Короткие единичные проверяющие тесты для контактных схем при обрывах и замыканиях контактов

Попков К.А.

Рассматривается задача реализации булевых функций неизбыточными двухполюсными контактными схемами, допускающими короткие единичные проверяющие тесты относительно обрывов и замыканий контактов. Описаны все функции, для которых минимальная длина указанного теста равна 0, 1, 2 и 3. Доказано, что для почти всех булевых функций от n переменных эта длина равна 4.

Ключевые слова: контактная схема, булева функция, обрыв контакта, замыкание контакта, единичный проверяющий тест.

1. Введение

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых двухполюсных контактных схем [1], реализующих заданные булевы функции. (Слово «двухполюсная» в дальнейшем будем опускать.) Логический подход к тестированию контактных схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [2]. Представим, что имеется контактная схема S, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько контактов схемы S могут перейти в неисправное состояние. В качестве неисправностей контактов обычно рассматриваются их обрывы и замыкания. При обрыве контакта проводимость между его концами становится тождественно нулевой, а при замыкании — тождественно единичной. В результате схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(\tilde{x}^n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях контактов схемы S, называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [3, 4, 5]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно контактов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один контакт. Единичные тесты обычно рассматривают для *неизбыточных схем* [5], т. е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного контакта приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой.

В дальнейшем будем считать, что в схемах могут происходить как обрывы, так и замыкания контактов независимо друг от друга.

Пусть множество T является единичным проверяющим тестом (ЕПТ) для некоторой контактной схемы S. Введём следующие обозначения: $D_{\text{ЕП}}(T)$ — длина теста T; $D_{\text{ЕП}}(S) = \min D_{\text{ЕП}}(T)$, где минимум берётся по всем ЕПТ T для контактной схемы S; $D_{\text{ЕП}}(f) = \min D_{\text{ЕП}}(S)$, где минимум берётся по всем неизбыточным контактным схемам S, реализующим функцию f; $D_{\text{ЕП}}(n) = \max D_{\text{ЕП}}(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных. Функция $D_{\text{ЕП}}(n)$ называется *функцией Шеннона* длины ЕПТ. По аналогии с функциями $D_{\text{ЕП}}$ можно ввести функции $D_{\text{ЕД}}$, $D_{\text{ПП}}$ и $D_{\text{ПД}}$ для соответственно единичного диагностического, полного проверяющего и полного диагностического тестов, зависящие от T, от S, от f и от n (в определениях функций $D_{\text{ПП}}(f)$ и $D_{\text{ПД}}(f)$ не предполагается неизбыточности схем). Так, например, $D_{\text{ПД}}(n)$ — функция Шеннона длины полного диагностического теста.

Перечислим основные результаты, касающиеся задачи синтеза легкотестируемых контактных схем при рассматриваемых неисправностях. В [5, с. 113, теорема 9] с использованием идей С. В. Яблонского установлено, что функция $D_{\text{ЕД}}(n)$ асимптотически не превосходит $\frac{2^{n+1}}{n}$. Х. А. Мадатян в [6] доказал равенство $D_{\text{ПД}}(n) = 2^n$, а в [7] — соотношение

$D_{\text{ЕП}}(n) = O\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right)$. Н. П. Редькин в [8] получил оценку $D_{\text{ПП}}(n) \leqslant \frac{15}{16} \cdot 2^n$. Из утверждения 2) теоремы 1 работы [9] следует, что для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ вида $\varphi(\tilde{x}^{n-1}) \oplus x^n$, где $\varphi(\tilde{x}^{n-1})$ — произвольная неконстантная булева функция, существует неизбыточная контактная схема, содержащая, помимо переменных из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$, дополнительную входную переменную x_0, допускающая ЕПТ длины $4n + 8$ и реализующая булеву функцию, не зависящую существенно от переменной x_0 и равную функции $f(\tilde{x}^n)$. В работе [10], в частности, доказано (теорема 4), что для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ существует неизбыточная контактная схема, содержащая не более пяти дополнительных входных переменных, допускающая ЕПТ длины не более 35 и реализующая такую булеву функцию, что $f(\tilde{x}^n)$ получается из неё подстановкой вместо этих дополнительных переменных некоторых булевых констант. В работах автора [11, 12, 13] рассмотрены задачи синтеза легкотестируемых контактных схем только при замыканиях либо только при обрывах (размыканиях) контактов.

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется *для почти всех булевых функций от n переменных*, если отношение числа булевых функций от n переменных, для которых это свойство не выполняется, к числу всех булевых функций от n переменных (т. е. к 2^{2^n}) стремится к нулю при $n \to \infty$.

Далее будут рассматриваться только ЕПТ. Будут описаны все булевы функции f, для которых величина $D_{\text{ЕП}}(f)$ равна 0, 1, 2 и 3 (теорема 1), а также достаточно обширный класс булевых функций f, для которых она равна 4 (теорема 2); будет показано, что в этом классе содержатся почти все булевы функции от n переменных (теорема 3).

В дальнейшем нижний индекс ЕП у буквы D для краткости будем опускать.

2. Родственные функции

Введём обозначение

$$\alpha^\beta = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \beta = 1, \\ \overline{\alpha}, & \text{если } \beta = 0, \end{cases}$$

где $\alpha \in \{0, 1\}$.

Заметим, что

$$\alpha^\beta = \alpha \oplus \beta \oplus 1. \tag{1}$$

Назовём булеву функцию $f_2(\tilde{x}^n)$ *родственной* булевой функции $f_1(\tilde{x}^n)$, если существуют такие попарно различные индексы $i_1, \ldots, i_n$ от 1 до n и такие булевы константы $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, что $f_2(\tilde{x}^n) = f_1(x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_n}^{\sigma_n})$.

Например, любая из функций $x_1\overline{x}_2$, x_1x_3, $\overline{x}_2\overline{x}_3$, $x_3\overline{x}_4$ родственна функции x_1x_2, если все эти функции рассматриваются как функции от переменных $x_1, \ldots, x_n$, где $n \geqslant 4$.

Отметим, что если булева функция $f_2(\tilde{x}^n)$ родственна булевой функции $f_1(\tilde{x}^n)$, то $f_1(\tilde{x}^n)$ родственна $f_2(\tilde{x}^n)$. Действительно, пусть попарно различные индексы $j_1, \ldots, j_n$ от 1 до n таковы, что $j_{i_1} = 1$, $\ldots$, $j_{i_n} = n$; тогда

$$f_2(x_{j_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{j_n}^{\sigma_n}) = f_1\left(\left(x_{j_{i_1}}^{\sigma_1}\right)^{\sigma_1}, \ldots, \left(x_{j_{i_n}}^{\sigma_n}\right)^{\sigma_n}\right) = f_1(\tilde{x}^n),$$

т. е. $f_1(\tilde{x}^n)$ родственна $f_2(\tilde{x}^n)$.

Далее для краткости всюду вместо «замыкающий (размыкающий) контакт, отвечающий переменной x_i», будем говорить «контакт x_i» (соответственно «контакт $\overline{x}_i$»).

Лемма 1. *Пусть булева функция $f_2(\tilde{x}^n)$ родственна булевой функции $f_1(\tilde{x}^n)$. Тогда $D(f_2) = D(f_1)$.*

Доказательство. По определению существуют такие попарно различные индексы $i_1, \ldots, i_n$ от 1 до n и такие булевы константы $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, что $f_2(\tilde{x}^n) = f_1(x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_n}^{\sigma_n})$. Пусть S_1 — такая неизбыточная контактная схема, реализующая функцию f_1, а T_1 — такой ЕПТ для этой схемы, что $D(T_1) = D(S_1) = D(f_1)$. Для любых $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\beta \in \{0, 1\}$ заменим в схеме S каждый контакт x_j^β на контакт $x_{i_j}^{\beta \oplus \sigma_j \oplus 1}$; указанные два контакта поставим в соответствие друг другу. Полученную схему обозначим через S_2. На любом двоичном наборе $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ каждый контакт $x_{i_j}^{\beta \oplus \sigma_j \oplus 1}$ схемы S_2 функционирует в точности так же, как соответствующий ему контакт x_j^β схемы S_1 на наборе $(\alpha_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, \alpha_{i_n}^{\sigma_n})$, поскольку

$$\alpha_{i_j}^{\beta \oplus \sigma_j \oplus 1} = \alpha_{i_j} \oplus (\beta \oplus \sigma_j \oplus 1) \oplus 1 = (\alpha_{i_j} \oplus \sigma_j \oplus 1) \oplus \beta \oplus 1 = (\alpha_{i_j}^{\sigma_j})^\beta$$

в силу (1). Отсюда следует, что схема S_2 при отсутствии в ней неисправностей выдаёт на наборе $\tilde{\alpha}$ значение $f_1(\alpha_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, \alpha_{i_n}^{\sigma_n}) = f_2(\tilde{\alpha})$, т. е. реализует функцию $f_2(\tilde{x}^n)$.

Пусть T_2 — множество двоичных наборов длины n, получающееся из множества T_1 заменой каждого набора $(\pi_{s,i_1}, \ldots, \pi_{s,i_n})$ (для удобства занумеруем его компоненты именно так), принадлежащего T_1, на набор $(\pi_{s,1}^{\sigma_1}, \ldots, \pi_{s,n}^{\sigma_n})$. Докажем, что схема S_2 неизбыточна и допускает ЕПТ T_2. Рассмотрим произвольную неисправность любого одного контакта этой схемы. Такую же неисправность соответствующего контакта схемы S_1 можно обнаружить на каком-то наборе $\tilde{\pi}_s = (\pi_{s,i_1}, \ldots, \pi_{s,i_n}) \in T_1$, так как T_1 является ЕПТ для неизбыточной схемы S_1. Значит, для получающейся функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ справедливо соотношение

$$g(\tilde{\pi}_s) \neq f_1(\tilde{\pi}_s). \tag{2}$$

Каждый контакт $x_{i_j}^{\beta \oplus \sigma_j \oplus 1}$ схемы S_2 на наборе $\tilde{\pi}'_s = (\pi_{s,1}^{\sigma_1}, \ldots, \pi_{s,n}^{\sigma_n}) \in T_2$ при рассматриваемых неисправностях контактов в схемах S_1, S_2 функционирует так же, как соответствующий ему контакт x_j^β схемы S_1 на наборе $\tilde{\pi}_s$, поскольку

$$(\pi_{s,i_j}^{\sigma_j})^{\beta \oplus \sigma_j \oplus 1} = (\pi_{s,i_j} \oplus \sigma_j \oplus 1) \oplus (\beta \oplus \sigma_j \oplus 1) \oplus 1 = \pi_{s,i_j} \oplus \beta_i \oplus 1 = \pi_{s,i_j}^{\beta}$$

в силу (1). Отсюда следует, что схема S_2 выдаёт на наборе $\tilde{\pi}'_s$ значение $g(\tilde{\pi}_s)$, отличное от значения

$$f_1(\tilde{\pi}_s) = f_1((\pi_{s,i_1}^{\sigma_1})^{\sigma_1}, \ldots, (\pi_{s,i_n}^{\sigma_n})^{\sigma_n}) = f_2(\tilde{\pi}'_s)$$

в силу (2), т. е. рассматриваемая неисправность схемы S_2 обнаруживается на наборе $\tilde{\pi}'_s \in T_2$. Из приведённых рассуждений вытекает, что схема S_2 неизбыточна и допускает ЕПТ T_2, поэтому

$$D(f_2) \leqslant D(S_2) \leqslant D(T_2) = D(T_1) = D(f_1).$$

Тем самым доказано, что $D(f_2) \leqslant D(f_1)$. Аналогично доказывается неравенство $D(f_1) \leqslant D(f_2)$ (с учётом того, что функция $f_1(\tilde{x}^n)$ родственна функции $f_2(\tilde{x}^n)$). В итоге получаем равенство $D(f_2) = D(f_1)$. Лемма 1 доказана. □

Двоичный набор $\tilde{\sigma}$ длины n будем называть *единичным* (*нулевым*) набором булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, если $f(\tilde{\sigma}) = 1$ (соответственно, $f(\tilde{\sigma}) = 0$).

3. Схемы, допускающие тесты длины не более 3

Опишем вначале все булевы функции f, для которых $D(f) = 0$, $D(f) = 1$, $D(f) = 2$ и $D(f) = 3$.

Лемма 2. *Для любой неизбыточной контактной схемы S, содержащей не менее трёх контактов, справедливо неравенство $D(S) \geqslant 4$.*

Доказательство. Рассмотрим четыре случая.

1. Полюса схемы S совпадают. Тогда она, очевидно, реализует константу 1 как при отсутствии в ней неисправностей, так и при любой неисправности любого её контакта, поэтому избыточна; противоречие.

2. Все контакты схемы S принадлежат некоторой несамопересекающейся цепи C, соединяющей её полюса. Если в этой цепи присутствуют одновременно замыкающий и размыкающий контакт одной и той же переменной, то схема S, очевидно, реализует константу 0 как при отсутствии в ней неисправностей, так и при обрыве любого из контактов цепи C, поэтому избыточна. Если в цепи C присутствуют два замыкающих или два размыкающих контакта одной и той же переменной, то при замыкании любого одного из них, как нетрудно видеть, функция, реализуемая схемой S, не изменится, поэтому схема избыточна. Далее можно считать, что все контакты схемы S отвечают разным переменным. Пусть это контакты $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$, где $n \geqslant 3$. Тогда рассматриваемая схема при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f = x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}$, при обрыве любого контакта — функцию $g_0 \equiv 0$, а при замыкании контакта $x_i^{\sigma_i}$ — функцию $g_i = x_1^{\sigma_1} \ldots x_{i-1}^{\sigma_{i-1}} x_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \ldots x_n^{\sigma_n}$ для $i = 1, \ldots, n$. Функция $f(\tilde{x}^n)$ отличается от функции $g_0(\tilde{x}^n)$ только на наборе $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, а от функции $g_i(\tilde{x}^n)$ — только на наборе $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \overline{\sigma}_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$, где $i = 1, \ldots, n$, поэтому в любой ЕПТ для схемы S должны входить все указанные $n + 1 \geqslant 4$ наборов, откуда следует неравенство $D(S) \geqslant 4$.

