Коды, определяющие изображения с точностью до аффинных преобразований

В.Н. Козлов

В работе представлены коды, задающие изображения с точностью до аффинных преобразований, в том числе некоторый новый код.

Ключевые слова: распознавание образов, изображения, коды изображения.

Изображением называем конечное (непустое) множество точек в евклидовых пространствах разной размерности. В частности, двумерное изображение – конечное множество точек на плоскости. Считаем, что любую фигуру можно «аппроксимировать» конечным множеством точек , которые уже сами по себе делают фигуру вполне узнаваемой. При этом если точек много, то такая совокупность точек практически неотличима от исходной фигуры. Так же можно представлять и полутоновые, черно-бело-серые изображения, при этом разная плотность точек в разных частях изображения дает разные оттенки «серого цвета». Как известно, цветное изображение можно представлять как наложение трех монохроматических (аналогов черно-бело-серых) изображений. Это означает, что совокупностями точек можно представлять и цветные изображения. Трехмерные изображения – точки в трехмерном евклидовом пространстве. Соотнесение между трехмерным изображением и двумерными, являющимися их проекциями , приводит к задачам восстановления тел по плоским проекциям и смежным задачам. Наконец, трехмерный мир в динамике можно рассматривать как четырехмерное изображение (последовательность трехмерных сцен).

Далее рассматриваются двумерные изображения, но сказанное может бытьобобщено и на случаи большей размерности.

Перенумеруем некоторым образом точки изображения A так, чтобы номера разных точек были попарно различны. Обозначим через M_A множество этих номеров. Пусть S_{mnu} и S_{kps} – площади треугольников с вершинами в тройках точек с номерами m, n, u и k, p, s и пусть

$\rho_{mnu,kps} = S_{mnu}/S_{kps}$. Полагаем, что порядок номеров в тройках не важен, сами тройки различны и при $S_{kps} = 0$ значение $\rho_{mnu,kps}$ не определено. Множество индексированных чисел $\rho_{mnu,kps}$ для всех таких пар троек обозначим через T_A . Код изображения A – пара $< M_A, T_A >$. Изображения A и B с кодами $< M_A, T_A >$ и $< M_B, T_B >$ назовем эквивалентными , если существует такая биекция $\psi\colon M_A \to M_B$, что для любых m, n, u и k, p, s из M_A выполнено $\rho_{mnu,kps} = \rho_{\psi(m)\psi(n)\psi(u),\psi(k)\psi(p)\psi(s)}$. Ясно, что эквивалентность изображений содержательно означает одинаковость их кодов с точностью до перенумерации точек.

Два изображения называем аффинно эквивалентными , если они переводимы друг в друга аффинными преобразованиями. Если все точки изображения не лежат на одной прямой или двух параллельных прямых, то изображение называем плоским.

Теорема 1 [1]. Два плоских изображения эквивалентны точно тогда, когда они аффинно эквивалентны.

Содержательно теорема 1 означает, в частности, что код изображения задает его с точностью до аффинных преобразований.

Назовем изображения A и B пропорциональными, если существует такая биекция $\psi\colon M_A \to M_B$, при которой для любых точек с номерами m, n, u из M_A (не лежащих на одной прямой), число $\rho_{mnu,\psi(m)\psi(n)\psi(u)}$ есть константа, не зависящая от выбора точек m, n, u.

Теорема [2]. Два плоских изображения пропорциональны тогда и только тогда, когда они аффинно эквивалентны.

Числа $\rho_{mnu,\psi(m)\psi(n)\psi(u)}$ из определения пропорциональности не являются элементами кода ни изображения A, ни изображения B. Однако они являются элементами кода изображения S, которое трактуется как среда, и включающего изображения A и B как части. Под этим понимается следующее. Изображение A (или B) называется частью среды S,если точки , составляющие A, есть подмножество точек из S. Если код для S есть $< M_S, T_S >$, то, очевидно, код $< M_A, T_A >$ можно получить, если собрать в M_A номера из M_S всех точек, вошедших в A , и собрав в T_A все те $\rho_{mnu,kps} = S_{mnu}/S_{kps}$ из T_S , для которых m, n, u, k, s, p вошли в M_A . Говорим в этом случае, что код $< M_A, T_A >$ есть часть кода $< M_S, T_S >$. В этом случае константные $\rho_{mnu,\psi(m)\psi(n)\psi(u)}$ из определения пропорциональности являются элементами кода среды S.

