

Верхняя оценка энергопотребления объемных схем, реализующих булевы операторы.

Ефимов А.А.

В данной работе рассматриваются объёмные схемы, являющиеся обобщением плоских схем в пространстве. Был рассмотрен класс схем, реализующих булевы операторы. Для этого класса получена верхняя оценка потенциала — меры мощности, равной количеству элементов схемы, выдающих единицу на данном входном наборе. Показано, что любой оператор от n переменных можно реализовать объёмной схемой, потенциал которой не превосходит $\mathcal{O}(m \cdot 2^{n/3})$, если $m \leq n$, и $\mathcal{O}(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3})$, если $m > n$.

Ключевые слова: схемы из функциональных элементов, объёмные схемы, мощность схемы, потенциал.

1. Введение

В ряде работ исследовалась сложность схем из функциональных элементов, реализующих функции алгебры логики от n аргументов. Однако, зачастую в них рассматривались схемы, в которых не накладывалось никаких ограничений на размещение элементов схемы, способ соединения и т.п. На самом деле в любой схеме, когда она располагается в пространстве, функциональные элементы имеют определенную длину, ширину и соединяются проводниками, размеры которых следует учитывать.

Данная работа посвящена объёмным схемам, которые определяются аналогично плоским схемам, но в пространстве. Впервые понятие плоской схемы было введено Кравцовым в 1967 году [1]. Коршунов в работе [2] получил оценку сложности схем из объёмных функциональных элементов (l -схем), удовлетворяющим некоторым ограничениям. Развитие теории плоских схем было связано с развитием технологии производства и

укладки реальных микросхем. Идея о том, что схемы можно укладывать друг на друга в пространстве была также известна давно, но не находила широкого применения вплоть до недавнего времени. Лишь несколько лет назад подобная технология начала использоваться, так как у инженеров закончились способы выжать лучшие характеристики из чипов прежнего размера. В частности, речь идёт о том, чтобы в будущем использовать многослойные чипы.

Основной целью данной работы является обобщение результатов Калачева [3, 4] на объёмные схемы и продолжение результатов работы [5] в случае булевых операторов. Как и в его работах, автор использует такое понятие сложности схемы, как максимальный потенциал. Он равен максимальному значению количества единиц на всех внутренних узлах схемы, взятому по всем входным наборам. Неформально говоря, потенциал показывает количество «энергии» схемы, необходимой для её функционирования. В данной работе была получена верхняя оценка потенциала для класса булевых операторов.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Э.Э. Гасанову и Г.В. Калачёву за постановку задачи и внимание к работе.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Кубическим элементом будем называть булев оператор, у которого в сумме не более шести входов и выходов, причем каждому его входу и выходу сопоставлена некоторая метка из множества $\{l, t, r, b, f, a\}$, причём метки не повторяются.

Метки будем называть сторонами элемента:

- l – левая сторона;
- r – правая сторона;
- t – верхняя сторона;
- b – нижняя сторона;
- f – передняя сторона;
- a – задняя сторона.

Кубический элемент будем изображать в виде единичного куба в пространстве. При этом входам и выходам элемента сопоставляются грани куба в соответствии с присвоенными им метками.

Метки, присвоенные входам (выходам) оператора будем называть *входами (выходами)* элемента. Метки, не присвоенные ни входам, ни выходам, будем называть *изоляторами*. Множество входов (выходов) элемента e будем обозначать $in(e)$ ($out(e)$). Входы и выходы элемента будем называть его *контактами*.

Если на всех выходах элемента реализуются тождественные функции, то будем называть элемент *коммутационным*, иначе – *логическим*.

Коммутационный элемент соответствует либо проводнику в микросхеме, либо пересечению проводов, либо тождественной функции, служащей для усиления сигнала.

Описывать элемент можно уравнениями, которые задают его оператор, заменяя все переменные в них на сопоставленные им метки (l, t, r, b, f, a) . Тогда в левой части каждого уравнения будет стоять выходная метка, а в правую часть будут входить только входные метки.

Всюду далее значок $:=$ будет обозначать «по определению равно».