3. Полюса схемы S не совпадают и каждый контакт в ней соединяет её полюса. Если среди этих контактов присутствуют одновременно замыкающий и размыкающий контакт одной и той же переменной, то схема S, очевидно, реализует константу 1 как при отсутствии в ней неисправностей, так и при замыкании любого из её контактов, поэтому избыточна. Если в ней присутствуют два замыкающих или два размыкающих контакта одной и той же переменной, то при обрыве любого одного из них, как нетрудно видеть, функция, реализуемая схемой S, не изменится, поэтому схема избыточна. Далее можно считать, что все контакты схемы S отвечают разным переменным. Пусть это контакты $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$, где $n \geqslant 3$. Тогда рассматриваемая схема при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$, при замыкании любого контакта — функцию $g_0 \equiv 1$, а при обрыве контакта $x_i^{\sigma_i}$ — функцию $g_i = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \vee x_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$ для $i = 1, \ldots, n$. Функция $f(\tilde{x}^n)$ отличается от функции $g_0(\tilde{x}^n)$ только на наборе $(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n)$, а

от функции $g_i(\tilde{x}^n)$ — только на наборе $(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_{i-1}, \sigma_i, \overline{\sigma}_{i+1}, \ldots, \overline{\sigma}_n)$, где $i = 1, \ldots, n$, поэтому в любой ЕПТ для схемы S должны входить все указанные $n + 1 \geqslant 4$ наборов, откуда следует неравенство $D(S) \geqslant 4$.

4. Отрицание объединения случаев 1–3: полюса схемы S не совпадают, не все её контакты принадлежат одной и той же несамопересекающейся цепи и в схеме S есть контакт K, хотя бы один конец которого отличен от полюсов схемы. Пусть схема S при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$, и пусть T — произвольный ЕПТ для данной схемы. При замыкании любого её контакта функция, реализуемая схемой S, не может уменьшиться, поэтому данная неисправность может обнаруживаться только на нулевых наборах функции f, откуда следует, что в тесте T содержится хотя бы один нулевой набор $\tilde{\sigma}_0$ этой функции. Предположим, что это единственный нулевой набор функции f, содержащийся в T. Тогда ни один контакт схемы S не может проводить на наборе $\tilde{\sigma}_0$, поскольку в противном случае замыкание проводящего на этом наборе контакта нельзя было бы обнаружить на наборах из T. Замыкание контакта K должно обнаруживаться на наборе $\tilde{\sigma}_0$, т. е. в полученной схеме должна быть цепь между полюсами, проводящая на указанном наборе. Но единственным проводящим в этой схеме на наборе $\tilde{\sigma}_0$ контактом является K, следовательно, он соединяет полюса схемы; противоречие. Тем самым доказано, что в T содержатся хотя бы два нулевых набора функции f.

Далее, при обрыве любого контакта схемы S функция, реализуемая этой схемой, не может увеличиться, поэтому данная неисправность может обнаруживаться только на единичных наборах функции f, откуда следует, что в тесте T содержится хотя бы один единичный набор $\tilde{\sigma}_1$ этой функции. Пусть C — произвольная проводящая на этом наборе несамопересекающаяся цепь между полюсами схемы S. По предположению случая 4 в данной схеме присутствует хотя бы один контакт, не принадлежащий цепи C. Тогда при обрыве этого контакта в схеме S цепь C по прежнему будет проводить на наборе $\tilde{\sigma}_1$ и схема на данном наборе выдаст значение $1 = f(\tilde{\sigma}_1)$. Это означает, что в тесте T должен содержаться ещё какой-то единичный набор функции f, отличный от $\tilde{\sigma}_1$, на котором обнаруживается обрыв указанного контакта. В итоге получаем, что в любой ЕПТ для схемы S должны входить хотя бы четыре набора, откуда следует неравенство $D(S) \geqslant 4$. Лемма 2 доказана. □

Теорема 1. *Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — булева функция. Справедливо равенство*

$$D(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \equiv 0 \text{ или } f \equiv 1, \\ 2, & \text{если } f \text{ родственна функции } x_1, \\ 3, & \text{если } f \text{ родственна одной из функций } x_1x_2,\ x_1 \vee x_2. \end{cases}$$

В остальных случаях $D(f) \geqslant 4$.

Следствие 1. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо неравенство $D(n) \geqslant 4$.*

Доказательство теоремы 1. В случаях $f \equiv 0$, $f \equiv 1$ функцию f можно реализовать контактной схемой, не содержащей ни одного контакта. У такой схемы нет ни одной функции неисправности, поэтому пустое множество является для неё ЕПТ, откуда следует равенство $D(f) = 0$. В случае $f = x_1$ функцию f можно реализовать контактной схемой, содержащей ровно один контакт. При обрыве (замыкании) этого контакта схема станет реализовывать константу 0 (соответственно, константу 1), которую можно отличить от функции f на любом наборе, первая компонента которого равна 1 (соответственно, 0), поэтому $D(f) \leqslant 2$. С другой стороны, в любой неизбыточной контактной схеме S, реализующей функцию f, должен содержаться хотя бы один контакт; при обрыве (замыкании) этого контакта реализуемая схемой функция не может увеличиться (соответственно, уменьшиться), поэтому для обнаружения указанной неисправности в любом ЕПТ T для схемы S должен содержаться хотя бы один единичный (соответственно, нулевой) набор функции f. Отсюда следует неравенства $D(T) \geqslant 2$, $D(S) \geqslant 2$ и $D(f) \geqslant 2$, а вместе с последним из них равенство $D(f) = 2$, т. е. $D(x_1) = 2$.

Если функция $f(\tilde{x}^n)$ родственна функции x_1, то $D(f) = 2$ в силу леммы 1.

Пусть $f = x_1x_2$. Докажем равенство $D(f) = 3$. Реализуем функцию f схемой $S_\&$, представляющей собой цепь из двух контактов: x_1 и x_2. Легко видеть, что всевозможными функциями неисправности такой схемы являются функции $g_0 \equiv 0$, $g_1 = x_1$ и $g_2 = x_2$. Функция g_0 (функция g_1, функция g_2) отличается от функции f в точности на всех таких наборах, первые две компоненты каждого из которых равны 1 и 1 соответственно (1 и 0 соответственно, 0 и 1 соответственно). Указанные три множества наборов попарно не пересекаются, а в любой ЕПТ для схемы $S_\&$ должно входить хотя бы по одному набору из каждого из них, поэтому $D(S_\&) \geqslant 3$. С другой стороны, выбрав по произвольному набору из каждого из этих множеств, получим ЕПТ длины 3 для схемы $S_\&$. Таким образом, $D(S_{\&}) = 3$. Далее заметим, что единственной контактной схемой, содержащей не более двух контактов и реализующей функцию f (с точностью до перестановки полюсов), является схема $S_{\&}$, поэтому любая другая неизбыточная схема S', реализующая эту функцию, содержит не менее трёх контактов и $D(S') \geqslant 4$ по лемме 2. В итоге получаем, что $D(f) = D(S_{\&}) = 3$, т. е. $D(x_1x_2) = 3$.

Пусть $f = x_1 \vee x_2$. Реализуем функцию f схемой $S_{\vee}$, представляющей собой параллельное соединение двух контактов: x_1 и x_2. Дальнейшие рассуждения проводятся двойственным образом по отношению к рассуждениям из случая $f = x_1x_2$ (принцип двойственности см., например, в [14, с. 24]). В итоге получаем, что $D(x_1 \vee x_2) = 3$.

Если функция $f(\tilde{x}^n)$ родственна одной из функций x_1x_2, $x_1 \vee x_2$, то $D(f) = 3$ в силу леммы 1.

Нетрудно заметить, что контактные схемы, содержащие не более двух контактов, могут реализовывать только булевы функции f, рассмотренные выше. Любая другая булева функция f может быть реализована только контактными схемами, содержащими не менее трёх контактов, откуда с учётом леммы 2 следует неравенство $D(f) \geqslant 4$. Теорема 1 доказана. $\square$

4. Схемы, допускающие тесты длины 4

Пусть $n \geqslant 2$. Назовём $L_{(n)}$-*блоком* четырёхполюсную контактную схему с полюсами A_1, A_2, A_3 и A_4, содержащую четыре контакта: контакт x_{t_1} между полюсами A_1 и A_3, контакт x_{t_2} между полюсами A_2 и A_4, контакт $\overline{x}_{t_3}$ между полюсами A_2 и A_3 и контакт $\overline{x}_{t_4}$ между полюсами A_1 и A_4, где либо $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \{1, \ldots, n-1\}$, либо $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = n$ (см. рис. 1). Для удобства будем обозначать такой $L_{(n)}$-блок через $B^{t_1,t_2}_{t_3,t_4}$.

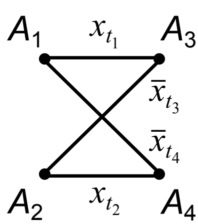

Рис. 1. $L_{(n)}$-блок

Назовём $L_{(n)}$*-схемой* четырёхполюсную контактную схему S с полюсами a_0, b_0, a_m и b_m, составленную из произвольных $L_{(n)}$-блоков $\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_m$ для произвольного $m \in \mathbb{N}$ следующим образом: полюса a_0 и b_0 схемы S совпадают с полюсами соответственно A_1 и A_2 блока B_1; для любого $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ полюса A_3 и A_4 блока B_i совпадают с полюсами соответственно A_1 и A_2 блока B_{i+1} и для удобства объявляются вершинами соответственно a_i и b_i схемы; полюса a_m и b_m схемы S совпадают с полюсами соответственно A_3 и A_4 блока B_m (см. рис. 2). Наличие буквы L в названии «$L_{(n)}$-схема» обусловлено тем, что похожее строение имеет известная схема, реализующая линейную булеву функцию $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ и содержащая $4n-4$ контактов (см., например, [1, с. 44, рис. 21]).

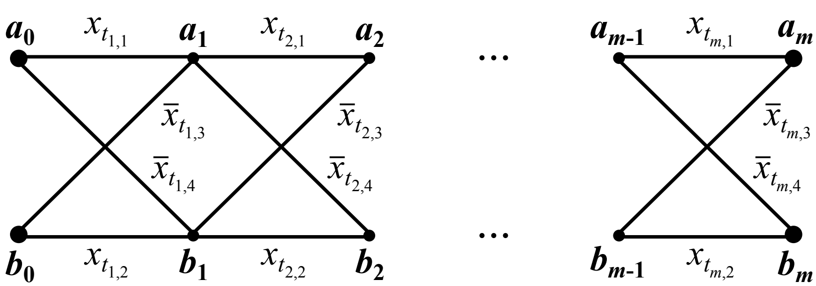

Рис. 2. $L_{(n)}$-схема

Пусть S — произвольная $L_{(n)}$-схема, составленная из чётного числа m $L_{(n)}$-блоков, среди которых число блоков вида $B_{n,n}^{n,n}$ также чётно. Назовём $L'_{(n)}$*-схемой* контактную схему с полюсами b_0 и a_m, получающуюся из схемы S добавлением вершины c_1 и соединением её с полюсами b_m и a_0 схемы S контактами x_1 и x_n соответственно, а также добавлением вершины c_2 и соединением её с полюсами b_m и a_0 схемы S контактами $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_n$ соответственно (см. рис. 3).

Введём обозначения $\tilde{0}^l = \underbrace{0, \ldots, 0}_{l}$, $\tilde{1}^l = \underbrace{1, \ldots, 1}_{l}$, где $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. (В случае $l = 0$ они обозначают пустую строку: например, $(\tilde{0}^0, 1, \tilde{0}^{n-1}) = (1, \tilde{0}^{n-1})$.)

Лемма 3. *Любая $L'_{(n)}$-схема неизбыточна и допускает ЕПТ $T = \{(\tilde{0}^n), (\tilde{0}^{n-1}, 1), (\tilde{1}^{n-1}, 0), (\tilde{1}^n)\}$; при этом в случае отсутствия в ней неисправностей она проводит на наборах $(\tilde{0}^n)$ и $(\tilde{1}^n)$ и не проводит на наборах $(\tilde{0}^{n-1}, 1)$ и $(\tilde{1}^{n-1}, 0)$.*

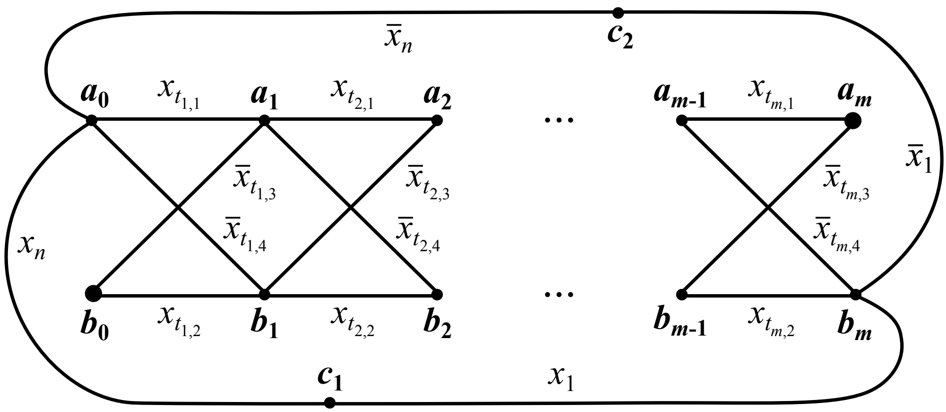

Рис. 3. $L'_{(n)}$-схема

Доказательство. Пусть S' — произвольная $L'_{(n)}$-схема, и пусть она при отсутствии неисправностей реализует между своими полюсами булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ и получена из некоторой $L_{(n)}$-схемы S способом, указанным в определении $L'_{(n)}$-схемы; в свою очередь, схема S состоит из $L_{(n)}$-блоков $\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_m$ для некоторого чётного m, среди которых число μ блоков вида $B^{n,n}_{n,n}$ также чётно; в случае $\mu \geqslant 2$ обозначим номера этих μ блоков в порядке возрастания через $i_1, \ldots, i_\mu$. Докажем, что схема S' неизбыточна и допускает ЕПТ T. Для этого достаточно доказать, что любая неисправность (обрыв или замыкание) любого одного контакта данной схемы обнаруживается на каком-то наборе из множества T. Рассмотрим произвольную такую неисправность. Нетрудно видеть, что все замыкающие (размыкающие) контакты схемы S' принадлежат несамопересекающейся цепи $b_0 - b_1 - \ldots - b_m - c_1 - a_0 - a_1 - \ldots - a_m$ (соответственно, $b_0 - a_1 - b_2 - \ldots - a_{m-1} - b_m - c_2 - a_0 - b_1 - a_2 - \ldots - b_{m-1} - a_m$; здесь используется, что m чётно), соединяющей полюса схемы. Поэтому при отсутствии неисправностей схема S' проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$ (соответственно, $(\tilde{0}^n)$), а при обрыве произвольного её замыкающего (соответственно, размыкающего) контакта — не проводит на этом наборе. Таким образом, обрыв любого контакта данной схемы обнаруживается на одном из наборов $(\tilde{1}^n), (\tilde{0}^n) \in T$.

