n)}$. Эти функции назовем *полиномиальными функциями с рациональными коэффициентами* или просто *рп-функциями*[5].

Замечание 7. *Для простоты вместо фраз "функция задаваемая полиномом" и "полиномиальная функция"мы будем употреблять просто "полином", т.е. мы отождествляем формулу и функцию, задаваемую этой формулой.*

В качестве множества операций O мы рассматриваем операции суперпозиции. Операции суперпозиции включают в себя:

- перестановку переменных;
- отождествления переменных;
- переименования переменных (без отождествления);
- введение фиктивной переменной;
- удаление фиктивной переменной;
- подстановку одной функции в другую.

[5]Символы 'p' и 'n' – это первые буквы соответственно слов "рациональный" и "полином".

Поскольку любая суперпозиция функций из P_Q является опять функцией из P_Q, то мы вправе рассмотреть пару (P_Q, O), где O – множество операций суперпозиции над полиномиальными функциями из P_Q; эта пара является функциональной системой, которую мы назовем *функциональной системой полиномиальных функций с рациональными коэффициентами* и обозначим ее через $\mathbf{F}_Q$.

Теорема 1. *$\mathbf{F}_Q$ является функциональной системой счетной мощности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это следует из того, что существует всего счетное число полиномов с рациональными коэффициентами. □

Теорема 2. *В функциональной системе $\mathbf{F}_Q$ система функций*

$$B = \{x - y, xy, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{p}, ...\},$$

где p – любое простое число, является полной системой; более того она является и базисом ф.с. $\mathbf{F}_Q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $f(x, y) \equiv x-y$ и $g(x, y) \equiv xy$.

Сначала получим все константы из $P_Q^{(0)}$. Имеем

$$f(x, x) = 0; h_1(x) \equiv f(0, x) = -x;$$

$$h_2(x, y) \equiv f(x, h_1(y)) = x + y; h_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1,$$

$$h_2(1, 1) = 2, h_2(1, 2) = 3, h_2(1, 3) = 4, ...$$

$$h_1(1) = -1, h_1(2) = -2, h_1(3) = -3, ...$$

Следовательно, мы имеем все целые числа.

Далее, пусть c – произвольное число из Q, отличное от 0 и 1; тогда c можно представить в виде $c = \frac{m}{n}$, где m – некоторое целое число, отличное от 0, а n – некоторое целое положительное число, больше 1 и пусть $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r}$, где $p_1, p_2, ..., p_r$ – некоторые простые числа, а $r, k_1, k_2, ..., k_r$ – некоторые целые положительные числа.

Очевидно, что

$$g(\frac{1}{p_i}, \frac{1}{p_i}) = \frac{1}{p_i^2}, g(\frac{1}{p_i}, \frac{1}{p_i^2}) = \frac{1}{p_i^3}, ..., g(\frac{1}{p_i}, \frac{1}{p_1^{k_i-1}}) = \frac{1}{p_1^{k_i}}, (i = 1, 2, ..., r);$$

$$g(\frac{1}{p_1^{k_1}},\frac{1}{p_2^{k_2}})=\frac{1}{p_1^{k_1}p_2^{k_2}},g(\frac{1}{p_1^{k_1}p_2^{k_2}},\frac{1}{p_3^{k_3}})=\frac{1}{p_1^{k_1}p_2^{k_2}p_3^{k_3}},...,g(\frac{1}{p_1^{k_1}\cdot...\cdot p_{r-1}^{k_{r-1}}},\frac{1}{p_r^{k_r}})=$$

$$=\frac{1}{p_1^{k_1}\cdot...\cdot p_{r-1}^{k_{r-1}}p_r^{k_r}}=\frac{1}{n}.$$

Рассмотрим два случая.

1. $m>0$. Тогда имеем

$$h_2(\frac{1}{n},\frac{1}{n})=\frac{2}{n},h_2(\frac{2}{n},\frac{1}{n})=\frac{3}{n},\cdot...\cdot h_2(\frac{m-1}{n},\frac{1}{n})=\frac{m}{n}.$$

2. $m<0$. Тогда $-m>0$ b строим число $\frac{-m}{n}$ так, как это сделано в случае (1). Далее, имеем

$$h_1(\frac{-m}{n})=-\frac{-m}{n}=\frac{m}{n}.$$

Итак, $[B]\supseteq Q$.

