# О графовом расширении метода резолюции для булевых формул

Боков Г.В.

В работе описывается новое расширение метода резолюции, использующее графовое представление опровержений булевых формул в конъюнктивной нормальной форме. Доказывается, что невыполнимость булевой формулы равносильна существованию для неё графового опровержения.

**Ключевые слова:** Метод резолюции, графовые опровержения, невыполнимость, булевы формулы.

## Введение

Проблема выполнимости булевых формул является классической комбинаторной проблемой. Она состоит в том, чтобы по любой заданной булевой формуле ответить на вопрос о её выполнимости, т.е. существовании такого набора значений её переменных, на котором формула принимает истинное значение. Важность этой проблемы обуславливается тем, что решение многих комбинаторных проблем удается свести к проблеме выполнимости конкретных булевых формул [1].

Есть несколько частных случаев проблемы выполнимости для ограниченных классов булевых формул. Одним из важнейших на сегодняшний день ограничений является проблема выполнимости булевых формул в конъюнктивной нормальной форме (КНФ), в которой формулы задаются как конъюнкции дизъюнктов, дизъюнкты — как дизъюнкции литералов, литералы — как переменные и их отрицания. Кук [2] и независимо Левин [3] доказали, что любую задачу, разрешимую на недетерминированной машине Тьюринга за полиномиальное время, можно эффективно свети к проблеме выполнимости булевых формул в КНФ.

Каждый набор значений переменных булевой формулы, на которых она принимает истинное значение, является простым сертификатом, удостоверяющим её выполнимость. Проблема выполнимости в этом смысле сводится к поиску простого сертификата. Как быть, если для булевой формулы не существует сертификата, удостоверяющего её выполнимость? Конечно, формула в этом случае будет невыполнима. Но, можем ли мы это эффективно проверить, т.е. можем ли мы по формуле получить простой сертификат, удостоверяющий её невыполнимость? Не смотря на то, что ответа на этот вопрос до сих пор нет, он породил целое направление в теории сложности, связанное с системами доказательств булевых формул [4].

Одной из первой систем доказательств для построения опровержений выполнимости булевых формул был метод резолюции. Метод, будучи примененным к системе дизъюнктов невыполнимой булевой формулы в КНФ, позволяет за конечное число шагов вывести пустой дизъюнкт. Стоит отметить, что число шагов на отдельных семействах формул может достигать экспоненциального размера [5]. Существует несколько расширений метода резолюции [6], в том числе те [7], для которых до сих пор ничего не известно о сложности их доказательств. В данной работе будет предложено новое расширение метода резолюции, основанное на графовом представлении опровержений булевых формул в КНФ.

## Основные определения и обозначения

*Булевы формулы* определяются с помощью логических связок $\{\neg, \wedge, \vee\}$, переменных и скобок стандартным образом:

$$A, B ::= x \mid \overline{A} \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B).$$

Для обозначения переменных мы будем использовать буквы $x, y, z$ и т.д. Заглавными буквами $A, B, F$ и т.д. будем обозначать формулы. Также мы будем опускать скобки, если их восстановление определяется контекстом и стандартным приоритетом связок: $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Обозначим через $\mathbf{Fm}(n)$ множество булевых формул с $n$ переменными.

Булева формула $F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{Fm}(n)$ над переменными $x_1, \ldots, x_n$ *выполнима*, если существуют такие $a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1\}$ значения переменных $x_1, \ldots, x_n$, на которых формула принимает значение 1, т.е.

$$F(a_1, \ldots, a_n) = 1,$$

в следующем смысле:

| $x$ | $\overline{x}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| $x$ | $y$ | $x \wedge y$ | $x \vee y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

*Литералом* называется всякая переменная $x$ или её отрицание $\overline{x}$ и обозначается через $x^a$, где $x^1 = x$ и $x^0 = \overline{x}$. Множество всех литералов обозначим через $\mathbf{Lt}$. *Дизъюнктом* называется всякая дизъюнкция литералов

$$x_1^{a_1} \vee \ldots \vee x_n^{a_n},$$

где $x_i \neq x_j$ для всех $1 \leq i < j \leq n$. Мы будем отождествлять дизъюнкты с множеством их литералов, т.е. дизъюнкты

$$l_1 \vee \ldots \vee l_n \quad \text{и} \quad l_{\sigma(1)} \vee \ldots \vee l_{\sigma(n)}$$

совпадают для любой перестановки $\sigma$. Обозначим через $\perp$ пустой дизъюнкт.