За E обозначим множество всех кубических элементов.

Сетью из кубических элементов на множестве $M \subset \mathbb{Z}^3$ будем называть отображение $K : M \rightarrow E$.

Элемент $K(x, y, z)$ будем называть *элементом схемы K с координатами (x, y, z)* .

Левой, правой, верхней, нижней, передней и задней стороной элемента e с координатами (x, y, z) будем называть точки с координатами $(x - \frac{1}{2}, y, z)$, $(x + \frac{1}{2}, y, z)$, $(x, y, z + \frac{1}{2})$, $(x, y, z - \frac{1}{2})$, $(x, y + \frac{1}{2}, z)$, $(x, y - \frac{1}{2}, z)$ соответственно.

Будем говорить, что сеть K из кубических элементов корректна, если для любых элементов x и y схемы K верно, что если сторона a элемента x совпадает со стороной b элемента y , то выполнено одно из условий:

- один из элементов x, y – изолирующий,
- стороны a и b являются изоляторами,
- среди них одна является входом, другая выходом, например, a – выход, а b – вход, в таком случае будем говорить, что выход a *подключен* ко входу b .

Множество M будем называть *носителем* сети K .

Введём понятие *графа корректной сети из кубических элементов* K (будем обозначать G_K). G_K – ориентированный граф, вершинами которого являются входы и выходы элементов схемы. Если выход одного элемента подключен ко входу другого, то им будет соответствовать одна и та же вершина графа (будем говорить, что эта вершина является выходом первого элемента и входом второго). Из вершины a в вершину b ведет ребро в том и только в том случае, когда существует элемент e такой, что a является его входом, b – выходом, причем функция, реализуемая на выходе b , существенно зависит от входа a .

Объёмной схемой или *схемой из кубических элементов* на множестве $M \subset \mathbb{Z}^3$ будем называть корректную сеть из кубических элементов, в графе которой нет ориентированных циклов. Множество M будем называть *носителем* схемы K .

Длиной схемы K будем называть длину наименьшего прямоугольного параллелепипеда, содержащего все непустые элементы схемы K , обозначается $l(K)$.

Шириной схемы K будем называть ширину наименьшего прямоугольного параллелепипеда, содержащего все непустые элементы схемы K , обозначается $w(K)$.

Высотой схемы K будем называть высоту наименьшего прямоугольного параллелепипеда, содержащего все непустые элементы схемы K , обозначается $h(K)$.

Если вход (выход) элемента не подключен к выходу (входу) другого элемента, будем его называть *входом (выходом)* схемы. *Контактами* схемы K будем называть её входы и выходы, и обозначать их $In(K), Out(K)$ соответственно.

Узлами схемы K будем называть вершины графа G_K .

Если M – носитель схемы K , то величину $|M|$, равную количеству элементов в множестве M , будем называть *объёмом* схемы K и обозначать $V(K)$.

В графе G_K будем считать, что все ребра имеют вес 1. *Расстоянием между вершинами* в графе G_K будем считать длину наименьшего пути между этими вершинами. *Расстоянием между узлами* схемы будем называть расстояние между соответствующими вершинами в G_K . Расстояние от узла a до узла b на схеме K будем обозначать $\rho_K(a, b)$.

Каждой объёмной схеме K можно сопоставить схему их функциональных элементов $Circ(K)$ следующим образом:

- 1) каждой функции $f_{s,i}$, которую реализует i -й выход элемента s объёмной схемы, сопоставим функциональный элемент $e_{s,i}$, реализую-

ций $f_{s,i}$; если i -й и j -й выходы являются выходами одной и той же функции, то им будет соответствовать один и тот же функциональный элемент;

- 2) если i -й выход элемента s_1 подключен к j -му входу элемента s_2 , то соединим выход элемента $e_{s_1,i}$ с j -ми входами элементов $e_{s_2,k}$ для всех k , для которых $f_{s_2,k}$ существенно зависит от j -го аргумента;
- 3) удалим все тождественные функции, присоединив их вход ко всем их выходам.