Теперь построим все мономы с рациональными коэффициентами, отличные от константы, т.е. рп-функции вида $cx_1^{k_1}x_2^{k}...x_n^{k_n}$ где c - произвольное рациональное число, отличное от нуля, n - произвольное положительное целое число, а $k_1,k_2,...,k_n$ – произвольные натуральные числа, при этом $k_1+k_2+...+k_n\neq 0$ (т.е. имеем хотя бы одну существенную переменную). Очевидно, что из функции $g(x,y)$ и константы 1 с помощью операций суперпозиции можно получить любой моном вида $x_1^{k_1}x_2^{k}...x_n^{k_n}$ (в том числе и тождественную функцию $f(x)=x$). Далее, подставляя в функцию $g(x,y)$ вместо x константу c, а вместо y – моном $x_1^{k_1}x_2^{k}...x_n^{k_n}$, мы получим рп-моном $cx_1^{k_1}x_2^{k}...x_n^{k_n}$.

Ясно, что из функции $f(x,y)$ с помощью операций суперпозиции можно получить любую линейную функцию вида $x_1+x_2+...+x_m (m\geq 2)$.

Далее, поскольку любой рп-полином является конечной суммой рп-мономов, то, если в подходящей линейной функции вида $x_1+x_2+...+x_m$ вместо ее переменных подставим соответствующие рп-мономы, то получим желаемую рп-полином из P_Q.

Таким образом, из функций множества B с помощью операций суперпозиции можно получить все функции из P_Q, поэтому $[B]\supseteq P_Q$. Но, с другой стороны, поскольку $B\subset P_Q$, то в силу свойства оператора замыкания $[B]\subseteq P_Q$. Следовательно, $[B]=P_Q$, т.е. B является полной системой в $\mathbf{F}_Q$.

Далее, докажем, что полная система B является и базисом ф.с. $\mathbf{F}_Q$.

Если из B выбросить функцию $x-y$, то получим собственную подсистему $B_- = \{xy, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{p}, ...\}$, состоящую только из рп-мономов и, следовательно, из ее функций с помощью операций суперпозиции можно получить только рп-мономи, поэтому $[B] \neq P_Q$.

Если из B выбросить функцию xy, то получим собственную подсистему $B_* = \{x-y, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{p}, ...\}$, состоящую только из линейных рп-полиномов и, следовательно, из ее функций с помощью операций суперпозиции можно получить только линейные рп-полиномы, поэтому $[B] \neq P_Q$.

Легко заметить, что если из B выбросить константу $\frac{1}{p}$, где p – любое простое число, то из полученной собственной подсистемы с помощью операций суперпозиции невозможно получить все рп-полиномы, в частности константу $\frac{1}{p}$, поэтому $[B] \neq P_Q$.

Если из B выбросить более одной функции, то ясно, что полученная собственная подсистема системы B не является полной в $\mathbf{F}_Q$.

Итак, ни одна собственная подсистема полной системы B не является полной в $\mathbf{F}_Q$; это означает, что B является базисом ф.с. $\mathbf{F}_Q$. $\square$

Ф.с. $\mathbf{F}_Q$ является конечно-порожденной.

4. Замкнутые и предполные классы

Теорема 3. *В ф.с. $\mathbf{F}_Q$ существуют только следующие конечные замкнутые классы:*

- *C, где C - произвольное конечное подмножество множества $F_Q^{(0)}$;*
- *$I_1 = \{x\}, I_2 = \{x; -x\}$;*
- *$C \cup I_1, \{\pm c_1, \cdots, \pm c_k\} \cup I_2$, где $\pm c_1, \cdots, \pm c_k \in Q$, а C, I_1 и I_2 определяются соответственно в предыдущих пунктах.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что каждое из перечисленных множеств является конечным замкнутым классом в $\mathbf{F}_Q$. Покажем, что в $\mathbf{F}_Q$ не существует других конечных замкнутых классов, отличных от перечисленных. Для этого достаточно доказать, что если замкнутый класс M содержит рп-функцию $f(x_1, ..., x_n)$, отличную от константы, $g(x) = x$ и $h(x) = -x$, то он содержит бесконечное число попарно различных рп-функций.

Пусть M содержит рп-функцию $f(x_1, ..., x_n)$. Поскольку $f(x_1, ..., x_n)$ отлична от константы, то она имеет существенную переменную; не ограничивая общность, можно считать, что существенными переменными функции $f(x_1, ..., x_n)$ являются переменные $x_1, ..., x_n$ $(n \geq 1)$.

Далее, возможны два случая:

1. $n = 1$, т.е. f имеет одну существенную переменную.

Так как функция f отлична от $g(x)$ и $h(x)$, то очевидно, что последовательность функций

$$f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), ...$$

состоит из попарно различных функций и все они принадлежат множеству M (поскольку M - замкнутый класс).

2. $n \geq 2$, т.е. f имеет более одной существенной переменной.