Далее, на наборе $(\tilde{1}^{n-1}, 0)$ в схеме S' в случае отсутствия в ней неисправностей проводят все контакты $x_1, \ldots, x_{n-1}, \overline{x}_n$ и только они. Ни один блок из множества $\{\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_m\} \setminus \{\mathsf{B}_{i_1}, \ldots, \mathsf{B}_{i_\mu}\}$ в силу определения $L_{(n)}$-

блока не содержит контактов переменной x_n (в случае $\mu = 0$ множество $\{\mathsf{B}_{i_1}, \ldots, \mathsf{B}_{i_\mu}\}$ считаем пустым). Поэтому нетрудно видеть, что множество проводящих на наборе $(\tilde{1}^{n-1}, 0)$ контактов схемы S' представляет собой объединение двух непересекающихся и несамопересекающихся цепей: $b_0 - b_1 - \ldots - b_{i_1-1} - a_{i_1} - a_{i_1+1} - \ldots - a_{i_2-1} - b_{i_2} - b_{i_2+1} - \ldots - a_{i_\mu-1} - b_{i_\mu} - b_{i_\mu+1} - \ldots - b_m - c_1$ и $c_2 - a_0 - a_1 - \ldots - a_{i_1-1} - b_{i_1} - b_{i_1+1} - \ldots - b_{i_2-1} - a_{i_2} - a_{i_2+1} - \ldots - b_{i_\mu-1} - a_{i_\mu} - a_{i_\mu+1} - \ldots - a_m$ (здесь используется, что μ чётно; в случае $\mu = 0$ эти цепи вырождаются в $b_0 - b_1 - \ldots - b_m - c_1$ и $c_2 - a_0 - a_1 - \ldots - a_m$ соответственно. Везде в случае $i < j$ участок цепи $a_i - \ldots - a_j$ или $b_i - \ldots - b_j$ считаем пустым), причём полюса b_0 и a_m принадлежат разным цепям, а любой из контактов $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}, x_n$ этой схемы соединяет какую-то вершину одной из указанных цепей с какой-то вершиной другой. (Пример строения схемы S' при $m = 6$, $\mu = 2$, $i_1 = 3$, $i_2 = 5$ приведён на рис. 4; сплошными линиями выделены все контакты $x_1, \ldots, x_{n-1}, \overline{x}_n$, а пунктирными — все контакты $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}, x_n$.) Отсюда следует, что при отсутствии неисправностей схема S' не проводит на наборе $(\tilde{1}^{n-1}, 0)$, а при замыкании любого из её контактов $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}, x_n$ — проводит на этом наборе. Таким образом, замыкание любого такого контакта данной схемы обнаруживается на наборе $(\tilde{1}^{n-1}, 0) \in T$.

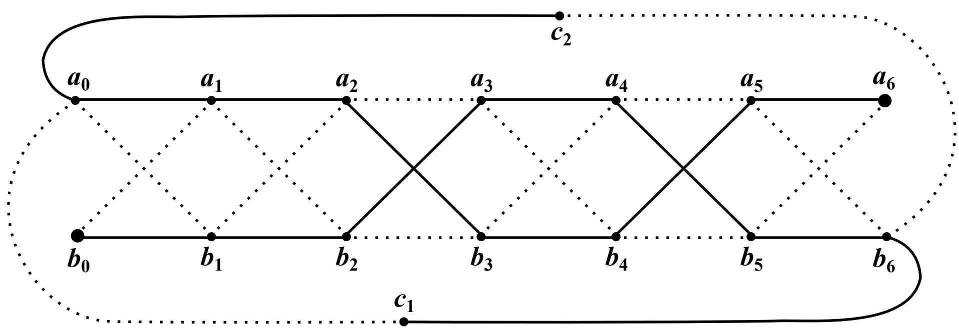

Рис. 4. Строение схемы S'

Осталось рассмотреть замыкание любого из контактов $x_1, \ldots, x_{n-1}$, $\overline{x}_n$ схемы S'. Переобозначим вершины этой схемы — а именно, поменяем местами вершины a_i и b_i для каждого нечётного i от 1 до $m-1$. Тогда схема S' примет вид, представленный на рис. 5. Дальнейшие рассуждения полностью совпадают с рассуждениями из предыдущего абзаца при замене набора $(\tilde{1}^{n-1}, 0)$ на набор $(\tilde{0}^{n-1}, 1)$, а контактов $x_1, \ldots, x_{n-1}, \overline{x}_n$ — на контакты $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}, x_n$ и наоборот. Получаем, что рассматриваемая неисправность обнаруживается на наборе $(\tilde{0}^{n-1}, 1) \in T$, а при отсутствии неисправностей схема S' не проводит на этом наборе. Лемма 3 доказана.

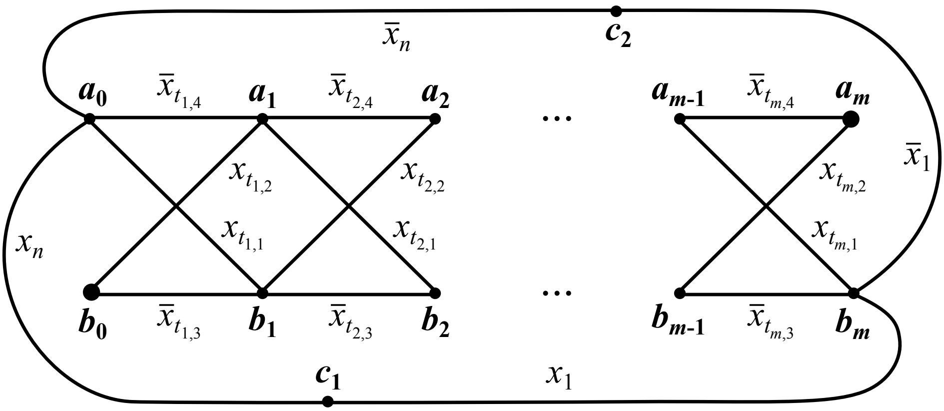

Рис. 5. Схема S' после переобозначения вершин

$\square$

5. Изучение возможностей реализации булевых функций $L'_{(n)}$-схемами

Дальнейшие рассуждения направлены на поиск булевых функций, которые могут быть реализованы $L'_{(n)}$-схемами. С учётом леммы 3 для любой такой функции f выполнено соотношение $D(f) \leqslant 4$. Параллельно будем оценивать сверху сложность каждой из построенных схем, т. е. число контактов в ней, в зависимости от n.

Всюду в данном разделе считаем, что все контакты, содержащиеся в схемах, исправны.

Контакт, соединяющий произвольные две вершины v и v' контактной схемы, будем обозначать через $[v, v']$.

Два контакта будем называть *противоположными*, если один из них имеет вид x_i, а другой — вид $\overline{x}_i$, где $i \in \mathbb{N}$.

Под *длиной цепи* в контактной схеме будем понимать число содержащихся в этой цепи контактов.

Лемма 4. *Для любого двоичного набора $\tilde{\alpha}$ длины $n-1$, $n \geqslant 3$, отличного от наборов $(\tilde{0}^{n-1})$ и $(\tilde{1}^{n-1})$, существует $L_{(n)}$-схема $S_{\tilde{\alpha}}$, составленная из*

$m = 2n-5$ $L_{(n)}$-блоков, содержащая только контакты переменных из множества $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ и обладающая следующими свойствами:

(i) *на наборе $\tilde{\alpha}$ проводимость между полюсами схемы $S_{\tilde{\alpha}}$ из любой из пар (a_0, a_m), (a_0, b_m), (b_0, a_m) отсутствует;*

(ii) *на наборе $\tilde{\alpha}$ есть проводимость между полюсами b_0 и b_m схемы $S_{\tilde{\alpha}}$;*

(iii) *на любом двоичном наборе $\tilde{\tau}$ длины $n-1$, отличном от наборов $\tilde{\alpha}$, $(\tilde{0}^{n-1})$ и $(\tilde{1}^{n-1})$, в схеме $S_{\tilde{\alpha}}$ есть проводимости либо между полюсами из каждой из пар (a_0, a_m), (a_0, b_m), либо между полюсами из каждой из пар (b_0, a_m), (b_0, b_m),*

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ и при этом $\alpha_{i_1} = \ldots = \alpha_{i_q} = 1$, $\alpha_{i_{q+1}} = \ldots = \alpha_{i_{n-1}} = 0$, где $q \in \{1, \ldots, n-2\}$, а $i_1, \ldots, i_{n-1}$ — попарно различные индексы от 1 до $n-1$ (для определённости можно считать, что $i_1 < \ldots < i_q$ и $i_{q+1} < \ldots < i_{n-1}$). По определению $L_{(n)}$-схема однозначно задаётся числом $m \in \mathbb{N}$ и $L_{(n)}$-блоками $\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_m$. Положим $m = 2n-5$, $\mathsf{B}_1 = B^{i_{n-1}, i_1}_{i_1, i_1}$; $\mathsf{B}_{2j} = B^{i_{j+1}, i_j}_{i_j, i_{j+1}}$, $\mathsf{B}_{2j+1} = B^{i_{j+1}, i_j}_{i_{j+1}, i_j}$ для каждого $j = 1, \ldots, q-1$ (при $q \geqslant 2$); $\mathsf{B}_{2j} = B^{i_{j+2}, i_{j+1}}_{i_{j+1}, i_{j+2}}$, $\mathsf{B}_{2j+1} = B^{i_{j+2}, i_{j+1}}_{i_{j+2}, i_{j+1}}$ для каждого $j = q, \ldots, n-3$ (при $q \leqslant n-3$). Полученную $L_{(n)}$-схему обозначим через $S_{\tilde{\alpha}}$ (её вид при $n = 5$, $\tilde{\alpha} = (1,1,0,0)$ показан на рис. 6). Проверим выполнение для этой схемы свойств (i)–(iii).

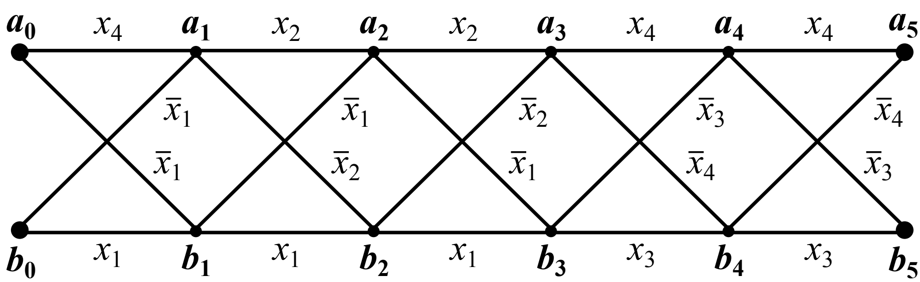

Рис. 6. Схема $S_{\tilde{\alpha}}$

Предположим, что свойство (i) не выполнено, т. е. в схеме $S_{\tilde{\alpha}}$ есть несамопересекающаяся цепь между её полюсами из какой-то из пар (a_0, a_m), (a_0, b_m), (b_0, a_m), проводящая на наборе $\tilde{\alpha}$. Из всех таких цепей выберем цепь C наименьшей длины. Она не может соединять полюса a_0 и a_m, а также полюса a_0 и b_m, так как на наборе $\tilde{\alpha}$ ни один из контактов $[a_0, a_1]$, $[a_0, b_1]$ не проводит (в силу определения блока B_1 это контакты

$x_{i_{n-1}}$, $\overline{x}_{i_1}$ соответственно). Поэтому цепь C соединяет полюса b_0 и a_m схемы $S_{\tilde{\alpha}}$. Вершины этой цепи при движении от полюса b_0 к полюсу a_m обозначим через $v_0, \dots, v_s$, тогда $v_0 = b_0$ и $v_s = a_m$. Кроме того, $v_1 = b_1$, поскольку на наборе $\tilde{\alpha}$ контакт $[b_0, a_1]$ не проводит (это контакт $\overline{x}_{i_1}$). Также

$$v_1, \dots, v_s \notin \{a_0, b_0\} \tag{3}$$

в силу выбора цепи C.