Будем говорить, что схема K *реализует* булев оператор F , если схема из функциональных элементов $Circ(K)$ реализует F . Через $Impl(F)$ обозначим множество всех объёмных схем, реализующих оператор F .

Назовём схему K *минимальной*, если она обладает минимальным объёмом среди всех объёмных схем, реализующих F_K .

Через $V(F)$ обозначим объём минимальной схемы, реализующей оператор F .

Будем говорить, что объёмные схемы K_1 и K_2 *равны* и писать $K_1 = K_2$, если существует параллельный перенос пространства, который позволяет совместить схемы K_1 и K_2 , иначе будем говорить, что они *различны*. Для каждой схемы K зафиксируем некоторую нумерацию её узлов. На i -м узле реализуется некоторая функция g_i от входных переменных схемы K (на входах схемы считаем, что реализуются тождественные функции).

Везде далее будем считать, что схема K имеет n входов, m выходов и l узлов. *Состоянием* схемы K на входном наборе x назовём вектор

$$s_K(x) := (g_1(x), \dots, g_l(x)).$$

Если $v = (v_1, \dots, v_q) \in \{0, 1\}^q$, обозначим $|v| := v_1 + v_2 + \dots + v_q$.

Потенциалом схемы K на входном наборе $x \in \{0, 1\}^n$ назовём величину $u_K(x) := |s_K(x)|$.

Максимальным потенциалом схемы K назовём величину

$$\hat{U}(K) := \max_{x \in \{0, 1\}^n} u_K(x).$$

Пусть $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ – булев оператор. Тогда

$$\hat{U}(f) := \min_{K \in Impl(f)} \hat{U}(K).$$

Если $Impl(f)$ пусто, то формально полагаем $\hat{U}(f) = \infty$.

Теорема 1 (Основная теорема). Пусть дан булев оператор $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$. Тогда существует объемная схема W_f со входами x_1, x_2, \dots, x_n на m выходах которой реализуется оператор f , причём схема W_f обладает следующими характеристиками:

1) Если $m \leq n$:

$$\begin{aligned} \text{а) } l(W_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \quad w(W_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \\ h(W_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}); \\ \text{б) } \hat{U}(W_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}); \\ \text{в) } V(W_f) &\leq \mathcal{O}(m \cdot 2^n). \end{aligned}$$

2) Если $m > n$:

$$\begin{aligned} \text{а) } l(W_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}), \quad w(W_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}), \\ h(W_f) &= \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}\right); \\ \text{б) } \hat{U}(W_f) &= \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}\right); \\ \text{в) } V(W_f) &\leq \mathcal{O}(m \cdot 2^n). \end{aligned}$$

Замечание: Отметим, что при $\log_2(m) = o(2^n)$ объем схемы $|W_f|$ является оптимальным по порядку, что легко получить по аналогии с [4, Утв. 1] или нижней оценкой в [2].

3. Реализация булева оператора

3.1. Параметры основных блоков

Для реализации булева оператора нам потребуются несколько различных блоков. Опишем их характеристики.

1) Дешифратор D_n^1 (Ефимов А.А., [5, лемма 2]):

$$l(D_n^1) = \mathcal{O}(2^n), \quad w(D_n^1) = \mathcal{O}(2^{n/2}), \quad h(D_n^1) = 1, \quad \hat{U}(D_n^1) = \mathcal{O}(2^n).$$

2) Блок дешифраторов $D'_{n,k}$ (Калачёв Г.В., [4, лемма 2.19]):

$$l(D'_{n,k}) = \mathcal{O}(k \cdot 2^n), \quad w(D'_{n,k}) = \mathcal{O}(n^2) + \mathcal{O}(nk), \quad h(D'_{n,k}) = 1,$$

$$\hat{U}(D'_{n,k}) = \mathcal{O}(kn^2 \cdot 2^n) + \mathcal{O}(k^2n \cdot 2^n).$$