Тогда очевидно, что если в функции $f(x_1, ..., x_n)$ на место переменной x_1 подставим функцию $f(y_1, ..., y_n)$ (где $\{y_1, ..., y_n\} \cap \{x_1, ..., x_n\} = \varnothing$), то получим функцию

$$f(f(y_1, ..., y_n), x_2 ..., x_n),$$

существенно зависящую от всех своих $2n - 1$ переменных; затем, если в функции $f(f(y_1, ..., y_n), x_2 ..., x_n)$ на место переменной y_1 подставим функцию $f(z_1, ..., z_n)$ (где $\{z_1, ..., z_n\} \cap \{y_1, ..., y_n, x_1, ..., x_n\} = \varnothing$), то получим функцию

$$f(f(f(z_1, ..., z_n), y_2, ..., y_n), x_2 ..., x_n),$$

существенно зависящую от всех своих $3n - 2$ переменных и т.д. Итак, имеем бесконечную последовательность функций

$$f(x_1, ..., x_n), f(f(y_1, ..., y_n), x_2 ..., x_n), f(f(f(z_1, ..., z_n), y_2, ..., y_n), x_2 ..., x_n), ...,$$

которая состоит из попарно различных функций (поскольку числа существенных переменных этих функций попарно различны) и все они принадлежат множеству M (т.к. M – замкнутый класс). Следовательно, M содержит бесконечное число попарно различных функций. $\square$

Замечание 8. *Заметим, что в функциональной системе* $\mathbf{F}_Q$

- *число всех конечных замкнутых классов равно* c_0;
- *число всех бесконечных замкнутых классов равно* c;
- *число всех замкнутых классов равно* c.

Замечание 9. *Что касается базисов замкнутых классов, то имеют место все три случая:*

- *в ф.с.* $\mathbf{F}_Q$ *существует замкнутый класс, имеющий конечный базис;*
- *в ф.с.* $\mathbf{F}_Q$ *существует замкнутый класс, имеющий бесконечный базис;*
- *в ф.с.* $\mathbf{F}_Q$ *существует замкнутый класс, не имеющий базиса.*

Чтобы убедиться в этом, достаточно привести примеры соответствующих замкнутых классов.

Пусть $M = \{2x, 4x, 8x, ..., 2^n x, ...\}$, где n – любое положительное целое число. Ясно, что множество M является замкнутым классом в $\mathbf{F}_Q$, а система $B = \{2x\}$ – его базисом. Следовательно, M замкнутый класс, имеющий конечный базис.

Пусть $M = \{x, 2x, 3x, ..., mx, ...\}$, где m – любое положительное целое число. Ясно, что множество M является замкнутым классом в $\mathbf{F}_Q$, а система $B = \{x, 2x, 3x, 5x, ..., px, ...\}$, где p – любое простое число, является его базисом. Следовательно, M замкнутый класс, имеющий бесконечный базис.

Пусть $M = I_O(T)$, где $T = \{1, x_1^2, x_1^2 x_2^2, x_1^2 x_2^2 x_3^2, ...\}$. Покажем, что замкнутый класс M не имеет базиса.

Очевидно, что M состоит из всех рп-полиномов вида 1 и $x_1^{2k_1} \cdot ... \cdot x_n^{2k_n}$, где n – любое положительное целое число, а $k_1, ..., k_n$ – любые натуральные числа.

Допустим, что класс M имеет базис; обозначим его через B. Ясно, что $1 \in B$ и B содержит функцию, отличную от константы 1; обозначим ее через $f_1(x_1, ..., x_{n_1})$, где $n_1 > 0$. Пусть число переменных, которые содержит эта функция во 2-ой степени, равно $m_1 (0 \leq m_1 \leq n_1)$; не ограничивая общность, можно считать, что этими переменными являются переменные $x_1, ..., x_{m_1}$. Следовательно, $f_1(x_1, ..., x_{n_1})$ имеет вид

$$f_1(x_1, ..., x_{n_1}) = x_1^2 ... x_{m_1}^2 x_{m_1+1}^{2k_{m_1+1}} ... x_{n_1}^{2k_{n_1}},$$

где $k_{m_1+1}, ..., k_{n_1}$ – некоторые натуральные числа отличные, от 0 и 1.

Очевидно, что из функций 1 и $f_1(x_1, ..., x_{n_1})$ с помощью операций суперпозиции невозможно получить функцию

$$g(x_1, ..., x_{m_1+1}) \equiv x_1^2 ... x_{m_1}^2 x_{m_1+1}^2.$$

Следовательно, B содержит функцию вида

$$f_2(x_1, ..., x_{n_2}) = x_1^2 ... x_{m_1}^2 x_{m_1+1}^2 ... x_{m_2}^2 x_{m_2}^{2l_{m_2+1}} ... x_{n_2}^{2l_{n_2}},$$

где n_2, m_2 – некоторые положительные целые числа, при этом $n_2 > n_1$ и $n_1 < m_2 \leq n_2$, а $l_{m_2+1}, ..., l_{n_2}$ – некоторые натуральные числа, отличные от 0 и 1.