Для удобства будем считать, что вершины a_d и b_d не принадлежат схеме $S_{\tilde{\alpha}}$ для любого $d \geqslant m+1$. Докажем, что $v_d \in \{a_d, b_d\}$ для любого $d \in \{0, \dots, s\}$ (в частности, $s \leqslant m$). Предположим противное. Пусть d — наименьший индекс от 0 до s, для которого $v_d \notin \{a_d, b_d\}$. Тогда $d \geqslant 2$, $v_{d-2} \in \{a_{d-2}, b_{d-2}\}$ и $v_{d-1} \in \{a_{d-1}, b_{d-1}\}$. Из последнего соотношения вытекает неравенство $d-1 \leqslant m$. Каждая из вершин a_{d-1}, b_{d-1} в схеме $S_{\tilde{\alpha}}$ соединена контактами с вершинами a_{d-2} и b_{d-2}, а также — в случае $d-1 < m$ — с вершинами a_d и b_d. Поэтому из соотношений $v_{d-1} \in \{a_{d-1}, b_{d-1}\}$ и $v_d \notin \{a_d, b_d\}$ следует, что $v_d \in \{a_{d-2}, b_{d-2}\}$; в частности, $d \geqslant 3$ в силу (3). Таким образом,

$$2 \leqslant d-1 \leqslant m = 2n-5. \tag{4}$$

Далее, из соотношений $v_{d-2} \in \{a_{d-2}, b_{d-2}\}$, $v_d \in \{a_{d-2}, b_{d-2}\}$ и того, что цепь C несамопересекающаяся, следует равенство $\{v_{d-2}, v_d\} = \{a_{d-2}, b_{d-2}\}$. Если $v_{d+1} \in \{a_{d-3}, b_{d-3}\}$, то на участке $v_{d+1} - \ldots - v_s$ цепи C обязательно должна содержаться одна из вершин a_{d-2}, b_{d-2}, а значит, одна из вершин v_{d-2}, v_d, однако обе эти вершины уже содержатся на участке $v_0 - \ldots - v_d$ данной цепи; противоречие. Поэтому $v_{d+1} \in \{a_{d-1}, b_{d-1}\}$. С учётом ранее установленного соотношения $v_{d-1} \in \{a_{d-1}, b_{d-1}\}$ получаем, что $\{v_{d-1}, v_{d+1}\} = \{a_{d-1}, b_{d-1}\}$. Значит, на участке $v_{d-2} - v_{d-1} - v_d - v_{d+1}$ цепи C чередуются вершины из множеств $\{a_{d-2}, b_{d-2}\}$ и $\{a_{d-1}, b_{d-1}\}$, причём на нём содержатся все вершины a_{d-2}, b_{d-2}, a_{d-1}, b_{d-1}, являющиеся полюсами $L_{(n)}$-блока B_{d-1}. Из (4) следует неравенство $n \geqslant 4$ и существование такого $j \in \{1, \dots, n-3\}$, что блок B_{d-1} имеет один из видов $B^{i_{j+1}, i_j}_{i_j, i_{j+1}}$, $B^{i_{j+1}, i_j}_{i_{j+1}, i_j}$, $B^{i_{j+2}, i_{j+1}}_{i_{j+1}, i_{j+2}}$ или $B^{i_{j+2}, i_{j+1}}_{i_{j+2}, i_{j+1}}$. Заметим, что в блоке каждого из этих видов имеется по одному контакту $x_{i'}$, $x_{i''}$, $\overline{x}_{i'}$ и $\overline{x}_{i''}$ для некоторых $i', i'' \in \{i_j, i_{j+1}, i_{j+2}\}$, $i' \neq i''$. На участке $v_{d-2} - v_{d-1} - v_d - v_{d+1}$ цепи C содержатся три из этих четырёх контактов, поэтому какие-то два из указанных трёх контактов обязательно являются противоположными. Наличие противоположных контактов в данной цепи означает, что она не может проводить на наборе $\tilde{\alpha}$; противоречие. Тем самым доказано, что $v_d \in \{a_d, b_d\}$ для любого $d \in \{0, \ldots, s\}$; в частности, $s \leqslant m$. Отсюда и из соотношения $v_s = a_m$ следует, что

$$s = m = 2n - 5,$$

т. е. $v_{2n-5} = a_{2n-5}$. Выше было показано, что $v_1 = b_1$ и $n \geqslant 4$. Поэтому существует такой индекс $j \in \{1, \ldots, n-3\}$, что $v_{2j-1} = b_{2j-1}$ и $v_{2j+1} = a_{2j+1}$. Рассмотрим четыре случая.

1. Пусть $j \leqslant q - 1$ и $v_{2j} = a_{2j}$. Тогда участок $v_{2j-1} - v_{2j} - v_{2j+1}$ цепи C имеет вид $b_{2j-1} - a_{2j} - a_{2j+1}$ и содержит контакты $\overline{x}_{i_j}$ и $x_{i_{j+1}}$ из блоков B_{2j} и B_{2j+1} соответственно (см. определения этих блоков в начале доказательства леммы). Но $\alpha_{i_j} = 1$, поскольку $j \leqslant q$, следовательно, контакт $\overline{x}_{i_j}$, а вместе с ним и цепь C не могут проводить на наборе $\tilde{\alpha}$. Противоречие.

2. Пусть $j \leqslant q-1$ и $v_{2j} = b_{2j}$. Тогда участок $v_{2j-1} - v_{2j} - v_{2j+1}$ цепи C имеет вид $b_{2j-1} - b_{2j} - a_{2j+1}$ и содержит контакты x_{i_j} и $\overline{x}_{i_{j+1}}$ из блоков B_{2j} и B_{2j+1} соответственно. Но $\alpha_{i_{j+1}} = 1$, поскольку $j+1 \leqslant q$, следовательно, контакт $\overline{x}_{i_{j+1}}$, а вместе с ним и цепь C не могут проводить на наборе $\tilde{\alpha}$. Противоречие.

3. Пусть $j \geqslant q$ и $v_{2j} = a_{2j}$. Тогда участок $v_{2j-1} - v_{2j} - v_{2j+1}$ цепи C имеет вид $b_{2j-1} - a_{2j} - a_{2j+1}$ и содержит контакты $\overline{x}_{i_{j+1}}$ и $x_{i_{j+2}}$ из блоков B_{2j} и B_{2j+1} соответственно (см. определения этих блоков в начале доказательства леммы). Но $\alpha_{i_{j+2}} = 0$, поскольку $j+2 \geqslant q+1$, следовательно, контакт $x_{i_{j+2}}$, а вместе с ним и цепь C не могут проводить на наборе $\tilde{\alpha}$. Противоречие.

4. Пусть $j \geqslant q$ и $v_{2j} = b_{2j}$. Тогда участок $v_{2j-1} - v_{2j} - v_{2j+1}$ цепи C имеет вид $b_{2j-1} - b_{2j} - a_{2j+1}$ и содержит контакты $x_{i_{j+1}}$ и $\overline{x}_{i_{j+2}}$ из блоков B_{2j} и B_{2j+1} соответственно. Но $\alpha_{i_{j+1}} = 0$, поскольку $j+1 \geqslant q+1$, следовательно, контакт $x_{i_{j+1}}$, а вместе с ним и цепь C не могут проводить на наборе $\tilde{\alpha}$. Противоречие.

Во всех случаях получено противоречие, поэтому свойство (i) доказано.

Докажем промежуточное свойство (iv) схемы $S_{\tilde{\alpha}}$, которое будет использоваться при доказательстве свойств (ii), (iii): функции проводимости между вершинами a_{2j-1} и $a_{2j'-1}$, а также между вершинами b_{2j-1} и $b_{2j'-1}$ в этой схеме тождественно равны 1 для любых $j, j' \in \{1, \ldots, n-2\}$.

Достаточно доказать свойство (iv) для случая $j' = j + 1$. Между вершинами a_{2j-1} и a_{2j+1} в схеме $S_{\tilde{\alpha}}$ есть, в частности, цепи $a_{2j-1} - a_{2j} -$

a_{2j+1} и $a_{2j-1} - b_{2j} - a_{2j+1}$. В силу определения блоков B_{2j} и B_{2j+1} первая из этих цепей содержит два контакта x_t, где

$$t = \begin{cases} i_{j+1}, & \text{если } j \leqslant q-1, \\ i_{j+2}, & \text{если } j \geqslant q, \end{cases}$$

а вторая цепь — два контакта $\overline{x}_t$. Далее, между вершинами b_{2j-1} и b_{2j+1} в схеме $S_{\tilde{\alpha}}$ есть, в частности, цепи $b_{2j-1} - b_{2j} - b_{2j+1}$ и $b_{2j-1} - a_{2j} - b_{2j+1}$. В силу определения блоков B_{2j} и B_{2j+1} первая из этих цепей содержит два контакта $x_{t'}$, где

$$t' = \begin{cases} i_j, & \text{если } j \leqslant q-1, \\ i_{j+1}, & \text{если } j \geqslant q, \end{cases}$$

а вторая цепь — два контакта $\overline{x}_{t'}$. Таким образом, функции проводимости между вершинами a_{2j-1} и $a_{2j'-1}$, а также между вершинами b_{2j-1} и $b_{2j'-1}$ в рассматриваемой схеме не меньше $x_t \vee \overline{x}_t \equiv 1$ и $x_{t'} \vee \overline{x}_{t'} \equiv 1$ соответственно, т. е. тождественно равны 1. Свойство (iv) доказано.

Докажем свойство (ii). В силу свойства (iv) и нечётности m достаточно доказать, что на наборе $\tilde{\alpha}$ есть проводимость между вершинами b_0 и b_1 схемы $S_{\tilde{\alpha}}$, а это утверждение очевидно, так как данные две вершины по определению блока B_1 соединены контактом x_{i_1}, проводящим на указанном наборе.

Докажем свойство (iii). Компоненты набора $\tilde{\tau}$ обозначим через $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $q \geqslant 2$ и $\tau_{i_j} \neq \tau_{i_{j+1}}$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, q-1\}$. В силу определения блока B_1 вершина b_1 в схеме $S_{\tilde{\alpha}}$ соединена с вершинами a_0 и b_0 контактами $\overline{x}_{i_1}$ и x_{i_1} соответственно, один из которых проводит на наборе $\tilde{\tau}$. Поэтому достаточно доказать, что в этой схеме на указанном наборе есть проводимость между вершиной b_1 и каждой из вершин a_m, b_m. В силу свойства (iv) вершины b_1, a_m и b_m в предыдущем предложении можно заменить на b_{2j-1}, a_{2j+1} и b_{2j+1} соответственно. Проводимость между вершинами b_{2j-1} и b_{2j+1} есть по этому же свойству; исследуем проводимость между вершинами b_{2j-1} и a_{2j+1}. Между ними в схеме $S_{\tilde{\alpha}}$ есть, в частности, цепи $b_{2j-1} - a_{2j} - a_{2j+1}$ и $b_{2j-1} - b_{2j} - a_{2j+1}$. По определению блоков B_{2j} и B_{2j+1} первая из этих цепей содержит по одному контакту $\overline{x}_{i_j}$ и $x_{i_{j+1}}$, а вторая цепь — по одному контакту x_{i_j} и $\overline{x}_{i_{j+1}}$. Одна из них проводит на наборе $\tilde{\tau}$, так как $\tau_{i_j} \neq \tau_{i_{j+1}}$. Случай 1 разобран.

2. Пусть $q \leqslant n-3$ и $\tau_{i_{j+1}} \neq \tau_{i_{j+2}}$ для некоторого $j \in \{q, \ldots, n-3\}$. Так же, как в случае 1, достаточно доказать наличие проводимости между вершинами b_{2j-1} и a_{2j+1} в схеме $S_{\tilde{\alpha}}$ на наборе $\tilde{\tau}$. Между указанными вершинами есть, в частности, цепи $b_{2j-1}-a_{2j}-a_{2j+1}$ и $b_{2j-1}-b_{2j}-a_{2j+1}$. По определению блоков B_{2j} и B_{2j+1} первая из этих цепей содержит по одному контакту $\overline{x}_{i_{j+1}}$ и $x_{i_{j+2}}$, а вторая цепь — по одному контакту $x_{i_{j+1}}$ и $\overline{x}_{i_{j+2}}$. Одна из них проводит на наборе $\tilde{\tau}$, так как $\tau_{i_{j+1}} \neq \tau_{i_{j+2}}$. Случай 2 разобран.

3. Отрицание объединения случаев 1 и 2: пусть $\tau_{i_1} = \ldots = \tau_{i_q}$ и $\tau_{i_{q+1}} = \ldots = \tau_{i_{n-1}}$. Тогда $\tau_{i_1} = \ldots = \tau_{i_q} = 0$ и $\tau_{i_{q+1}} = \ldots = \tau_{i_{n-1}} = 1$, поскольку $\tilde{\tau} \notin \{\tilde{\alpha}, (\tilde{0}^{n-1}), (\tilde{1}^{n-1})\}$. В силу определения блока B_1 вершина a_1 в схеме $S_{\tilde{\alpha}}$ соединена с вершинами a_0 и b_0 контактами $x_{i_{n-1}}$ и $\overline{x}_{i_1}$ соответственно, каждый из которых проводит на наборе $\tilde{\tau}$; кроме того, вершина b_1 соединена с вершинами a_0 и b_0 контактами $\overline{x}_{i_1}$ и x_{i_1} соответственно, один из которых проводит на наборе $\tilde{\tau}$. Поэтому на указанном наборе есть проводимость либо между вершинами из каждой из пар (a_0, a_1), (a_0, b_1), либо между вершинами из каждой из пар (b_0, a_1), (b_0, b_1). Осталось заметить, что по свойству (iv) есть проводимость между вершинами a_1 и a_m, а также между вершинами b_1 и b_m. Случай 3 разобран. Свойство (iii), а вместе с ним лемма 4 доказаны. $\square$

Сложность построенной схемы $S_{\tilde{\alpha}}$ равна $4(2n-5) = 8n-20$.