3) Левый обратный блок $D'_{n,k}{}^{-1}$ (Калачёв Г.В., [4, лемма 2.20]):

$$l(D'_{n,k}{}^{-1}) = \mathcal{O}(k \cdot 2^n), \quad w(D'_{n,k}{}^{-1}) = \mathcal{O}(kn^2), \quad h(D'_{n,k}{}^{-1}) = 1,$$

$$\hat{U}(D'_{n,k}{}^{-1}) = \mathcal{O}(k^2 n^2 \cdot 2^n).$$

4) Схема Q_f , реализующая оператор $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m, (m \leq n)$ (Калачёв Г.В., [4, лемма 2.32]):

$$l(Q_f) = \mathcal{O}(\sqrt{m} \cdot 2^{n/2}), \quad w(Q_f) = \mathcal{O}(\sqrt{m} \cdot 2^{n/2}), \quad h(Q_f) = 1,$$

$$\hat{U}(Q_f) = \mathcal{O}(\sqrt{m} \cdot 2^{n/2}).$$

5) Схема Q_g^1 , такая что схема $D_m^{-1} \circ Q_g^1 \circ D'_{k-l,4}$ реализует оператор $g : \{0, 1\}^{4k-4l} \rightarrow \{0, 1\}^m, n = 6k, m = 8^{4l}$:

$$l(Q_g^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \quad w(Q_g^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \quad h(Q_g^1) = 1,$$

$$\hat{U}(Q_g^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}).$$

6) Блок \vee_n^k , реализующий k дизъюнкций от n переменных:

$$l(\vee_n^k) = 1, \quad w(\vee_n^k) = k, \quad h(\vee_n^k) = n, \quad \hat{U}(\vee_n^k) = \mathcal{O}(nk).$$

3.2. Реализация вспомогательных блоков

В данном параграфе подробно опишем реализацию всех вспомогательных блоков. Будем считать, что если у нас есть плоская схема, то можно естественным образом построить объемную схему такой же длины, ширины, и единичной высоты. При этом ясно, что оценки потенциала такой объемной схемы будут совпадать. Отметим, что некоторые леммы из работы [4] мы переформулируем указанным образом, то есть будем считать, что плоские схемы — это объемные схемы единичной высоты.

Почти все блоки, которые мы будем использовать, будут иметь базис из класса T_0 . Также у них будет так называемый *управляющий вход* z . Если $z = 0$ и значения других входов равны 0, то потенциал внутренней части блока равен 0. Отметим, что значения выходов в таком случае также равны 0, то есть реализуемая схемой функция от переменных z, x_1, \dots, x_n лежит в классе T_0 . Таким образом, вход z играет роль «выключателя» блока. Наличие такого входа позволяет достаточно легко оценивать потенциал схем, состоящих из нескольких блоков.

Для удобства введём еще одно обозначение. Пусть $i \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq 2^n - 1$. Тогда $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \dots, \bar{i}_n$ — разложение числа i в двоичном виде, где \bar{i}_1 — младший бит разложения, а \bar{i}_n — старший.

Дешифратор D_n^1 .

D_n^1 — плоский дешифратор, имеющий оптимальный потенциал.

Лемма 1. (Ефимов А.А., [5, лемма 2]) Существует объемная схема D_n^1 со входами z, x_1, \dots, x_n имеющая 2^n выходов, на i -м выходе которой на допустимых наборах ($z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$) реализуется функция

$$zx_1^{\bar{i}_1} x_2^{\bar{i}_2} \dots x_n^{\bar{i}_n},$$

причём схема D_n^1 обладает следующими характеристиками:

- 1) $l(D_n^1) = \mathcal{O}(2^n)$, $w(D_n^1) = \mathcal{O}(2^{n/2})$, $h(D_n^1) = 1$;
- 2) $\hat{U}(D_n^1) = \mathcal{O}(2^n)$.

Блок дешифраторов $D'_{n,k}$.