Очевидно, что из функций $1, f_1(x_1, ..., x_{n_1})$ и $f_2(x_1, ..., x_{n_2})$ с помощью операций суперпозиции невозможно получить функцию

$$g(x_1, ..., x_{m_2+1}) \equiv x_1^2 ... x_{m_2}^2 x_{m_2+1}^2.$$

Следовательно, B содержит функцию вида

$$f_3(x_1, ..., x_{n_3}) = x_1^2 ... x_{m_2}^2 x_{m_2+1}^2 ... x_{m_3}^2 x_{m_3+1}^{2s_{m_2+1}} ... x_{n_3}^{2s_{n_3}},$$

где n_3, m_3 – некоторые положительные целые числа, при этом $n_3 > n_2$ и $n_2 < m_3 \leq n_3$, а $s_{m_3+1}, ..., s_{n_3}$ – некоторые натуральные числа, отличные от 0 и 1 и т.д.

Таким образом, B содержит бесконечное число попарно различных функций

$$1, f_1(x_1, ..., x_{n_l}), f_2(x_1, ..., x_{n_2}), f_3(x_1, ..., x_{n_3}), ...$$

Но, с другой стороны, если рассмотрим любую бесконечную подпоследовательность функций этой последовательности, содержащую константу 1, то очевидно, что из функций этой подпоследовательности с помощью операции суперпозиции можно получить все функции множества T, следовательно, и все функции замкнутого класса M. Следовательно, собственная подсистема базиса B является полной в M. Получили противоречие. Итак, замкнутый класс M не имеет базиса.

Замечание 10. *В функциональной системе* $\mathbf{F}_Q$

- *число всех замкнутых классов, имеющих конечный базис, равно* c_0;
- *число всех замкнутых классов, имеющих бесконечный базис, равно* c;
- *число всех замкнутых классов, не имеющих базиса, равно* c.

Пункты (1)–(2) очевидны. Чтобы убедиться в справедливости последнего пункта, достаточно заметить, что множество

$$M_T = [\{1, x_1^2, x_1^2 x_2^2, x_1^2 x_2^2 x_3^2, ...\} \cup T],$$

где T - произвольное бесконечное подмножество множества всех простых чисел, не имеет базиса и если $T_1 \neq T_2$, где T_1, T_2 – любые подмножества множества всех простых чисел, то $M_{T_1} \neq M_{T_2}$.

Рассмотрим некоторые конкретные замкнутые классы в $\mathbf{F}_Q$, которые являются предполными классами и тем самым играют важную роль при решении проблемы полноты.

Теорема 4. *Если W произвольное конечное подмножество множества Q, то класс $U(W)$ является предполным классом в функциональной системе $\mathbf{F}_Q$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $W = \{c_1, ..., c_m\}$, где $c_1, ..., c_m$ – константы из Q.

Ясно, что $U(W) \neq \varnothing, U(W) \neq P_Q$ и $I_Q(U(W)) = U(W)$.

Далее, пусть $f(x_1, ..., x_n) \in P_Q \setminus U(W)$; тогда для некоторых констант $c_{i_1}, ..., c_{i_m}$ из W и c из $Q \setminus W$ будет выполнено $f(c_{i_1}, ..., c_{i_m}) = c$.

Очевидно, что рп-полиномы

$$g_1(t, x, y) = \frac{(t - c_1) \cdot ... \cdot (t - c_m)}{(c - c_1) \cdot ... \cdot (c - c_m)} \cdot (x - y - c_1) + c_1,$$

$$g_2(t, x, y) = \frac{(t - c_1) \cdot ... \cdot (t - c_m)}{(c - c_1) \cdot ... \cdot (c - c_m)} \cdot (xy - c_1) + c_1,$$

$$g_3(t) = \frac{(t - c_1) \cdot ... \cdot (t - c_m)}{(c - c_1) \cdot ... \cdot (c - c_m)} \cdot (\frac{1}{p} - c_1) + c_1,$$

где p – произвольное простое число, принадлежать классу $U(W)$.

Следовательно, рп-полиномы

$$g_1(c, x, y) = x - y, g_2(c, x, y) = xy, g_3 = \frac{1}{p}$$

принадлежат классу $[U(W) \cup \{f(x_1, ..., x_n)\}]$; т.е. $[U(W) \cup \{f(x_1, ..., x_n)\}]$ содержит подсистему

$$B = \{x - y, xy, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{p}, ...\},$$

(p – любое простое число), которая является полной в $\mathbf{F}_Q$ (см. теорему (2)). Значит, $[U(W)\bigcup\{f(x_1,...,x_n)\}] = P_Q$). $\square$

Для любого положительного рационального числа c обозначим через $Qc+ \equiv \{q \in Q : q > c\}$ и $V_{c+} = U(Q_{c+})$.