Лемма 5. *Пусть $n \geqslant 3$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ — произвольные булевы константы, не все из которых равны между собой; $\tilde{\sigma}_0 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0)$, $\tilde{\sigma}_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 1)$ и M — одно из множеств $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$, $\{\tilde{\sigma}_0\}$, $\{\tilde{\sigma}_1\}$. Тогда существует $L_{(n)}$-схема S_M, обладающая следующими свойствами:*

(v) *на любом наборе из множества M проводимость между полюсами схемы S_M из любой из пар (a_0, a_m), (a_0, b_m), (b_0, a_m), (b_0, b_m) отсутствует;*

(vi) *на любом двоичном наборе $\tilde{\pi}$ длины n, не принадлежащем множеству $M \cup \{(\tilde{0}^n), (\tilde{0}^{n-1}, 1), (\tilde{1}^{n-1}, 0), (\tilde{1}^n)\}$, в схеме S_M есть проводимости либо между полюсами из каждой из пар (a_0, a_m), (a_0, b_m), либо между полюсами из каждой из пар (b_0, a_m), (b_0, b_m).*

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$, а i и j — такие индексы от 1 до $n-1$, что $\alpha_i = 1$ и $\alpha_j = 0$. По лемме 4 существует $L_{(n)}$-схема $S_{\tilde{\alpha}}$, составленная из $2n-5$ $L_{(n)}$-блоков, содержащая только контакты переменных из множества $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ и обладающая свойствами (i)–(iii). Пусть $\tilde{\pi} = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ (в формулировке свойства (vi)) и $\tilde{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$.

Тогда

$$\tilde{\tau} \notin \{(\tilde{0}^{n-1}), (\tilde{1}^{n-1})\}. \tag{5}$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $M = \{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$. Определим $L_{(n)}$-схему S_M следующим образом: полюса a_0 и b_0 схемы S_M совпадают с полюсами соответственно a_0 и b_0 схемы $S_{\tilde{\alpha}}$; полюса a_{2n-5} и b_{2n-5} схемы $S_{\tilde{\alpha}}$ совпадают с полюсами соответственно A_1 и A_2 $L_{(n)}$-блока B_m вида $B^{i,j}_{i,j}$, где $m = 2n-4$; полюса a_m и b_m схемы S_M совпадают с полюсами соответственно A_3 и A_4 блока B_m (см. рис. 7).

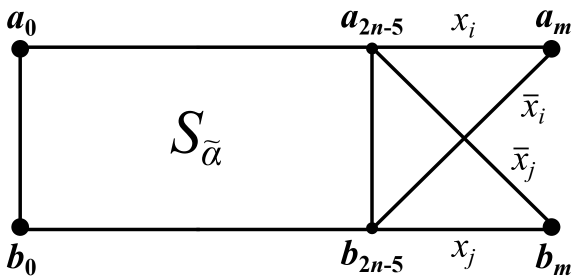

Рис. 7. Схема S_M в случае 1

Предположим, что свойство (v) не выполнено, т. е. в схеме S_M есть несамопересекающаяся цепь C между её полюсами из какой-то из пар (a_0, a_m), (a_0, b_m), (b_0, a_m), (b_0, b_m), проводящая на наборе $\tilde{\sigma}_\beta$ для некоторого $\beta \in \{0, 1\}$. Пусть $v \in \{a_0, b_0\}$ — один из концов этой цепи. Очевидно, что в ней можно выделить максимальный по длине участок, начинающийся с вершины v, содержащийся целиком в подсхеме $S_{\tilde{\alpha}}$ и проходящий через какую-то вершину $v' \in \{a_{2n-5}, b_{2n-5}\}$. Из свойства (i) схемы $S_{\tilde{\alpha}}$ и того, что первые $n-1$ компонент наборов $\tilde{\sigma}_\beta$ и $\tilde{\alpha}$ совпадают, вытекает, что обязательно $v = b_0$, $v' = b_{2n-5}$. Вершина v' в силу максимальности выделенного участка инцидентна в цепи C некоторому контакту, не лежащему в подсхеме $S_{\tilde{\alpha}}$, а значит, принадлежащему блоку B_m. Это один из контактов $[b_{2n-5}, a_m]$, $[b_{2n-5}, b_m]$, т. е. один из контактов $\overline{x}_i$, x_j. Но ни один из них не проводит на наборе $\tilde{\sigma}_\beta$, поскольку $\alpha_i = 1$ и $\alpha_j = 0$; противоречие. Свойство (v) доказано.

Докажем свойство (vi). Заметим, что $\tilde{\tau} \notin \{\tilde{\alpha}, (\tilde{0}^{n-1}), (\tilde{1}^{n-1})\}$ в силу (5) и соотношения $\tilde{\pi} \notin M$. Отсюда, из свойства (iii) схемы $S_{\tilde{\alpha}}$ и того, что первые $n-1$ компонент наборов $\tilde{\pi}$ и $\tilde{\tau}$ совпадают, следует, что в этой схеме есть проводимость на наборе $\tilde{\pi}$ между полюсами из каждой из пар (w, a_{2n-5}), (w, b_{2n-5}) для некоторого $w \in \{a_0, b_0\}$. В силу определения блока B_m вершина a_m соединена с вершинами a_{2n-5} и b_{2n-5} контактами x_i и $\overline{x}_i$ соответственно, один из которых проводит на наборе $\tilde{\pi}$; вершина b_m соединена с вершинами a_{2n-5} и b_{2n-5} контактами $\overline{x}_j$ и x_j соответственно, один из которых проводит на наборе $\tilde{\pi}$. Поэтому на указанном наборе есть проводимость между вершиной w и каждой из вершин a_m, b_m. Свойство (vi) доказано.

2. Пусть $M = \{\tilde{\sigma}_\beta\}$ для некоторого $\beta \in \{0,1\}$. Определим $L_{(n)}$-схему S_M следующим образом: полюса a_0 и b_0 схемы S_M совпадают с полюсами соответственно a_0 и b_0 схемы $S_{\tilde{\alpha}}$; полюса a_{2n-5} и b_{2n-5} схемы $S_{\tilde{\alpha}}$ совпадают с полюсами соответственно A_1 и A_2 $L_{(n)}$-блока B_{m-1} вида $B^{n,n}_{n,n}$, где $m = 2n-3$, и объявляются вершинами соответственно a_{m-1} и b_{m-1} схемы S_M; полюса A_3 и A_4 блока B_{m-1} совпадают с полюсами соответственно A_1 и A_2 $L_{(n)}$-блока B_m вида

$$\begin{cases} B^{i,j}_{i,j}, & \text{если } \beta = 1, \\ B^{j,i}_{j,i}, & \text{если } \beta = 0; \end{cases}$$

полюса a_m и b_m схемы S_M совпадают с полюсами соответственно A_3 и A_4 блока B_m (вид этой схемы при $\beta = 1$ показан на рис. 8).

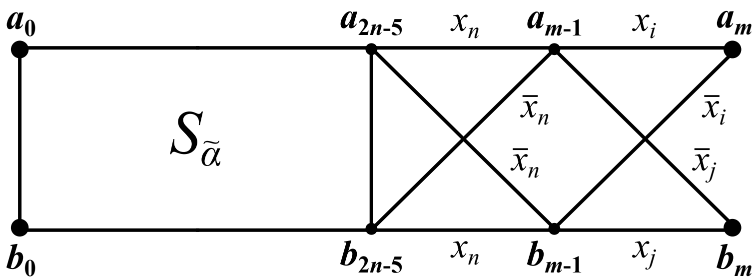

Рис. 8. Схема S_M в случае 2

Предположим, что свойство (v) не выполнено, т. е. в схеме S_M есть несамопересекающаяся цепь C между её полюсами из какой-то из пар (a_0, a_m), (a_0, b_m), (b_0, a_m), (b_0, b_m), проводящая на наборе $\tilde{\sigma}_\beta$. Пусть $v \in \{a_0, b_0\}$ — один из концов этой цепи. Очевидно, что в ней можно выделить максимальный по длине участок, начинающийся с вершины v, содержащийся целиком в подсхеме $S_{\tilde{\alpha}}$ и проходящий через какую-то вершину $v' \in \{a_{2n-5}, b_{2n-5}\}$. Из свойства (i) схемы $S_{\tilde{\alpha}}$ и того, что первые $n-1$ компонент наборов $\tilde{\sigma}_\beta$ и $\tilde{\alpha}$ совпадают, вытекает, что обязательно $v = b_0$, $v' = b_{2n-5}$. Вершина v' в силу максимальности выделенного участка инцидентна в цепи C некоторому контакту K, не лежащему в подсхеме $S_{\tilde{\alpha}}$. Это один из контактов $[b_{2n-5}, a_{m-1}]$, $[b_{2n-5}, b_{m-1}]$, принадлежащий блоку B_{m-1}, т. е. один из контактов $\overline{x}_n$, x_n. Из них на наборе $\tilde{\sigma}_\beta$ проводит только контакт x_n^β; таким образом, K — это контакт x_n^β. Рассмотрим два подслучая.

2.1. Пусть $\beta = 1$. Тогда контакт K соединяет вершины b_{2n-5} и b_{m-1} цепи C. Вершина b_{m-1} инцидентна в ней ещё одному контакту. В силу строения схемы S_M это один из контактов $[b_{m-1}, a_{2n-5}]$, $[b_{m-1}, a_m]$, $[b_{m-1}, b_m]$, т. е. один из контактов $\overline{x}_n, \overline{x}_i, x_j$ (см. определения блоков B_{m-1} и B_m). Но ни один из них не проводит на наборе $\tilde{\sigma}_\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta)$, поскольку $\beta = 1$, $\alpha_i = 1$ и $\alpha_j = 0$; противоречие.

2.2. Пусть $\beta = 0$. Тогда контакт K соединяет вершины b_{2n-5} и a_{m-1} цепи C. Вершина a_{m-1} инцидентна в ней ещё одному контакту. В силу строения схемы S_M это один из контактов $[a_{m-1}, a_{2n-5}]$, $[a_{m-1}, a_m]$, $[a_{m-1}, b_m]$, т. е. один из контактов $x_n, x_j, \overline{x}_i$ (см. определения блоков B_{m-1} и B_m). Но ни один из них не проводит на наборе $\tilde{\sigma}_\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta)$, поскольку $\beta = 0$, $\alpha_i = 1$ и $\alpha_j = 0$; противоречие. Свойство (v) доказано.

Докажем свойство (vi). Пусть вначале $\tilde{\pi} \neq \tilde{\sigma}_{\overline{\beta}}$. Заметим, что $\tilde{\pi} \neq \tilde{\sigma}_\beta$, так как $\tilde{\pi} \notin M$. Тогда $\tilde{\tau} \notin \{\tilde{\alpha}, (\tilde{0}^{n-1}), (\tilde{1}^{n-1})\}$ в силу (5) и соотношения $\tilde{\pi} \notin \{\tilde{\sigma}_\beta, \tilde{\sigma}_{\overline{\beta}}\}$. Отсюда, из свойства (iii) схемы $S_{\tilde{\alpha}}$ и того, что первые $n-1$ компонент наборов $\tilde{\pi}$ и $\tilde{\tau}$ совпадают, следует, что в этой схеме есть проводимость на наборе $\tilde{\pi}$ между полюсами из каждой из пар (w, a_{2n-5}), (w, b_{2n-5}) для некоторого $w \in \{a_0, b_0\}$. По определению блока B_{m-1} вершина a_{m-1} соединена с вершинами a_{2n-5} и b_{2n-5} контактами x_n и $\overline{x}_n$ соответственно, один из которых проводит на наборе $\tilde{\pi}$; вершина b_{m-1} соединена с вершинами a_{2n-5} и b_{2n-5} контактами $\overline{x}_n$ и x_n соответственно, один из которых проводит на наборе $\tilde{\pi}$. Поэтому на указанном наборе есть проводимость между вершиной w и каждой из вершин a_{m-1}, b_{m-1}. Далее, по определению блока B_m вершина a_m соединена с вершинами a_{m-1} и b_{m-1} контактами соответственно x_i и $\overline{x}_i$ в случае $\beta = 1$ и контактами соответственно x_j и $\overline{x}_j$ в случае $\beta = 0$, один из которых проводит на наборе $\tilde{\pi}$; вершина b_m соединена с вершинами a_{m-1} и b_{m-1} контактами соответственно $\overline{x}_j$ и x_j в случае $\beta = 1$ и контактами соответственно $\overline{x}_i$ и x_i в случае $\beta = 0$, один из которых проводит на наборе $\tilde{\pi}$. Поэтому на указанном наборе есть проводимость между вершиной w и каждой из вершин a_m, b_m, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $\tilde{\pi} = \tilde{\sigma}_{\overline{\beta}}$. Из свойства (ii) схемы $S_{\tilde{\alpha}}$ и того, что первые $n-1$ компонент наборов $\tilde{\pi}$ и $\tilde{\alpha}$ совпадают, вытекает, что на наборе $\tilde{\pi}$ есть проводимость между полюсами b_0 и b_{2n-5} схемы $S_{\tilde{\alpha}}$. Рассмотрим два подслучая.

2.1. Пусть $\beta = 1$. Тогда $\tilde{\pi} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0)$. На наборе $\tilde{\pi}$ каждый из контактов $[b_{2n-5}, a_{m-1}]$, $[a_{m-1}, a_m]$ и $[a_{m-1}, b_m]$ схемы S_M проводит, так как это контакты $\overline{x}_n$, x_i и $\overline{x}_j$ соответственно (см. определения блоков B_{m-1} и B_m). Следовательно, в данной схеме есть проводимость между полюсом b_0 и каждым из полюсов a_m, b_m, что и требовалось доказать.

2.2. Пусть $\beta = 0$. Тогда $\tilde{\pi} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 1)$. На наборе $\tilde{\pi}$ каждый из контактов $[b_{2n-5}, b_{m-1}]$, $[b_{m-1}, a_m]$ и $[b_{m-1}, b_m]$ схемы S_M проводит, так как это контакты x_n, $\overline{x}_j$ и x_i соответственно (см. определения блоков B_{m-1} и B_m). Следовательно, в данной схеме есть проводимость между полюсом b_0 и каждым из полюсов a_m, b_m. Свойство (vi), а вместе с ним лемма 5 доказаны. □

Сложность построенной схемы S_M, как видно из рис. 7 и 8, не более чем на 8 превышает сложность схемы $S_{\tilde{\alpha}}$, т. е. не превосходит $8n - 12$.