Булевой формулой в *конъюнктивной нормальной форме* (КНФ) будем называть всякую конъюнкцию дизъюнктов. Например, все следующие формулы являются булевыми формулами в КНФ:

$$x \vee y,\ x \wedge y,\ (\overline{x} \vee y) \wedge \overline{z},\ (x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{z}).$$

Мы отождествляем булевы формулы в КНФ с множеством их дизъюнктов. Через $\mathbf{CNF}(n)$ будем обозначать множество всех булевых формул из $\mathbf{Fm}(n)$ в КНФ.

Напомним, что *ориентированным ациклическим графом* называет пара $(\mathbf{V}, \mathbf{E})$, где $\mathbf{V}$ — конечное множество вершин графа и $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ — множество его ребер. Ребро $(u, v) \in \mathbf{E}$ называется *исходящим* для вершины $u$ и *входящим* для вершины $v$. Вершину, не имеющую входящих (исходящих) ребер, назовём *корневой* (*терминальной*). Путем в графе из вершины $u$ в вершину $v$ называется всякая последовательность

$$u = v_1, (v_1, v_2), v_2, \ldots, (v_{n-1}, v_n), v_n = v$$

такая, что $(v_i, v_{i+1}) \in \mathbf{E}$ для всех $1 \leq i < n$. Вершина $u$ *доминирует* вершину $v$, если всякий путь из корневой вершины в $v$ проходит через $u$. При этом вершину $u$ будем называть *доминирующей* для вершины $v$.

# Графовое расширение метода резолюции

Пусть $F$ — булева формула в КНФ. *Опровержением* формулы $F$ или просто $F$*-опровержением* будем называть ориентированный ациклический рёберно-размеченный граф $\mathcal{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}, \lambda, r)$ с функцией разметки

$$\lambda \colon \mathbf{E} \to \mathbf{Lt}$$

и единственной корневой вершиной $r \in \mathbf{V}$ такой, что выполнены следующие условия:

1) каждая нетерминальная вершина $v$ с исходящими ребрами $e_1, \ldots, e_n$ определяет дизъюнкт $F$

$$\varphi(v) = \lambda(e_1) \vee \ldots \vee \lambda(e_n) \in F;$$

2) если $e_1$, $e_2$ — входящие ребра одной и той же вершины $v$, то $\lambda(e_1) = \lambda(e_2)$. В этом случае полагаем $\lambda(v) = \lambda(e_1) = \lambda(e_2)$;

3) либо $\perp \in F$, либо для любой терминальной вершины $w$ существую такая доминирующая вершина $u$, что $\lambda(w) = \overline{\lambda(u)}$.

Формулу $F$, для которой существует $F$-опровержение, будем называть *опровержимой*. Главным результатом работы является следующая теорема.

**Теорема 1.** *Если $F \in \mathbf{CNF}(n)$, то $F$ невыполнима $\Leftrightarrow$ $F$ опровержима.*

*Доказательство.* Рассмотрим булеву формулу $F \in \mathbf{CNF}(n)$ и предположим, что $F$ невыполнима. Построим $F$-опровержение индукцией по $n$. Если $n = 0$, то $F = \perp$ и тогда любой граф вида $(\{r\}, \emptyset, \lambda, r)$ является $F$-опровержением.

Предположим, что для любой невыполнимой формулы $G \in \mathbf{CNF}(n-1)$ существует $G$-опровержение. Тогда для каждого $a \in \{0, 1\}$ рассмотрим формулу $F_a$, полученную из $F$ удалением всех дизъюнктов, содержащих литерал $x_n^{1-a}$, а также удалением всех вхождений литерала $x_n^a$ из оставшихся дизъюнктов. По предположению индукции для $F_a$ существует опровержение $\mathcal{G}_a = (\mathbf{V}_a, \mathbf{E}_a, \lambda_a, r_a)$. Пусть $v_1^a, \ldots, v_{m_a}^a$ — все вершины в $\mathcal{G}_a$, для которых $\varphi(v_i^a) \in F_a \setminus F$. Тогда $\varphi(v_i^a) \cup \{x_n^a\} \in F$ для $1 \le i \le m_a$ и $a \in \{0, 1\}$.