Теорема 5. *Для любого рационального числа $c \geq 1$ множество V_{c+} является предполным классом в функциональной системе $\mathbf{F}_Q$.*

Доказательство. Очевидно, что $V_{c+} \neq \varnothing, [V_{c+}] = V_{c+}$ и $[V_{c+}] \neq P_Q$.

Очевидно также, что $f(x,y) = x+y, g(x,y) = xy, h(x) = 2x-c \in V_{c+}$.

Пусть $f(x_1,...,x_n) \in P_Q \setminus V_{c+}$. Тогда для некоторых констант $c_1,...,c_n$ из Q_{c+} и k из $Q \setminus Q_{c+}$ будет выполнено $f(c_1,...,c_n) = k$.

Так как $k \notin Q_{c+}$, то $k < c$; но тогда число $k_1 \equiv h(k) = 2k-c$, которое принадлежит классу $[V_{c+}\bigcup\{f(x_1,...,x_n)\}]$, меньше числа k; число $k_2 \equiv h(k_1) = 2k_1-c$, которое также принадлежит классу $[V_{c+}\bigcup\{f(x_1,...,x_n)\}]$, меньше числа k_1; число $k_3 \equiv h(k_2) = 2k_2-c$, которое принадлежит классу $[V_{c+}\bigcup\{f(x_1,...,x_n)\}]$, меньше числа k_2 и т.д. Через конечное число шагов мы получим некоторое отрицательное число, которое принадлежит классу $[V_{c+}\bigcup\{f(x_1,...,x_n)\}]$. Обозначим его через $-l$, где $l-$ некоторое положительное рациональное число.

Далее, числа

$$f(-l,-l),= -2l, f(-l,-2l) = -3l, f(-l,-3l) = -4l, ...$$

принадлежат классу $[V_{c+}\bigcup\{f(x_1,...,x_n)\}]$. Из этих чисел выбираем одно такое число, пусть этим числом является $-ml$, что ml и $ml-1$ принадлежат множеству W_{c+} (здесь $m-$ некоторое целое число). Тогда число $f(ml, ml-1) = -1$ принадлежит классу $[V_{c+}\bigcup\{f(x_1,...,x_n)\}]$.

Имеем

$$f(-1,-1) = -2, f(-1,-2) = -3, f(-1,-3) = -4, \ldots$$

также принадлежат классу $[V_{c+}\bigcup\{f(x_1,...,x_n)\}]$.

Следовательно, $[V_{c+}\bigcup\{f(x_1,...,x_n)\}]$ содержит все отрицательные числа.

Так как для любого простого числа p число $[c+1]+\frac{1}{p}$ больше c, т.е. $[c+1]+\frac{1}{p}$ принадлежит классу V_{c+} (здесь $[c+1]$ - целая часть числа $c+1$), а отрицательное число $-[c+1]$ принадлежит классу $[V_{c+}\bigcup\{f(x_1,...,x_n)\}]$, то число $f([c+1]+\frac{1}{p}, -[c+1]) = \frac{1}{p}$ принадлежит классу $[V_{c+}\bigcup\{f(x_1,...,x_n)\}]$. Более того, $g(-1,x) = -y$, и $f(x,-y) = x-y$.

Итак, $[V_{c+}\bigcup\{f(x_1,...,x_n)\}]$ содержит подсистему

$$B=\{x-y,xy,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{p},...\},$$

где $p-$ произвольное простое число, к которая является полной (теорема (2)).

Следовательно, множество V_{c+} является предполным классом в функциональной системе $\mathbf{F}_Q$. □

Для любого отрицательного целого числа c обозначим через $Q_{c-}\equiv\{q\in Q:q\leq c\}$ и $V_{c-}\equiv U(Q_{c-})$.

Аналогично теореме (5) доказывается справедливость следующего утверждения.

Теорема 6. *Для любого рационального числа $c\leq -1$ множество V_{c-} является предполным классом в функциональной системе $\mathbf{F}_Q$.*

Для любого простого числа p обозначим через Q_p множество всех несократимых рациональных дробей, знаменатель которых делится на p и пусть

$$V_{\bar p}=\{f(x_1,...,x_n)\in P_Q:f(c_1,...,c_n)\in Q\backslash Q_p \text{ при } c_1,...,c_n\in Q\backslash Q_p\}.$$

Теорема 7. *Для любого простого числа p множество $V_{\bar p}$ является предполным классом в функциональной системе $\mathbf{F}_Q$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $V_{\bar p}\neq\varnothing, [V_{\bar p}]=V_{\bar p}$ и $[V_{\bar p}]\neq P_Q$.