Лемма 6. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 3$, существует такая $L_{(n)}$-схема S, составленная из чётного числа m $L_{(n)}$-блоков, среди которых число блоков вида $B^{n,n}_{n,n}$ также чётно, что на любом двоичном наборе $\tilde{\tau}$ длины n, не принадлежащем множеству $M_0 = \{(\tilde{0}^n), (\tilde{0}^{n-1}, 1), (\tilde{1}^{n-1}, 0), (\tilde{1}^n)\}$, проводимости между полюсами b_0 и a_0, b_0 и a_m, b_0 и b_m схемы S равны* 0, *$f(\tilde{\tau})$, $f(\tilde{\tau})$ соответственно.*

Доказательство. Построим сначала вспомогательную $L_{(n)}$-схему S_0. По определению она однозначно задаётся числом $m_0 \in \mathbb{N}$ и $L_{(n)}$-блоками $\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_{m_0}$. Положим $m_0 = 2n - 4$, $\mathsf{B}_{2j-1} = B^{j,j}_{j,j}$, $\mathsf{B}_{2j} = B^{j+1,j}_{j+1,j}$ для каждого $j = 1, \ldots, n-2$. Вид схемы S_0 показан на рис. 9.

Докажем свойство (vii) этой схемы: функция проводимости между её вершинами b_0 и b_{2j} тождественно равна 1 для любого $j \in \{1, \ldots, n-2\}$. Достаточно доказать, что функция проводимости между вершинами b_{2j-2} и b_{2j} в схеме S_0 тождественно равна 1 для любого $j \in \{1, \ldots, n-2\}$. Между этими вершинами в данной схеме есть, в частности, цепи $b_{2j-2} - b_{2j-1} - b_{2j}$ и $b_{2j-2} - a_{2j-1} - b_{2j}$. В силу определения блоков B_{2j-1} и B_{2j} первая из этих цепей содержит два контакта x_j, а вторая — два контакта $\overline{x}_j$. Таким образом, функция проводимости между вершинами

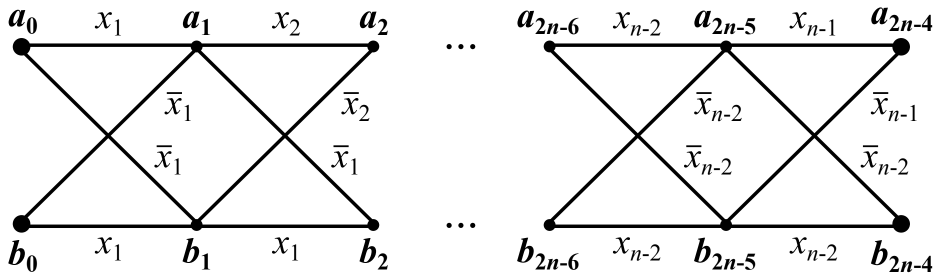

Рис. 9. Схема S_0

b_{2j-2} и b_{2j} в схеме S_0 не меньше $x_j \vee \overline{x}_j \equiv 1$, т. е. тождественно равна 1. Свойство (vii) доказано.

Докажем свойство (viii) схемы S_0: на любом двоичном наборе $\tilde{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, не принадлежащем множеству M_0, в этой схеме есть проводимость между полюсами b_0 и a_{2n-4}. Из соотношения $\tilde{\tau} \notin M_0$ следует, что не все из чисел $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ равны между собой. Пусть $j \in \{1, \ldots, n-2\}$ — максимальной такой индекс, что $\tau_j \neq \tau_{j+1}$. В силу свойства (vii) достаточно доказать, что в схеме S_0 на наборе $\tilde{\tau}$ есть проводимость между вершинами b_{2j-2} и a_{2j}, а также между вершинами a_{2j} и a_{2n-4}. Между вершинами b_{2j-2} и a_{2j} в данной схеме есть, в частности, цепи $b_{2j-2} - a_{2j-1} - a_{2j}$ и $b_{2j-2} - b_{2j-1} - a_{2j}$. В силу определения блоков B_{2j-1} и B_{2j} первая из этих цепей содержит по одному контакту $\overline{x}_j$ и x_{j+1}, а вторая цепь — по одному контакту x_j и $\overline{x}_{j+1}$. Одна из них проводит на наборе $\tilde{\tau}$, так как $\tau_j \neq \tau_{j+1}$. Между вершинами a_{2j} и a_{2n-4} в схеме S также есть проводимость на наборе $\tilde{\tau}$. Действительно, при $j = n-2$ это очевидно; в случае $j \leqslant n-3$ в силу выбора числа j выполнено соотношение $\tau_{j+1} = \tau_{j+2} = \ldots = \tau_{n-1}$, поэтому либо цепь $a_{2j} - a_{2j+1} - \ldots - a_{2n-5} - a_{2n-4}$, состоящая из контактов $x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_{n-1}$, либо цепь $a_{2j} - b_{2j+1} - a_{2j+2} - \ldots - b_{2n-5} - a_{2n-4}$, состоящая из контактов $\overline{x}_{j+1}, \overline{x}_{j+2}, \ldots, \overline{x}_{n-1}$, проводит на наборе $\tilde{\tau}$ (некоторые из этих контактов могут входить в одну из рассматриваемых цепей по два раза). Свойство (viii) доказано.

Разобьём все двоичные наборы длины n, кроме наборов из множества M_0, на $2^{n-1} - 2$ пар наборов, различающихся только в последней компоненте. Пусть d — число таких пар, в каждой из которых хотя бы один набор является нулевым набором функции $f(\tilde{x}^n)$. Если $d = 0$, то положим $\hat{S} = S_0$ и $m = 2n-4$. В случае же $d \geqslant 1$ обозначим подмножества указанных d пар наборов, состоящие из всех нулевых наборов функции f, содержащихся в этих парах, через $M_1, \ldots, M_d$ (в произвольном порядке). Тогда $|M_i| \in \{1, 2\}$ для любого $i \in \{1, \ldots, d\}$ и множество $M_1 \cup \ldots \cup M_d$ совпадает со множеством всех нулевых наборов функции $f(\tilde{x}^n)$, не лежащих в множестве M_0 (при $d = 0$ последнее утверждение также верно, если положить $M_1 \cup \ldots \cup M_d = \varnothing$). Для каждого $M \in \{M_1, \ldots, M_d\}$ по лемме 5 построим $L_{(n)}$-схему S_M, обладающую свойствами (v), (vi). Определим $L_{(n)}$-схему $\hat{S}$ следующим образом: полюса a_0 и b_0 схемы $\hat{S}$ совпадают с полюсами соответственно a_0 и b_0 схемы S_0; полюса a_{2n-4} и b_{2n-4} схемы S_0 совпадают с полюсами соответственно a_0 и b_0 схемы S_{M_1} и для удобства объявляются вершинами соответственно a^1 и b^1 схемы $\hat{S}$; для любого $i \in \{1, \ldots, d-1\}$ (при $d \geqslant 2$) полюса a_{m_i} и b_{m_i} схемы S_{M_i}, где m_i — некоторое натуральное число, совпадают с полюсами соответственно a_0 и b_0 схемы $S_{M_{i+1}}$ и для удобства объявляются вершинами соответственно a^{i+1} и b^{i+1} схемы $\hat{S}$; полюса a_m и b_m схемы $\hat{S}$ совпадают с полюсами соответственно a_{m_d} и b_{m_d} схемы S_{M_d}, где m, m_d — некоторые натуральные числа, и для удобства объявляются вершинами соответственно a^{d+1} и b^{d+1} схемы $\hat{S}$. Вид схемы $\hat{S}$ показан на рис. 10.

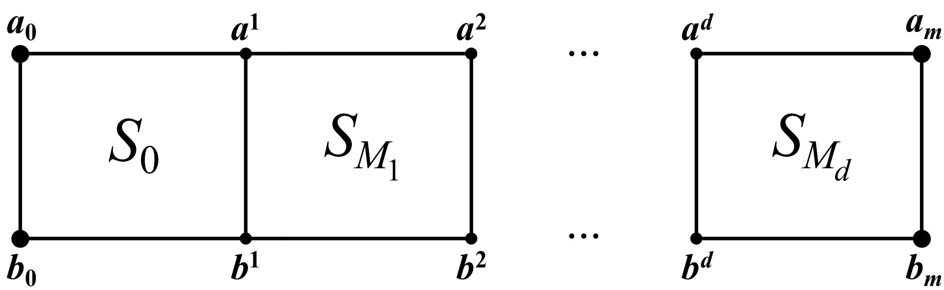

Рис. 10. Схема $\hat{S}$

Определим теперь $L_{(n)}$-схему S. Рассмотрим четыре случая.

Случай А. Схема $\hat{S}$ составлена из чётного числа $L_{(n)}$-блоков, среди которых число блоков вида $B^{n,n}_{n,n}$ также чётно. Тогда положим $S = \hat{S}$.

Случай Б. Схема $\hat{S}$ составлена из нечётного числа $L_{(n)}$-блоков, среди которых число блоков вида $B^{n,n}_{n,n}$ чётно. Определим схему S следующим образом: полюса a_0 и b_0 схемы S совпадают с полюсами соответственно a_0 и b_0 схемы $\hat{S}$; полюса a_m и b_m схемы $\hat{S}$ совпадают с полюсами соответственно A_1 и A_2 $L_{(n)}$-блока B_{m+1} вида $B_{1,1}^{1,1}$; полюса a_{m+1} и b_{m+1} схемы S совпадают с полюсами соответственно A_3 и A_4 блока B_{m+1} (см. рис. 11).

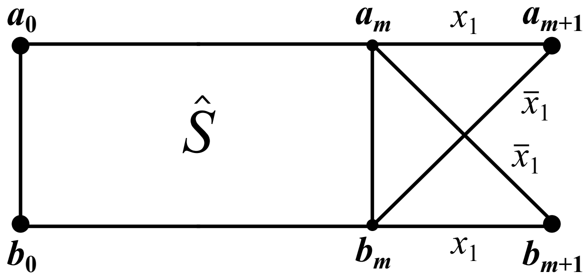

Рис. 11. Схема S в случае Б

Случай В. Схема $\hat{S}$ составлена из нечётного числа $L_{(n)}$-блоков, среди которых число блоков вида $B_{n,n}^{n,n}$ нечётно. Определим схему S следующим образом: полюса a_0 и b_0 схемы S совпадают с полюсами соответственно a_0 и b_0 схемы $\hat{S}$; полюса a_m и b_m схемы $\hat{S}$ совпадают с полюсами соответственно A_1 и A_2 $L_{(n)}$-блока B_{m+1} вида $B_{n,n}^{n,n}$; полюса a_{m+1} и b_{m+1} схемы S совпадают с полюсами соответственно A_3 и A_4 блока B_{m+1} (см. рис. 11; все контакты переменной x_1 в правом блоке надо заменить на соответствующие контакты переменной x_n).

Случай Г. Схема $\hat{S}$ составлена из чётного числа $L_{(n)}$-блоков, среди которых число блоков вида $B_{n,n}^{n,n}$ нечётно. Определим схему S следующим образом: полюса a_0 и b_0 схемы S совпадают с полюсами соответственно a_0 и b_0 схемы $\hat{S}$; полюса a_m и b_m схемы $\hat{S}$ совпадают с полюсами соответственно A_1 и A_2 $L_{(n)}$-блока B_{m+1} вида $B_{1,1}^{1,1}$; полюса A_3 и A_4 блока B_{m+1} совпадают с полюсами соответственно A_1 и A_2 $L_{(n)}$-блока B_{m+2} вида $B_{n,n}^{n,n}$ и объявляются вершинами соответственно a_{m+1} и b_{m+1} схемы S; полюса a_{m+2} и b_{m+2} схемы S совпадают с полюсами соответственно A_3 и A_4 блока B_{m+2} (см. рис. 12).

Легко видеть, что в каждом из случаев А–Г схема S является $L_{(n)}$-схемой и составлена из чётного числа $L_{(n)}$-блоков, среди которых число блоков вида $B_{n,n}^{n,n}$ также чётно.

Далее будем параллельно рассматривать случаи А–Г. Пусть $\tilde{\tau}$ — произвольный двоичный набор длины n, не принадлежащий множеству M_0. Докажем сначала, что проводимость между полюсами b_0 и a_0 схемы S на этом наборе равна 0, т. е. отсутствует. Обозначим произвольную несамопересекающуюся цепь в схеме S между этими полюсами через C, а вер-

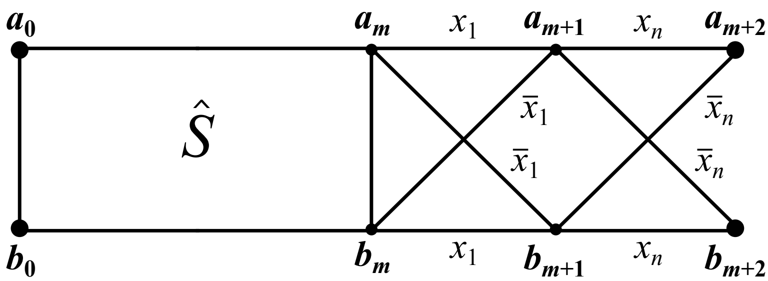

Рис. 12. Схема S в случае Г

шины этой цепи при движении от a_0 к b_0 — через $v_0, \ldots, v_s$, где $v_0 = a_0$, $v_s = b_0$. Достаточно доказать, что данная цепь не проводит на наборе $\tilde{\tau}$. Рассмотрим два случая.