Плоский блок дешифраторов $D'_{n,k}$. На вход подаются k групп переменных по n штук + отдельная переменная z . Переменные обозначаем x_j^i , где i — номер группы, а j — номер переменной в этой группе. Каждую группу переменных мы подаем на отдельный дешифратор D_n^1 , переменную z подаем на все дешифраторы. Объединение выходов всех дешифраторов есть выходы схемы. Основное свойство блока дешифраторов в том, что у него сравнительно небольшой потенциал, а при этом на выходе активны всегда ровно k выходов (по одному с каждого дешифратора).

Лемма 2. (Калачёв Г.В., [4, лемма 2.19]) Существует объемная схема $D'_{n,k}$ со входами $z, x_1^1, \dots, x_n^1, x_1^2, \dots, x_n^2, \dots, x_n^k$ имеющая $k \cdot 2^n$ выходов, на (i,j) -м выходе которой реализуется функция

$$(x_1^i)^{\bar{j}_1} (x_2^i)^{\bar{j}_2} \dots (x_n^i)^{\bar{j}_n},$$

причём схема $D'_{n,k}$ обладает следующими характеристиками:

- 1) $l(D'_{n,k}) = \mathcal{O}(k \cdot 2^n)$, $w(D'_{n,k}) = \mathcal{O}(n^2) + \mathcal{O}(nk)$, $h(D'_{n,k}) = 1$;
- 2) $\hat{U}(D'_{n,k}) = \mathcal{O}(kn^2 \cdot 2^n) + \mathcal{O}(k^2 n \cdot 2^n)$.

Обратный блок дешифраторов $D'^{-1}_{n,k}$.

Плоский левый обратный блок дешифраторов $D'^{-1}_{n,k}$ к блоку $D'_{n,k}$.

Лемма 3. (Калачёв Г.В., [4, лемма 2.20]) Существует объемная схема $D'_{n,k}{}^{-1}$ со входами $z, x_1^1, \dots, x_{2n}^1, x_1^2, \dots, x_{2n}^2, \dots, x_{2n}^k$ имеющая $k \cdot n$ выходов, причём схема $D'_{n,k}{}^{-1}$ обладает следующими характеристиками:

- 1) $l(D'_{n,k}{}^{-1}) = \mathcal{O}(k \cdot 2^n)$, $w(D'_{n,k}{}^{-1}) = \mathcal{O}(kn^2)$, $h(D'_{n,k}{}^{-1}) = 1$;
- 2) $\hat{U}(D'_{n,k}{}^{-1}) = \mathcal{O}(k^2 n^2 \cdot 2^n)$.

Блок Q_f .

Плоский блок Q_f . Прямоугольный блок, который выдает значения данного булева оператора f и имеет оптимальные параметры (на плоскости). Лемма, используемая в работе [4], сформулирована для частичных операторов и в общем виде. Мы воспользуемся следствием из неё для случая $m \leq n$. Также в самой формулировке леммы не указаны оценки для длины и ширины схемы, но при этом они явно указаны в доказательстве.

Лемма 4. (Калачёв Г.В., [4, лемма 2.32]) Пусть дан булев оператор $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$, где $m \leq n$. Тогда существует объемная схема Q_f со входами z, x_1, x_2, \dots, x_n на m выходах которой реализуется оператор $f'(z, \vec{x}) = zf(x)$, причём схема Q_f обладает следующими характеристиками:

- 1) $l(Q_f) = \mathcal{O}(\sqrt{m} \cdot 2^{n/2})$, $w(Q_f) = \mathcal{O}(\sqrt{m} \cdot 2^{n/2})$, $h(Q_f) = 1$;
- 2) $\hat{U}(Q_f) = \mathcal{O}(\sqrt{m} \cdot 2^n)$.

Блок \vee_n^k .

Объемный блок \vee_n^k (см. рис. 1), реализующий k дизъюнкций от n переменных.

Лемма 5. Существует объемная схема \vee_n^k с nk входами x_i^j ($i = 1 \dots n, j = 1 \dots k$) на l выходе ($l = 1 \dots k$) которой реализуется функция $y_l = x_1^l \vee x_2^l \vee \dots \vee x_n^l$, причём схема \vee_n^k обладает следующими характеристиками:

- 1) $l(\vee_n^k) = 1$, $w(\vee_n^k) = k$, $h(\vee_n^k) = n$;
- 2) $\hat{U}(\vee_n^k) = \mathcal{O}(nk)$.