Очевидно также, что $f(x,y)=x-y, g(x,y)=xy\in V_{\bar p}$ и все числа вида $\frac{1}{q}$, где q любое простое число, отличное от p, принадлежать $V_{\bar p}$.

Пусть $f(x_1,...,x_n)\notin V_p$. Это означает, что существуют такие константы $c_1,...,c_n\in Q\backslash Q_p$ значение функции $f(c_1,...,c_n)\in Q_p$, т.е. имеет следующий вид несократимой дроби $\frac{r}{kq}$, где $r-$ некоторое целое число, отличное от нуля, а $k-$ некоторое положительное целое число, при этом $|r|$ иk, а также $|r|$ и p взаимно простые числа. Но тогда $[V_{\bar p}\cup f(c_1,...,c_n)]$ содержит число $\frac{r}{kp}+\frac{r}{kp}+\ldots+\frac{r}{kp}(k \text{ раз})=\frac{r}{p}$.

Так как $|r|$ и p взаимно простые числа, то уравнение $px+ry=1$ имеет решение в целых числах (это общеизвестно из курсов алгебры и теории чисел). Пусть $x=l$ и $y=s$ является решением этого уравнения, т.е. $pl+rs=1$, где l и s некоторые целые числа, отличные от 0.

Далее, возможны два случая:

1. $s>0$; тогда $[V_{\bar{p}} \cup f(c_1,...,c_n]$ содержит число $l+\frac{r}{kp}+\frac{r}{kp}+\ldots+\frac{r}{kp}(s\,\text{раз})=\frac{pl+rs}{p}=\frac{1}{p}$;

2. $s<0$; тогда $[V_{\bar{p}} \cup f(c_1,...,c_n]$ содержит число $-(\frac{r}{kp}+\frac{r}{kp}+\ldots+\frac{r}{kp}-l)(-s\,\text{раз})=\frac{pl+rs}{p}=\frac{1}{p}$.

Следовательно, $[V_{\bar{p}} \cup f(c_1,...,c_n]$ содержит подсистему

$$B=\{x-y, xy, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{p}, ...\},$$

которая является полной. Теорема доказана. □

И, наконец, рассмотрим еще одно семейство предполных классов.

Пусть S множество всех простых чисел, а $T-$ произвольное непустое подмножество множества S.

Введем обозначение

$$M_T \equiv (\bigcup_{s\in S}\frac{1}{s}) \cup (\bigcup_{p\in T}\{pz^8\}) \cup (\bigcup_{q\in S\setminus T}\{f_q(t,x,y,z)\}),$$

где $f_q(t,x,y,z)=[(t-qz^8)^4(xz-yz+z+1)^4+1]^2(xz-yz+z+1)$.

Рассмотрим класс $[M_T]-$ замыкание множества M_T.

Легко доказать, что класс $[M_T]$ не содержит полиномов вида $qz^8(q\in S\setminus T)$.

С этой целью построим индуктивно последовательность множеств $H_1, H_2, \ldots, H_k, \ldots$ рп-функций.

Б а з и с и н д у к ц и и. Положим $H_1=[M_T]$.

И н д у к т и в н ы й п е р е х о д. Пусть уже построены множества $H_1, H_2, \ldots, H_k$; тогда H_{k+1} определяется как множество всевозможных суперпозиций вида $g(h_1,\ldots,h_m)$, где $g-$ функция из M_T, а $h_1,\ldots,h_m-$ либо переменные, либо функции из $H_1, H_2, \ldots, H_k$.

Легко заметить, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} H_i=[M_T]$.

Далее, нетрудно показать с помощью математической индукции по i, что ни одно множество H_i не содержит полиномов вида qz^8, где $(q\in S\setminus T)$. Отсюда следует, что

1) $[M_T]$ не является полной системой;

2) если T_1 и T_2- произвольные непустые подмножества множества S и $M_{T_1}\neq M_{T_2}$, то $[M_{T_1}]\neq[M_{T_2}]$.

Если к множеству $[M_T]$ добавим любую функцию вида qz^8, где $q\in S\setminus T$ и замкнем полученное множество, то получим функцию

$$f(x,y,z)=f_q(qz^8,x,y,z)=xz-yz+z+1,$$

из которой с помощью операции суперпозиций можно получить все полиномиальные функции с целыми коэффициентами, и в частности, $x-y$ и xy (см. [2]).

Следовательно, из имеющихся функций с помощью операций суперпозиции можно получить систему рп-функций $B = \{x - y, xy, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{p}, ...\}$, которая является полной. Поэтому $[[M_T] \cup \{qz^8\}]$ является полной в $\mathbf{F}_Q$.

Отсюда следует, что:

1) множество M_T можно расширить до предполного класса (расширение конечное), т.е. M_T содержится в некотором предполном классе;

2) если T_1 и T_2– произвольные непустые подмножества множества S и $T_1 \neq T_2$, то $[M_{T_1}] \cup [M_{T_2}]$ является полной системой. Следовательно, M_{T_1} и M_{T_2} не могут содержаться в одном предполном классе.