Определим граф $\mathcal{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}, \lambda, r_0)$, для которого $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \cup \mathbf{V}_1 \cup \{w\}$, где $w \notin \mathbf{V}_0 \cup \mathbf{V}_1$,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cup \mathbf{E}_1 \cup \{(v_i^0, r_1) \mid 1 \le i \le m_0\} \cup \{(v_i^1, w) \mid 1 \le i \le m_1\},$$

$$
\lambda(e) = \begin{cases} \lambda_a(e), & e \in \mathbf{E}_a,\ a \in \{0,1\}; \\ \overline{x}, & e = (v_i^0, r_1),\ 1 \le i \le m_0; \\ x, & e = (v_i^1, w),\ 1 \le i \le m_1. \end{cases}
$$

По построению $\mathcal{G}$ является $F$-опровержением.

В обратную сторону. Пусть $\mathcal{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}, \lambda, r)$ — $F$-опровержение. Докажем, что $F$ невыполнима индукцией по $n$. Если $n = 0$, то $\perp \in F$ и, следовательно, $F$ невыполнима.

Пусть $n > 0$ и предположение индукции верно для всех формул $G \in \mathbf{CNF}(n-1)$. Рассмотрим произвольное $a \in \{0,1\}$ и определим граф $\mathcal{G}_a$, полученный из графа $\mathcal{G}$ в результате последовательного выполнения следующих преобразований:

1) удаление всех ребер $e \in \mathbf{E}$ таких, что $\lambda(e) = x_n^a$;

2) для каждой вершины $v \in \mathbf{V}$ такой, что $x_n^{1-a} \in \varphi(v)$, удаление всех исходящих из неё ребер $e$ таких, что $\lambda(e) \neq x_n^{1-a}$;

3) удаление всех вершин и ребер графа $\mathcal{G}$, недостижимых из корневой вершины $r$.

По построению $\mathcal{G}_a$ является $F_a$-опровержением и, следовательно, $F_a$ невыполнима по предположению индукции. Из произвольности $a$ заключаем, что $F$ невыполнима. □

## Заключение

Стоит отметить, что использование графового подхода для представления доказательств не является новым. Например, в [8] с помощью графового представления доказательств в минимальной импликативной логике удалось избежать экспоненциального роста при переходе к нормальной форме.

Представляется интересным продолжит исследование предложенного графового представления опровержений булевых формул в следующем направлении. Во-первых, проверить, как с точки зрения полиномиальной сводимости соотносятся между собой метод резолюции, графовое расширение метода резолюции и метод расширенной резолюции. Во-вторых, изучить вопрос об оценке функции Шеннона размера графового опровержения невыполнимой булевой формулы от $n$ переменных в худшем случае.

## Список литературы


[1] *Karp R. M.* Reducibility among combinatorial problems // Complexity of Computer Computations, R.E. Miller and J.W. Thatcher, ed., New York (Plenum Press), 1972, pp. 85–103.

[2] *Cook S. A.* The complexity of theorem proving procedures // Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing, 1971, pp. 151–158.

[3] *Левин Л. А.* Универсальные задачи перебора // Проблемы передачи информации, т. 9, № 3, 1973, с. 115–116.

[4] *Боков Г. В.* От булевых схем к доказательству теорем // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, т. 22, № 1, с. 123–130.

[5] *Haken A.* The intractability of resolution // Theoretical Computer Science, vol. 39, 1985, pp. 297–308.

[6] *Tseitin G. C.* On the complexity of derivations in propositional calculus // In A. O. Slisenko, editor, Studies in Mathematics and Mathematical Logic, Part II, 1970, pp. 115–125.

[7] *Kullmann O.* On a generalization of extended resolution // Discrete Applied Mathematics, vol. 96–97, 1999, pp. 149–176.

[8] *Quispe-Cruz M., Haeusler E. H., Gordeev L.* Proof-graphs for minimal implicational logic // Proceedings 2013 International Workshop on Developments in Computational Models, EPTCS, vol. 144, 2014, pp. 16-–29.


### Graph based extended resolution for Boolean formulas


**Bokov G.V.**



In this article we consider a graph based extended resolution for representing refutations of Boolean formulas in conjunction normal form. We prove that a Boolean formula is unsatisfiable iff there is its graph based refutation.



*Keywords:* Resolution, graph based refutation, unsatisfiability, Boolean formulas.