Известны [3,4] результаты о том , что для каждого выпуклого многоугольника (k вершин, $k > 2$) существует и единственен наименьший по площади эллипс, в который этот многоугольник вписывается. Используем это для построения некоторого нового кода изображения.

Лемма 1. Пусть S_t – площадь треугольника с вершинами в точках a, b, c,не лежащих на одной прямой, E– наименьший по площади эллипс, в который вписан треугольник, S_e – площадь эллипса. Тогда отношение площадей S_e и S_t есть константа , не зависящая от треугольника.

Доказательство. Аффинными преобразованиями сделаем треугольник правильным. Эти же преобразования переводят эллипс E в эллипс E'. Поскольку отношения площадей при аффинных преобразованиях сохраняются, то E' – тоже наименьший по площади эллипс, в который вписан преобразованный треугольник, и единственный. Отсюда E' – описанная окружность для правильного треугольника. Действительно, положим, что E' отличен от окружности. Тогда, в силу симметрии треугольника, существуют еще два эллипса E'' и E''' с той же (и значит, минимальной) площадью, в которые вписан треугольник, а это противоречит единственности эллипса. Отношение площадей описанной окружности и правильного треугольника и будут той константой, о которой говорится в формулировке. Лемма доказана.

Пусть теперь A – изображение, M_A^e – множество попарно различных номеров точек в A, S_{mnu}^e и S_{kps}^e – площади наименьших (по площади) эллипсов описанных вокруг треугольников с вершинами в точках соответственно m, n, u и k, p, s, и пусть $\rho_{mnu,kps}^e = S_{mnu}^e / S_{kps}^e$. Полагаем, что порядок номеров в тройках не важен, сами тройки различны и при $S_{kps}^e = 0$ значение $\rho_{mnu,kps}^e$ не определено Множество индексированных чисел $\rho_{mnu,kps}^e$ для всех таких пар троек обозначим через T_A^e. Эллипс-код изображения A – пара $< M_A^e, T_A^e >$. Изображения A и B с кодами $< M_A^e, T_A^e >$ и $< M_B^e, T_B^e >$ назовем эллипс-эквивалентными,если существует такая биекция $\psi\colon M_A^e \to M_B^e$, что для любых m, n, u и k, p, s из M_A^e выполнено $\rho_{mnu,kps}^e = \rho_{\psi(m)\psi(n)\psi(u),\psi(k)\psi(p)\psi(s)}^e$. Ясно,что эллипс-эквивалентность изображений содержательно означает одинаковость их эллипс-кодов с точностью до перенумерации точек.

Из теоремы 1 и леммы 1 с очевидностью проистекает следующее утверждение.

Теорема 3 . Два плоских изображения эллипс-эквивалентны точно тогда, когда они аффинно эквивалентны.

Список литературы

[1] В.Н. Козлов, *Введение в математическую теорию зрительного восприятия*, Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, М., 2007.

[2] В.Н. Козлов, "Алгоритмы формирования системы взаимосвязанных образов", *Интеллектуальные системы*, **18**, 2014, 99-114.

[3] Л. Данцер , Б. Грюнбаум , В. Кли, *Теорема Хелли и ее применения*, Издательство «Мир», М., 1968.

[4] В.Л. Загускин, "Об описанных и вписанных эллипсоидах экстремального объема", *Успехи математических наук*, **13**, 1958, 89-93.

Codes that define images accurate to affine transformations

V.N. Kozlov

The paper presents codes that define images with an accuracy of affine transformations, including some new code.

Keywords: pattern recognition, images, image codes.