Таким образом, мы доказали справедливость следующего утверждения.

Если T_1 и T_2– произвольные непустые подмножества множества S и $T_1 \neq T_2$, то $[M_{T_1}]$ и $[M_{T_2}]$ содержится в разных предполных классах.

5. Полнота систем функций

Рассмотрим алгебраический вариант проблемы полноты: *найти необходимое и достаточное условие полноты систем рп-функций (на языке предполных классов); а, именно: является ли множество всех предполных классов (приведенной) критериальной системой? Найти число предполных классов.*

Лемма 1. *В функциональной системе $\boldsymbol{F}_Q$ каждый замкнутый класс, отличный от P_Q, можно расширить до предполного класса.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M произвольный замкнутый класс, отличный от P_Q.

Рассмотрим множество $M^* = M \cup \{x+1, x-y, xy\}$ (здесь $x+1$ "добавили"к множеству M из соображения, что замыкание $[M^*]$ содержало все целые числа).

Возможны два случая.

1) $[M^*] = P_Q$. Тогда в силу утверждения (1) класс M можно расширить до предполного класса.

2) $[M^*] \neq P_Q$; тогда существует такое простое число p, что $\frac{1}{p} \notin [M^*]$ (в противном случае $[M^*]$ содержало бы полную подсистему $B = \{x - y, xy, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{p}, ...\}$, и, следовательно, $[M^*] = P_Q$, что противоречиво).

Допустим, что некоторое число $\frac{r}{kp}$ из Q_p содержится в $[M^*]$, где $k-$ некоторое положительное целое число, $r-$ некоторое целое число, при этом $|r|$ и k, а также $|r|$ и $p-$ взаимно простые числа. Как известно из курса алгебры и теории чисел уравнение $px + ry = 1$ имеет решение в целых числах. Пусть $x = l$ и $y = s$ решение этого уравнения, т.е. $pl + rs = 1$, где $l, s-$ некоторые целые числа.

Ясно, что если $\frac{r}{kp} \in [M^*]$, то $\frac{r}{kp} + \ldots + \frac{r}{kp}(k \text{ раз}) = \frac{r}{p} \in [M^*]$;

Следовательно,

$$l + \frac{r}{kp} + \ldots + \frac{r}{kp}(s \text{ раз}) = \frac{pl + rs}{p} = \frac{1}{p} \in [M^*] \text{ при } s > 0$$

и

$$-(\frac{r}{kp} + \ldots + \frac{r}{kp}(-s \text{ раз}) \ - l) = \frac{pl + rs}{p} = \frac{1}{p} \in [M^*] \text{ при } s < 0.$$

Получили противоречие. Значить, $[M^*]$ не содержит ни одного элемента множества Q_p. Более того, $[M^*]$ не содержит ни одной такой рп-функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_Q, которая на множестве $Q \backslash Q_p$ принимает значение из Q_p. Поэтому рп-функции из $[M^*]$ сохраняют множество $Q \backslash Q_p$. Следовательно, $[M^*]$ содержится в предполном классе V_p; тем более, M содержится в V_p. Лемма доказана. □

Итак, *каждый замкнутый класс содержится в некотором предполном классе;* отсюда в силу утверждения (1) получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 8. *В функциональной системе $\mathbf{F}_Q$ множество всех предполных классов образуют критериальную систему.*

Теорема 9. *В функциональной системе $\mathbf{F}_Q$ мощность множества всех предполных классов равна c.*

Доказательство. Рассмотрим множество замкнутых классов $A = \{M_T\}_{T \subset S.}$ С одной стороны, в силу утверждения (4) любые два элемента этого множества содержатся в разных предполных классах. Следовательно, число предполных классов не меньше c. Но, с другой стороны, так как F_Q счетная функциональная система, то число всех предполных классов не может быть больше c. Следовательно, искомое число равно континууму. □

6. Базисы полных систем

В функциональной системе $\mathbf{F}_Q$ множество $\{x-y, xy, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{p}, ...\}$, где $p-$ произвольное простое число, является базисом. Следовательно, $\mathbf{F}_Q$ счетно-порожденная функциональная система и поэтому любая полная система имеет счетный базис (если, конечно, он существует). Но всякая ли полная система в $\mathbf{F}_Q$ имеет базис? ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 10. *В функциональной системе* $\mathbf{F}_Q$ *существует полная система, не имеющая базиса.*

Доказательство. Обозначим через $q_1 = 0, q_i = \frac{1}{p_{i-1}} (i = 2, 3, \ldots)$ где p_{i-1} есть $(i-1)-$ое простое число в последовательности всех простых чисел $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$. Пусть $M = \{x-y, xy, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots\}$, где $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)-$ рп-функция n $-$ ой степени (т.е. функция, задаваемая полиномом одной переменной x, степень которого равна n, а коэффициенты - рациональные числа), принимающая в точках $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ соответственно значения $q_2, q_3, \ldots, q_{n+2}$. Существует такая единственная рп-функция (полином Лагранжа).