1. Цепь C целиком содержится в подсхеме S_0. Пусть $t \in \{0, \ldots, 2n - 4\}$ — максимальное такое число, что среди вершин $v_0, \ldots, v_s$ есть хотя бы одна вершина $v_{s'}$, принадлежащая множеству $\{a_t, b_t\}$, где a_t, b_t — вершины $L_{(n)}$-схемы S_0. Очевидно, что $t \geqslant 1$, поэтому $0 < s' < s$. Вершина $v_{s'}$ соединена в схеме S_0 контактами с вершинами a_{t-1}, b_{t-1}, a_{t+1} и b_{t+1}, если $t \leqslant 2n - 5$, и с вершинами a_{t-1} и b_{t-1}, если $t = 2n - 4$. Отсюда и из выбора числа t следует соотношение $v_{s'-1}, v_{s'+1} \in \{a_{t-1}, b_{t-1}\}$; кроме того, $v_{s'-1} \neq v_{s'+1}$. Поэтому в цепи C обязательно одновременно содержатся либо контакты $[a_{t-1}, a_t]$ и $[b_{t-1}, a_t]$, либо контакты $[a_{t-1}, b_t]$ и $[b_{t-1}, b_t]$. В силу определения блоков B_{2j-1} и B_{2j} схемы S_0, где $j = 1, \ldots, n - 2$, это либо контакты x_j и $\overline{x}_j$, либо контакты x_{j+1} и $\overline{x}_{j+1}$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n - 2\}$, т. е. противоположные контакты. Следовательно, данная цепь не может проводить на наборе $\tilde{\tau}$.

2. Цепь C не содержится целиком в подсхеме S_0. Из вида этой подсхемы легко следует, что цепь C можно разбить на участок C_a, соединяющий вершину a_0 с какой-то вершиной w, не содержащейся в S_0, и участок C_b, соединяющий вершины w и b_0; для любого $t' \in \{0, \ldots, 2n-4\}$ на участке C_a (C_b) обязательно содержится вершина $w^a_{t'}$ (соответственно, $w^b_{t'}$), принадлежащая множеству $\{a_{t'}, b_{t'}\}$; при этом $w^a_{t'} \neq w^b_{t'}$, так как цепь C несамопересекающаяся. Отсюда вытекает, что $s > 2(2n - 3)$, $v_{t'} = w^a_{t'}$ и $v_{s-t'} = w^b_{t'}$ для любого $t' \in \{0, \ldots, 2n-4\}$ (последние два равенства можно доказать индукцией по t'); таким образом, $v_{t'}, v_{s-t'} \in \{a_{t'}, b_{t'}\}$ и $v_{t'} \neq v_{s-t'}$. Рассмотрим пять подслучаев.

2.1. Пусть $v_{t'} = a_{t'}$ для любого $t' \in \{0, \ldots, 2n-4\}$. Тогда в цепи C содержатся контакты $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{2n-5}, a_{2n-4}]$. В силу определения блоков B_{2j-1} и B_{2j} схемы S_0, где $j = 1, \ldots, n-2$, это контакты $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (некоторые из этих контактов при $n \geqslant 4$ повторяются). Хотя бы одна из первых $n-1$ компонент набора $\tilde{\tau}$ равна 0, так как $\tilde{\tau} \notin M_0$. Поэтому цепь C не может проводить на данном наборе.

2.2. Пусть $v_{t'} = a_{t'}$ для любого чётного $t' \in \{0, \ldots, 2n-4\}$ и $v_{t'} = b_{t'}$ для любого нечётного $t' \in \{0, \ldots, 2n-4\}$. Тогда в цепи C содержатся контакты $[a_0, b_1], [b_1, a_2], \ldots, [b_{2n-5}, a_{2n-4}]$. В силу определения блоков B_{2j-1} и B_{2j} схемы S_0, где $j = 1, \ldots, n-2$, это контакты $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_{n-1}$ (некоторые из этих контактов при $n \geqslant 4$ повторяются). Хотя бы одна из первых $n-1$ компонент набора $\tilde{\tau}$ равна 1, так как $\tilde{\tau} \notin M_0$. Поэтому цепь C не может проводить на данном наборе.

2.3. Пусть существует такое $t' \in \{0, \ldots, 2n-6\}$, что $v_{t'} = a_{t'}$, $v_{t'+1} = a_{t'+1}$ и $v_{t'+2} = b_{t'+2}$. Тогда в цепи C содержатся контакты $[a_{t'}, a_{t'+1}]$ и $[a_{t'+1}, b_{t'+2}]$. В силу определения блоков B_{2j-1} и B_{2j} схемы S_0, где $j = 1, \ldots, n-2$, это либо контакты x_j и $\overline{x}_j$ соответственно, либо контакты x_{j+1} и $\overline{x}_{j+1}$ соответственно для некоторого $j \in \{1, \ldots, n-2\}$, т. е. противоположные контакты. Поэтому данная цепь не может проводить на наборе $\tilde{\tau}$.

2.4. Пусть существует такое $t' \in \{0, \ldots, 2n-6\}$, что $v_{t'} = a_{t'}$, $v_{t'+1} = b_{t'+1}$ и $v_{t'+2} = b_{t'+2}$. Тогда $v_{s-t'} = b_{t'}$, $v_{s-t'-1} = a_{t'+1}$ и $v_{s-t'-2} = a_{t'+2}$, поэтому в цепи C содержатся контакты $[a_{t'}, b_{t'+1}]$, $[b_{t'+1}, b_{t'+2}]$, $[b_{t'}, a_{t'+1}]$ и $[a_{t'+1}, a_{t'+2}]$. В силу определения блоков B_{2j-1} и B_{2j} схемы S_0, где $j = 1, \ldots, n-2$, это либо контакты $\overline{x}_j$, x_j, $\overline{x}_j$ и x_{j+1} соответственно, либо контакты $\overline{x}_j$, x_{j+1}, $\overline{x}_{j+1}$ и x_{j+1} соответственно для некоторого $j \in \{1, \ldots, n-2\}$. Среди них есть противоположные контакты, поэтому данная цепь не может проводить на наборе $\tilde{\tau}$.

2.5. Пусть существует такое $t' \in \{0, \ldots, 2n-6\}$, что $v_{t'} = b_{t'}$, $v_{t'+1} = a_{t'+1}$ и $v_{t'+2} = a_{t'+2}$. Тогда $v_{s-t'} = a_{t'}$, $v_{s-t'-1} = b_{t'+1}$ и $v_{s-t'-2} = b_{t'+2}$, значит, в цепи C содержатся контакты $[b_{t'}, a_{t'+1}]$, $[a_{t'+1}, a_{t'+2}]$, $[a_{t'}, b_{t'+1}]$ и $[b_{t'+1}, b_{t'+2}]$. Этот подслучай сводится к предыдущему.

Нетрудно заметить, что подслучаи 2.1–2.5 охватывают все возможные подслучаи случая 2. Тем самым доказано, что проводимость между полюсами b_0 и a_0 схемы S на наборе $\tilde{\tau}$ равна 0.

Обозначим через m' число $L_{(n)}$-блоков в схеме S (в силу построения этой схемы $m' \in \{m, m+1, m+2\}$). Докажем, что проводимости между полюсами b_0 и $a_{m'}$, а также между полюсами b_0 и $b_{m'}$ схемы S на наборе $\tilde{\tau}$ равны $f(\tilde{\tau})$. Рассмотрим два случая.

1'. Пусть $f(\tilde{\tau}) = 0$. Тогда $d \geqslant 1$ и $\tilde{\tau} \in M_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, d\}$. Предположим, что на наборе $\tilde{\tau}$ в схеме S есть несамопересекающаяся проводящая цепь между полюсами b_0 и v для некоторого $v \in \{a_{m'}, b_{m'}\}$. Очевидно, что в указанной цепи можно выбрать участок, соединяющий одну из вершин a^i, b^i с одной из вершин a^{i+1}, b^{i+1} и лежащий целиком внутри подсхемы S_{M_i}, однако это противоречит выполнению свойства (v) для схемы S_{M_i} с учётом того, что вершины a^i, b^i, a^{i+1} и b^{i+1} совпадают с полюсами a_0, b_0, a_{m_i} и b_{m_i} данной схемы соответственно. Поэтому проводимости между полюсами b_0 и $a_{m'}$, а также между полюсами b_0 и $b_{m'}$ схемы S на наборе $\tilde{\tau}$ равны $0 = f(\tilde{\tau})$, что и требовалось доказать.

2'. Пусть $f(\tilde{\tau}) = 1$. Докажем свойство (ix) схемы $\hat{S}$: в этой схеме на наборе $\tilde{\tau}$ есть проводимость между полюсами b_0 и a_m, а также между полюсами b_0 и b_m. В силу свойств (vii), (viii) в подсхеме S_0 есть проводимость между полюсами b_0 и b_{2n-4}, а также между полюсами b_0 и a_{2n-4}. Если $d = 0$, то $\hat{S} = S_0$ и $m = 2n - 4$, откуда следует требуемое утверждение. В случае $d \geqslant 1$ имеем $\tilde{\tau} \notin M_1 \cup \ldots \cup M_d$. В силу свойства (vi) в подсхеме S_{M_d} есть проводимость между её полюсами v^d и a_m, а также между её полюсами v^d и b_m для некоторого $v^d \in \{a^d, b^d\}$. В случае $d \geqslant 2$ в силу свойства (vi) в подсхеме $S_{M_{d-1}}$ есть проводимость между её полюсами v^{d-1} и v^d для некоторого $v^{d-1} \in \{a^{d-1}, b^{d-1}\}$. В случае $d \geqslant 3$ в силу свойства (vi) в подсхеме $S_{M_{d-2}}$ есть проводимость между её полюсами v^{d-2} и v^{d-1} для некоторого $v^{d-2} \in \{a^{d-2}, b^{d-2}\}$, и т. д. В итоге получаем, что в схеме $\hat{S}$ есть проводимость между вершинами v^1 и a_m, а также между вершинами v^1 и b_m для некоторого $v^1 \in \{a^1, b^1\} = \{a_{2n-4}, b_{2n-4}\}$. Выше было показано, что в подсхеме S_0 есть проводимость между полюсами b_0 и v^1. Таким образом, в схеме $\hat{S}$ есть проводимость между полюсами b_0 и a_m, а также между полюсами b_0 и b_m. Свойство (ix) доказано.

В случае А в силу равенства $S = \hat{S}$ получаем, что проводимости между полюсами b_0 и $a_{m'}$, а также между полюсами b_0 и $b_{m'}$ схемы S на наборе $\tilde{\tau}$ равны $1 = f(\tilde{\tau})$, что и требовалось доказать.

В случае Б в силу определения блока B_{m+1} вершина a_{m+1} соединена в схеме S с вершинами a_m и b_m контактами x_1 и $\overline{x}_1$ соответственно, один из которых проводит на наборе $\tilde{\tau}$; вершина b_{m+1} соединена с вершинами a_m и b_m контактами $\overline{x}_1$ и x_1 соответственно, один из которых проводит на наборе $\tilde{\tau}$. С учётом свойства (ix) в схеме S на указанном наборе проводимость между вершиной b_0 и каждым из полюсов a_{m+1}, b_{m+1} равна $1 = f(\tilde{\tau})$, что и требовалось доказать.

В случае В требуемое утверждение доказывается аналогично случаю Б с заменой контактов x_1 и $\overline{x}_1$ на контакты x_n и $\overline{x}_n$ соответственно.

В случае Г по аналогии со случаем Б устанавливается, что в схеме S на наборе $\tilde{\tau}$ есть проводимость между вершиной b_0 и каждой из вершин a_{m+1}, b_{m+1}. В силу определения блока B_{m+2} вершина a_{m+2} соединена в этой схеме с вершинами a_{m+1} и b_{m+1} контактами x_n и $\overline{x}_n$ соответственно, один из которых проводит на наборе $\tilde{\tau}$; вершина b_{m+2} соединена с вершинами a_{m+1} и b_{m+1} контактами $\overline{x}_n$ и x_n соответственно, один из которых проводит на наборе $\tilde{\tau}$. Поэтому в схеме S на указанном наборе проводимость между вершиной b_0 и каждым из полюсов a_{m+2}, b_{m+2} равна $1 = f(\tilde{\tau})$, что и требовалось доказать.

Во всех случаях доказано, что проводимости между полюсами b_0 и a_m, а также между полюсами b_0 и b_m схемы S на наборе $\tilde{\tau}$ равны $f(\tilde{\tau})$. Лемма 6 доказана. $\square$

Оценим сверху сложности схем, построенных в ходе доказательства леммы 6. Сложность схемы S_0 равна $4(2n-4) = 8n-16$. Сложность каждой из схем $S_{M_1}, \ldots, S_{M_d}$ (при $d \geqslant 1$) не превосходит $8n-12$. Из определения числа d следует, что $d \leqslant 2^{n-1}-2$. Поэтому сложность схемы $\hat{S}$ не превосходит

$$8n-16+d(8n-12) \leqslant 8n-16+(2^{n-1}-2)(8n-12) = (4n-6)\cdot 2^n - 8n+8$$

(см. рис. 10). Наконец, сложность схемы S не более чем на 8 превышает сложность схемы $\hat{S}$ (см. разбор случаев А–Г и рис. 11, 12), т. е. не превосходит $(4n-6)\cdot 2^n - 8n + 16$.

Лемма 7. *Любую булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 3$, удовлетворяющую условиям $f(\tilde{0}^n) = f(\tilde{1}^n) = 1$, $f(\tilde{0}^{n-1}, 1) = f(\tilde{1}^{n-1}, 0) = 0$, можно реализовать $L'_{(n)}$-схемой.*

Доказательство. В силу леммы 6 существует такая $L_{(n)}$-схема S, составленная из чётного числа m $L_{(n)}$-блоков, среди которых число блоков вида $B^{n,n}_{n,n}$ также чётно, что на любом двоичном наборе $\tilde{\tau}$ длины n, не принадлежащем множеству $M_0 = \{(\tilde{0}^n), (\tilde{0}^{n-1}, 1), (\tilde{1}^{n-1}, 0), (\tilde{1}^n)\}$, проводимости между полюсами b_0 и a_0, b_0 и a_m, b_0 и b_m схемы S равны 0, $f(\tilde{\tau})$, $f(\tilde{\tau})$ соответственно. Пусть S' — контактная схема с полюсами b_0 и a_m, получающаяся из схемы S добавлением вершины c_1 и соединением её с полюсами b_m и a_0 схемы S контактами x_1 и x_n соответственно, а также добавлением вершины c_2 и соединением её с полюсами b_m и a_0 схемы S контактами $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_n$ соответственно (см. рис. 3). Тогда по определению S' является $L'_{(n)}$-схемой.