Доказательство. На рис. 1 изображена схема \vee_n^k , которая по столбцам собирает дизъюнкцию входов и выдает результат на соответствующий выход; при этом схема имеет требуемые характеристики. \square

подаем на блок дешифраторов, чтобы уменьшить потенциал проводов. Таким образом, если вход z неактивен, то потенциал всей схемы равен 4. Подробно посчитаем характеристики схемы, воспользовавшись следующей леммой, где $g = f_i$.

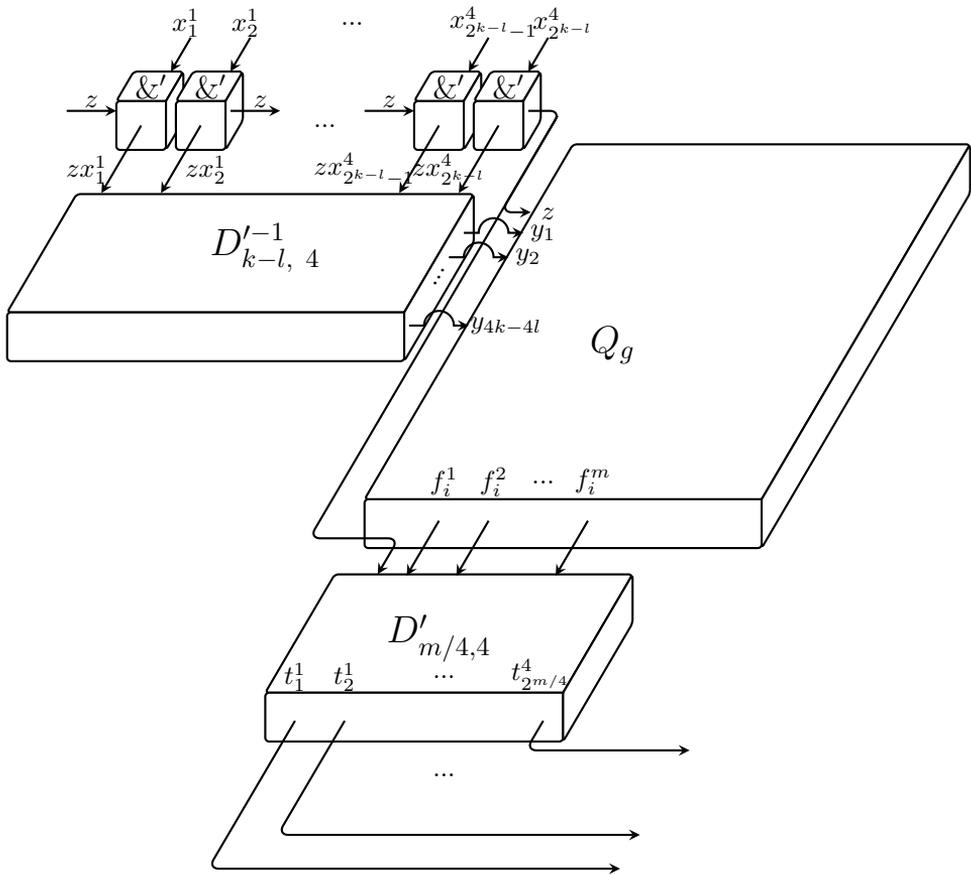


Рис. 2. Реализация блока Q_g^1 .