Нетрудно заметить, что класс $[M]$ содержит подсистему

$$\{x-y, xy, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{p}, ...\},$$

которая является полной в $\mathbf{F}_Q$. Следовательно, $[M] = P_Q$.

Итак, M полная система.

Допустим, что M имеет базис; обозначим его через B.

Так как $\mathbf{F}_Q$ бесконечно-порожденная ф.с., то B бесконечное множество.

Возможны следующие случаи.

1. $B = \{x-y, xy, f_{i_1}(x), f_{i_2}(x), \ldots, f_{i_n}(x), \ldots\}$, где

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}.$$

Но тогда легко заметить, что любая подсистема вида

$$\{x-y, xy, f_{j_1}(x), f_{j_2}(x), \ldots, f_{j_n}(x), \ldots\},$$

где

$$\{j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots\} \subseteq \{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots\}$$

содержит подсистему

$$\{x-y, xy, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{p}, ...\},$$

которая является полной. Следовательно, $[B] = P_Q$.

2. $B = \{x-y, f_{i_1}(x), f_{i_2}(x), \ldots, f_{i_n}(x), \ldots\}$, где

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}.$$

Но тогда из конечного числа функций этого базиса с помощью операции суперпозиции можно получить функцию xy; пусть этими функциями являются $g_1, \ldots, g_k$. Тогда ясно, что любая подсистема вида

$$\{x-y, g_1, \ldots, g_k, f_{j_1}(x), f_{j_2}(x), \ldots, f_{j_n}(x), \ldots\},$$

где

$$\{j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots\} \subseteq \{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots\}$$

содержит подсистему

$$\{x-y, xy, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{p}, ...\},$$

которая является полной. Следовательно, $[B] = P_Q$.

3. $B = \{xy, f_{i_1}(x), f_{i_2}(x), \ldots, f_{i_n}(x), \ldots\}$, где

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}.$$

Но тогда из конечного числа функций этого базиса с помощью операции суперпозиции можно получить функцию $x-y$; пусть этими функциями являются $h_1, \ldots, h_m$. Тогда ясно, что любая подсистема вида

$$\{xy, h_1, \ldots, h_m, f_{j_1}(x), f_{j_2}(x), \ldots, f_{j_n}(x), \ldots\},$$

где

$$\{j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots\} \subseteq \{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots\}$$

содержит подсистему

$$\{x-y, xy, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{p}, ...\},$$

которая является полной. Следовательно, $[B] = P_Q$.

4. $B = \{f_{i_1}(x), f_{i_2}(x), \ldots, f_{i_n}(x), \ldots\}$, где

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}.$$

Но тогда B состоит только из рп-функций одной переменной, поэтому $[B] \neq P_Q$.

Во всех случаях приходим к противоречию базиса.

Значит, исходная полная система не имеет базиса. $\square$

Автор выражает глубокую благодарность профессору Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, заведующему кафедрой Математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ В.Б. Кудрявцеву за постановку задачи и постоянную поддержку при выполнении данной работы.

Список литературы

[1] Алексиадис Н.Ф. *Функциональная система полиномов с натуральными коэффициентами*/Вестник МЭИ. 2013. №6. С. 109-111.

[2] Алексиадис Н.Ф. *Алгоритмическая неразрешимость проблемы полноты для полиномов с целыми коэффициентами*/Вестник МЭИ. 2015. №3. С. 110-117.

[3] Гаврилов Г.П. *О функциональной полноте в счетнозначной логике* — в кн.: Проблемы кибернетики, вып 15, М.: "Наука 1965, стр. 5-64.

[4] Кудрявцев В.Б. *Функциональные системы* — М.: Изд–во МГУ, 1982.

[5] Яблонский С.В. *Введение в дискретную математику* — М.: Наука, 1986.

On a functional system of polynomials with rational coefficients

Aleksiadis N.Ph.

This article investigates the completeness problem for polynomial functions with rational coefficients, as well as problems of a functional nature generated by its solution, namely: studying the structure of closed and precomplete classes, the problem of bases of complete systems. In particular, it was proved that

1) the system of functions is complete if and only if it is not wholly contained in any precomplete class;

2) the cardinality of the set of all precomplete classes is equal to the continuum;

3) there is a complete system that does not have a basis.

Keywords: polynomial, functional system, problem completeness, rational function, closed classes.