Докажем, что схема S' реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Для этого достаточно доказать, что функция проводимости $h(\tilde{x}^n)$ данной схемы на произвольном двоичном наборе $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ принимает значение $f(\tilde{\sigma})$. Рассмотрим четыре случая.

1. Пусть $f(\tilde{\sigma}) = 1$ и $\tilde{\sigma} \notin M_0$. Тогда проводимость между полюсами b_0 и a_m схемы S на наборе $\tilde{\sigma}$ равна $f(\tilde{\sigma}) = 1$. Следовательно, в подсхеме S, а значит, и в схеме S' есть проводящая на этом наборе цепь между полюсами b_0 и a_m, откуда

$$h(\tilde{\sigma}) = 1 = f(\tilde{\sigma}).$$

2. Пусть $f(\tilde{\sigma}) = 0$ и $\tilde{\sigma} \notin M_0$. Тогда проводимости между полюсами b_0 и a_0, b_0 и a_m, b_0 и b_m схемы S на наборе $\tilde{\sigma}$ равны 0, $f(\tilde{\sigma}) = 0$, $f(\tilde{\sigma}) = 0$ соответственно, т. е. в подсхеме S нет проводящей на этом наборе цепи ни между какой из пар вершин b_0 и a_0, b_0 и a_m, b_0 и b_m. Добавление к схеме S контактов $[a_0, c_1]$, $[c_1, b_m]$, $[a_0, c_2]$ и $[c_2, b_m]$ для получения из неё схемы S' никак не повлияет на это свойство. Следовательно, в схеме S' нет ни одной проводящей на наборе $\tilde{\sigma}$ цепи между её полюсами b_0 и a_m, откуда

$$h(\tilde{\sigma}) = 0 = f(\tilde{\sigma}).$$

3. Пусть $f(\tilde{\sigma}) = 1$ и $\tilde{\sigma} \in M_0$. Тогда $\tilde{\sigma} \in \{(\tilde{0}^n), (\tilde{1}^n)\}$ и в силу леммы 3 схема S' проводит на наборе $\tilde{\sigma}$, откуда

$$h(\tilde{\sigma}) = 1 = f(\tilde{\sigma}).$$

4. Пусть $f(\tilde{\sigma}) = 0$ и $\tilde{\sigma} \in M_0$. Тогда $\tilde{\sigma} \in \{(\tilde{0}^{n-1}, 1), (\tilde{1}^{n-1}, 0)\}$ и в силу леммы 3 схема S' не проводит на наборе $\tilde{\sigma}$, откуда

$$h(\tilde{\sigma}) = 0 = f(\tilde{\sigma}).$$

Лемма 7 доказана. □

Сложность построенной схемы S' на 4 превышает сложность схемы S, а значит, не превосходит $(4n - 6) \cdot 2^n - 8n + 20 < 4n \cdot 2^n$ (напомним, что $n \geqslant 3$).

6. Основные теоремы

В теореме 1 описаны все булевы функции f, для которых $D(f) = 0$, $D(f) = 1$ (таких нет), $D(f) = 2$ и $D(f) = 3$. Теорема 2 даёт описание достаточно обширного класса булевых функций f, для которых $D(f) = 4$.

Теорема 2. *Пусть для булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 3$, существует такой индекс $i \in \{1, \ldots, n\}$ и такие булевы константы $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, что*

$$f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = f(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n) = 1, \tag{6}$$

$$f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \overline{\sigma}_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) = f(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_{i-1}, \sigma_i, \overline{\sigma}_{i+1}, \ldots, \overline{\sigma}_n) = 0. \tag{7}$$

Тогда $D(f) = 4$.

Доказательство. Докажем неравенство $D(f) \leqslant 4$. Рассмотрим функцию $f'(\tilde{x}^n) = f(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$. Тогда $f(\tilde{x}^n) = f'(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$ и функция $f(\tilde{x}^n)$ родственна функции $f'(\tilde{x}^n)$. В силу леммы 1 достаточно доказать неравенство $D(f') \leqslant 4$. Рассмотрим теперь функцию $f''(\tilde{x}^n) = f'(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_i)$, получающуюся из функции f' перестановкой переменных x_i и x_n (в случае $i = n$ полагаем $f'' = f'$). Тогда $f'(\tilde{x}^n) = f''(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_i)$ и функция $f'(\tilde{x}^n)$ родственна функции $f''(\tilde{x}^n)$. В силу леммы 1 достаточно доказать неравенство $D(f'') \leqslant 4$. Заметим, что

$$\begin{gathered}
f''(\tilde{0}^n) = f'(\tilde{0}^n) = f(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n) = 1, \\
f''(\tilde{1}^n) = f'(\tilde{1}^n) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1, \\
f''(\tilde{0}^{n-1}, 1) = f'(0^{i-1}, 1, 0^{n-i}) = f(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_{i-1}, \sigma_i, \overline{\sigma}_{i+1}, \ldots, \overline{\sigma}_n) = 0, \\
f''(\tilde{1}^{n-1}, 0) = f'(1^{i-1}, 0, 1^{n-i}) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \overline{\sigma}_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) = 0,
\end{gathered}$$

а в таком случае требуемое неравенство следует из леммы 7, применяемой для функции $f''(\tilde{x}^n)$, и леммы 3.

Докажем теперь, что $D(f) \geqslant 4$. Из (6), (7) следуют соотношения

$$\begin{gathered}
f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \neq f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \overline{\sigma}_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n), \\
f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \neq f(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_{i-1}, \sigma_i, \overline{\sigma}_{i+1}, \ldots, \overline{\sigma}_n),
\end{gathered}$$

откуда вытекает, что функция f существенно зависит от переменной x_i и хотя бы от одной из переменных из множества $\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \{x_i\}$. Предположим, что $D(f) \leqslant 3$. Тогда в силу теоремы 1 и предыдущего предложения функция f существенно зависит ровно от двух переменных: x_i и x_j для некоторого $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ и родственна одной из функций x_1x_2, $x_1 \vee x_2$. Поэтому существует такая булева функция $\varphi(x, y)$, что $f(\tilde{x}^n) = \varphi(x_i, x_j)$. Тогда из (6), (7) получаем

$$\begin{gathered}
\varphi(\sigma_i, \sigma_j) = \varphi(\overline{\sigma}_i, \overline{\sigma}_j) = 1, \\
\varphi(\sigma_i, \overline{\sigma}_j) = \varphi(\overline{\sigma}_i, \sigma_j) = 0.
\end{gathered}$$

Для любых $\sigma_i, \sigma_j \in \{0,1\}$ из последних двух соотношений следует, что $\varphi(x,y) \in \{x \oplus y, x \sim y\}$, поэтому $f(\tilde{x}^n) \in \{x_i \oplus x_j, x_i \sim x_j\}$. Но ни одна из функций $x_i \oplus x_j$, $x_i \sim x_j$ не родственна ни одной из функций $x_1 x_2$, $x_1 \vee x_2$; противоречие. Таким образом, $D(f) \geqslant 4$, а с учётом ранее установленного неравенства $D(f) \leqslant 4$ получаем равенство $D(f) = 4$. Теорема 2 доказана. □

Из доказательства неравенства $D(f'') \leqslant 4$ в теореме 2, верхней оценки сложности схемы S', приведённой в конце предыдущего раздела, и перехода от схемы S_1 к схеме S_2 в доказательстве леммы 1 легко вытекает, что любую булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, удовлетворяющую условиям теоремы 2, можно реализовать неизбыточной контактной схемой сложности менее $4n \cdot 2^n$, допускающей ЕПТ длины 4.

Теорема 3. *Для почти всех булевых функций f от n переменных справедливо равенство $D(f) = 4$.*

Доказательство. Пусть $n \geqslant 3$. Нетрудно видеть, что множество всех двоичных наборов длины n можно разбить на 2^{n-2} попарно непересекающихся упорядоченных четвёрок наборов

$$\begin{aligned} U_{\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-1}} = ((1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-1},1),(1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-1},0),\\ (0,\overline{\sigma}_2,\ldots,\overline{\sigma}_{n-1},1),(0,\overline{\sigma}_2,\ldots,\overline{\sigma}_{n-1},0)), \end{aligned}$$

где $\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-1}$ — булевы константы, образующие все возможные комбинации. Пусть F_n — множество булевых функций от n переменных, не принимающих ни на одной из этих четвёрок наборов ни одну из четвёрок значений $(1,0,0,1)$, $(0,1,1,0)$. Любая булева функция $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащая множеству F_n, удовлетворяет либо соотношениям

$$\begin{aligned} f(1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-1},1) = f(0,\overline{\sigma}_2,\ldots,\overline{\sigma}_{n-1},0) = 1,\\ f(1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-1},0) = f(0,\overline{\sigma}_2,\ldots,\overline{\sigma}_{n-1},1) = 0, \end{aligned}$$

либо соотношениям

$$\begin{aligned} f(1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-1},0) = f(0,\overline{\sigma}_2,\ldots,\overline{\sigma}_{n-1},1) = 1,\\ f(1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-1},1) = f(0,\overline{\sigma}_2,\ldots,\overline{\sigma}_{n-1},0) = 0 \end{aligned}$$

для некоторых $\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-1} \in \{0,1\}$. Тогда функция $f(\tilde{x}^n)$ удовлетворяет условию теоремы 2 при $i = n$ и $\sigma_1 = 1$ для некоторого $\sigma_n \in \{0,1\}$, поэтому $D(f) = 4$.

Найдём мощность множества F_n. На каждой из 2^{n-2} четвёрок наборов $U_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-2}}$ любая функция из этого множества может принимать любую из $2^4 - 2 = 14$ четвёрок значений. Следовательно, $|F_n| = 14^{2^{n-2}}$. Тогда

$$\frac{|F_n|}{2^{2^n}} = \frac{14^{2^{n-2}}}{16^{2^{n-2}}} = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n-2}} \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

Таким образом, отношение числа булевых функций из множества F_n к общему числу булевых функций от n переменных $\left(2^{2^n}\right)$ стремится к 0 при $n \to \infty$. Выше было показано, что для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащей множеству F_n, выполнено равенство $D(f) = 4$, откуда следует справедливость теоремы 3. $\square$

7. Заключение

Описанный в работе для почти всех булевых функций от n переменных метод синтеза реализующих их контактных схем, допускающих единичные проверяющие тесты длины 4 относительно обрывов и замыканий контактов, ввиду малой длины тестов, а значит, малого времени, необходимого для тестирования таких схем, может найти практическое применение. Сложности указанных схем при этом не превосходят $4n \cdot 2^n$, что по порядку в n^2 раз больше нижней оценки сложности реализации почти любой булевой функции от n переменных в классе контактных схем (см., например, [1, с. 60, лемма 8]).

Вместе с тем, пока не удалось получить единой верхней оценки длины минимального единичного проверяющего теста для **любой** булевой функции от n переменных, т. е. верхней оценки величины $D_{\text{ЕП}}(n)$, улучшающей оценку $D_{\text{ЕП}}(n) = O\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right)$ из [7]. Представляет интерес также изучение возможностей реализации всех или почти булевых функций от n переменных контактными схемами, допускающими короткие единичные диагностические тесты, либо контактными схемами, допускающими короткие проверяющие или диагностические тесты относительно обрывов и замыканий не более k контактов, где $k \geqslant 2$ — заданное натуральное число.

Список литературы

[1] Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.

[2] Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. — 1958. — **51**. — С. 270–360.
[3] Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Мат-лы Всесоюз. семинара по дискретн. матем. и её прилож. (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.) / Под ред. О. Б. Лупанова. — М.: Изд-во МГУ, 1986. — С. 7–12.
[4] Яблонский С. В. Некоторые вопросы надёжности и контроля управляющих систем // Матем. вопросы киберн. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.
[5] Редькин Н. П. Надёжность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992.
[6] Мадатян Х. А. Полный тест для бесповторных контактных схем // Проблемы киберн. Вып. 23. — М.: Наука, 1970. — С. 103–118.
[7] Мадатян Х. А. Построение единичных тестов для контактных схем // Сборник работ по матем. киберн. — М.: ВЦ АН СССР, 1981. — С. 77-–86.
[8] Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для контактных схем // Методы дискретн. анализа в исслед. экстрем. структур. Вып. 39. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983. — С. 80–87.
[9] Романов Д. С. О синтезе контактных схем, допускающих короткие проверяющие тесты // Уч. зап. Казан. ун-та. Физ.-матем. науки. — 2014. — **156**, кн. 3. — С. 110–115.
[10] Романов Д. С., Романова Е. Ю. О единичных проверяющих тестах для схем переключательного типа // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2015. — № 1 (33). — С. 5–23.
[11] Попков К. А. О тестах замыкания для контактных схем // Дискретн. матем. — 2016. — **28**, вып. 1. — С. 87–100.
[12] Попков К. А. О проверяющих тестах размыкания для контактных схем // Дискретн. матем. — 2017. — **29**, вып. 4. — С. 66–86.
[13] Попков К. А. О диагностических тестах размыкания для контактных схем // Дискретн. матем. — 2019. — **31**, вып. 2. — С. 124–143.
[14] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.

Short single fault detection tests for contact circuits under breaks and closures of contacts

Popkov K.A.

We consider a problem of implementation of Boolean functions by irredundant two-pole contact circuits which allow short single fault detection tests regarding breaks and closures of contacts. We describe all functions which the minimal length of such a test equals 0, 1, 2, and 3 for. We prove that, for almost all Boolean functions on n variables, this length equals 4.

Keywords: contact circuit, Boolean function, contact break, contact closure, fault detection test.