О числе максимальных надклассов в классе линейных автоматов

Часовских А.А.

Уточнены перечни предполных классов в классах линейных автоматов над конечными полями. Найден критерий конечности числа предполных надклассов для заданного множества линейных автоматов.

Ключевые слова: конечный автомат, линейный автомат, операции композиции, обратная связь, полнота, замкнутый класс, предполный класс, конечное поле.

%begindocument

Настоящая работа уточняет результат, полученный в [6]. Мы, в основном, используем определения и обозначения из этой работы.

Через E_k мы обозначаем поле, состоящее из k элементов. Как известно [3], при этом для некоторого простого числа p и натурального числа m выполнено: $k = p^m$. Множество многочленов от переменной ξ над полем E_k обозначаем $E_k[\xi]$, а поле частных для $E_k[\xi]$ — через $E_k(\xi)$. Поле $E_k(\xi)$ содержит подкольцо $E'_k(\xi)$, состоящее из дробей, знаменатели которых имеют ненулевой свободный член, изоморфное кольцу периодических (с предпериодом) рядов переменной ξ над полем E_k. Эти два кольца в дальнейшем мы не различаем. Множество всех формальных степенных рядов от переменной ξ над полем E_k обозначаем R_k.

Множество всех конечных автоматов, построенных из сумматора, задержек и усилителей [1] с использованием операций композиции [2], обозначим $\mathfrak{L}_k$. Рассуждениями из работы [4] можно показать, что линейный автомат с входными переменными $x_1, x_1, \ldots, x_n$ — это отображение $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, из R_k^n в R_k,

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \mu_0, \qquad (1)$$

где μ_i, $\mu_i \in E'_k(\xi)$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Если выполнено равенство (1), то через $U(f)$ будем обозначать множество $\{\ \mu_i \mid i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ \}$.

Введем следующие подмножества $\mathfrak{L}_k$.

$$T_a = \{\ f \mid f(a, a, \ldots, a) - a \in \xi R_k\ \},$$

$a \in E_k$,

$$V_1 = \{\ f \mid \text{ из (1) следует } |\{\ i \mid \mu_i(0) \neq 0\ \}| \leq 1\ \},$$

$$V_p = \left\{\ f \mid \text{ из (1) следует } \sum_{i=1}^{n} \mu_i(0) = 1\ \right\},$$

$$M_1 = \left\{\ f \mid \text{ из (1) следует } \mu_i - \mu_i(0) \in \xi^2 E'_k(\xi),\ \ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ \right\}.$$

Пусть E_{k_1}, E_{k_2}, $\ldots$, E_{k_l} — все максимальные собственные подполя в E_k. Положим:

$$P_s = \{\ f \mid \text{ из (1) следует } \mu_i(0) \in E_{k_s},\ \ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ \},$$

$s \in \{1, 2, \ldots, l\}$.

Через Ω обозначим множество автоморфизмов поля E_k. Если степень числителя дроби μ, $\mu \in E'_k(\xi)$, не превосходит степени его знаменателя, то дробь $\tilde{\mu}$, $\tilde{\mu} = \mu(1/\xi)$, содержится в $E'_k(\xi)$. В этом случае значение $\tilde{\mu}(0)$ обозначим $\Psi_0(\mu)$.

Занумеруем все неприводимые приведенные многочлены из $E_k[\xi]$,

$$p_1, p_2, \ldots,$$

так, что $p_1 = \xi$.

Если знаменатель дроби μ, $\mu \in E'_k(\xi)$, не делится на p_i, то для некоторых u и μ', $u \in E_k[\xi]$, $\mu' \in E'_k(\xi)$ имеем:

$$\mu = u + p_i \mu',\ \ \deg u < \deg p_i.$$

Многочлен u в этом случае обозначаем $\Psi_i(\mu)$

Тогда положим:

$$M_{i,\omega} = \{\ f \mid \text{ из (1) следует } \omega\left(\mu_j(0)\right) = \Psi_i(\mu),\ \ j \in \{1, 2, \ldots, n\}\ \},$$

$\omega \in \Omega$, $\ i \in \{0, 2, 3, \ldots\}$.

Мы используем множества $\tilde{M}_i$,

$$\tilde{M}_i = \{\ f \mid \text{ из (1) следует}, \ \exists \Psi_i(\mu_j),\ \ j \in \{1, 2, \ldots, n\}\ \},$$

$i \in \{0, 2, 3, \dots\}$.

Через $R_i^{(e)}$ обозначим множество автоматов f из $\tilde{M}_i$ таких, что, если f существенно зависит более чем от одной переменной, то его коэффициенты μ_j в разложении (1) удовлетворяют равенству

$$\Psi_i(\mu_j) = 0, \ \ j \in \{1, 2, \dots, n\}, \ \ i \in \{0, 2, 3, \dots\}.$$

Через $R_i^{(d)}$ обозначим множество автоматов f из $\tilde{M}_i$, для которых в разложении (1) не более одного j такого, что $\Psi_i(\mu_j) \neq 0$ и, если такой j найдется, то $\mu_j(0) \neq 0$ и для любого j', $j' \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j\}$, выполнено $\mu_{j'}(0) = 0$.

Положим:

$$J_k = \Big\{ \ T_a, V_1, V_p, P_s, M_1, M_{i,\omega}, R_i^{(\rho)} \ \mid$$
$$a \in E_k, s \in \{1, 2, \dots, l\}, i \in \{0, 2, 3, \dots\}, \omega \in \Omega, \rho \in \{e, d\} \ \Big\}.$$

Замыкание множества M по операциям композиции обозначаем $K(M)$. Множество M линейных автоматов называется замкнутым классом, если $K(M) = M$. Если $K(M) = \mathfrak{L}_k$, то M полно в $\mathfrak{L}_k$. Замкнутый класс является максимальным (предполным), если он не совпадает с $\mathfrak{L}_k$, но, добавляя к нему любой автомат из $\mathfrak{L}_k \setminus M$, получаем полное множество. В работе [5] найдены все максимальные подклассы для случая простого k. В настоящей работе максимальные подклассы построены в общем случае, что уточняет результат работы [6].

Теорема 1. *Множество J_k состоит из максимальных подклассов $\mathfrak{L}_k$ и содержит все его максимальные подклассы.*

Для заданного множества M линейных автоматов из $\mathfrak{L}_k$ элемент Θ множества J_k называется максимальным надклассом для M, если $M \subseteq \Theta$. Анализируя множество J_k, получаем следующие утверждения.

Теорема 2. *Множество M, $M \subseteq \mathfrak{L}_k$, имеет конечное число максимальных надклассов в точности тогда, когда M содержит линейный автомат с не менее чем двумя существенными переменными, и в M найдется f такой, что*

$$U(f) \setminus E_k \neq \emptyset.$$

Теорема 3. *Существует алгоритм, с использованием которого время проверки конечности числа максимальных надклассов для данного множества M, состоящего из r линейных автоматов, каждый из которых зависит не более чем от n переменных, по порядку не превосходит rn.*

Список литературы

[1] Гилл А., *Линейные последовательностные машины*, пер. с англ., «Наука», Москва, 1974, 288 с.

[2] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., *Введение в теорию автоматов*, «Наука», Москва, 1985, 320 с.

[3] Лидл Р., Нидеррайтер Г., *Конечные поля*, пер. с англ., «Мир», Москва, 1988, 430 с.

[4] Часовских А.А., "О полноте в классе линейных автоматов", *Математические вопросы кибернетики*, 1991, № 3, 140–166

[5] Часовских А.А., "Условия полноты линейно-р-автоматных функций", *Интеллектуальные системы*, **18**:3 (2014), 203–252

[6] Часовских А.А., "Приведенные критериальные системы предполных классов в классах линейных автоматов над конечными полями", *Интеллектуальные системы*, **22**:4 (2018), 115–134

On the number of maximum overclasses in the linear automata class

Chasovskikh A.A.

Updated maximale subclasses lists in linear automata classes over finite fields. A criterion is found for the finiteness of the number of precomplete overclasses for a given set of linear automata.

Keywords: finite automaton, linear automaton, operation of composition, feedback, completeness, closed class, maximum subclass, finite field.