Лемма 6. Пусть дан частичный булев оператор $g : G \rightarrow \{0, 1\}^m, n = 6k, m = 8^{4l}$; где G — множество значений блока $D'_{k-l, 4}$, т.е. $G = \{D'_{k-l, 4}(x) | x \in \{0, 1\}^{4 \cdot 2^{k-l}}\}$. Тогда существует объемная схема Q_g^1 , такая, что схема $D_m^{-1} \circ Q_g^1 \circ D'_{k-l, 4}$ со входами $z, x_1, x_2, \dots, x_{4k-4l}$ на m

выходах реализует оператор $g'(z, \vec{x}) = z \cdot g(\vec{x})$, причём схема Q_g^1 обладает следующими характеристиками:

$$1) l(Q_g^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \quad w(Q_g^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \quad h(Q_g^1) = 1;$$

$$2) \hat{U}(Q_g^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \quad \text{если } z = 1; \quad u \hat{U}(Q_g^1) = 4, \quad \text{если } z = 0.$$

Доказательство. Оценим размеры схемы Q_g^1 :

$$\begin{aligned} l(Q_g^1) &= l(D_{k-l,4}^{-1}) + 1 + w(Q_g) = \mathcal{O}(4 \cdot 2^{k-l}) + \mathcal{O}(\sqrt{m} \cdot 2^{2k-2l}) = \mathcal{O}(\sqrt{m} \cdot 2^{2k-2l}) = \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{m} \cdot 2^{2k}}{\sqrt[6]{m}}\right) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{2k}) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(Q_g^1) &= l(Q_g) + 1 + w(D'_{m/4,4}) + \mathcal{O}(4 \cdot 2^{m/4}) = \mathcal{O}(\sqrt{m} \cdot 2^{2k-2l}) + \mathcal{O}(m) + \\ &+ \mathcal{O}(m^2/16) + \mathcal{O}(4 \cdot 2^{m/4}) = \mathcal{O}(\sqrt{m} \cdot 2^{2k-2l}) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{2k}) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}). \end{aligned}$$

$$h(Q_g^1) = 1.$$

Оценим потенциал, если $z = 1$. Общий потенциал схемы Q_g^1 складывается из потенциала блоков $D_{k-l,4}^{-1}$, Q_g , $D'_{m/4,4}$ и площади проводов. Здесь мы учитываем, что на выходе блока $D'_{m/4,4}$ будут активны только 4 провода, а значит потенциал той области можно оценить как 4 полу-периметра: $4 \cdot (4 \cdot 2^{m/4} + w(Q_g))$. Получаем оценку:

$$\begin{aligned} \hat{U}(Q_g^1) &= \mathcal{O}(4 \cdot 2^{k-l}) + \hat{U}(D_{k-l,4}^{-1}) + l(Q_g) + w(Q_g) + \hat{U}(Q_g) + l(D'_{m/4,4}) + \\ &+ \hat{U}(D'_{m/4,4}) + 4 \cdot (4 \cdot 2^{m/4} + w(Q_g)) = \mathcal{O}(4 \cdot 2^{k-l}) + \mathcal{O}(16(k-l)^2 \cdot 2^{k-l}) + \\ &+ \mathcal{O}(2^{2k-l}) + \mathcal{O}(\sqrt{m} \cdot 2^{2k-2l}) + \mathcal{O}(\sqrt{m} \cdot 2^{2k-2l}) + \mathcal{O}(\sqrt{m} \cdot 2^{2k-2l}) + \\ &+ \mathcal{O}(m^2 \cdot 2^{m/4}) + 4 \cdot (4 \cdot 2^{m/4} + \mathcal{O}(\sqrt{m} \cdot 2^{2k-2l})) = \\ &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{2k}) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}). \end{aligned}$$

Если $z = 0$, то активны ровно 4 входа схемы Q_g^1 , так как G — множество значений блока $D'_{k-l,4}$, а значит потенциал $\hat{U}(Q_g^1) = 4$. \square

Лемма 7 (Основная лемма). Пусть дан булев оператор $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$, ($m \leq n$). Тогда существует объемная схема W_f^1 со входами z, x_1, x_2, \dots, x_n на t выходах которой на допустимых наборах ($z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$) реализуется оператор $f'(z, \vec{x}) = z f(\vec{x})$, причём схема W_f^1 обладает следующими характеристиками:

- 1) $l(W_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$, $w(W_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$,
 $h(W_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$;
- 2) $\hat{U}(W_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$;
- 3) $V(W_f) \leq \mathcal{O}(m \cdot 2^n)$.

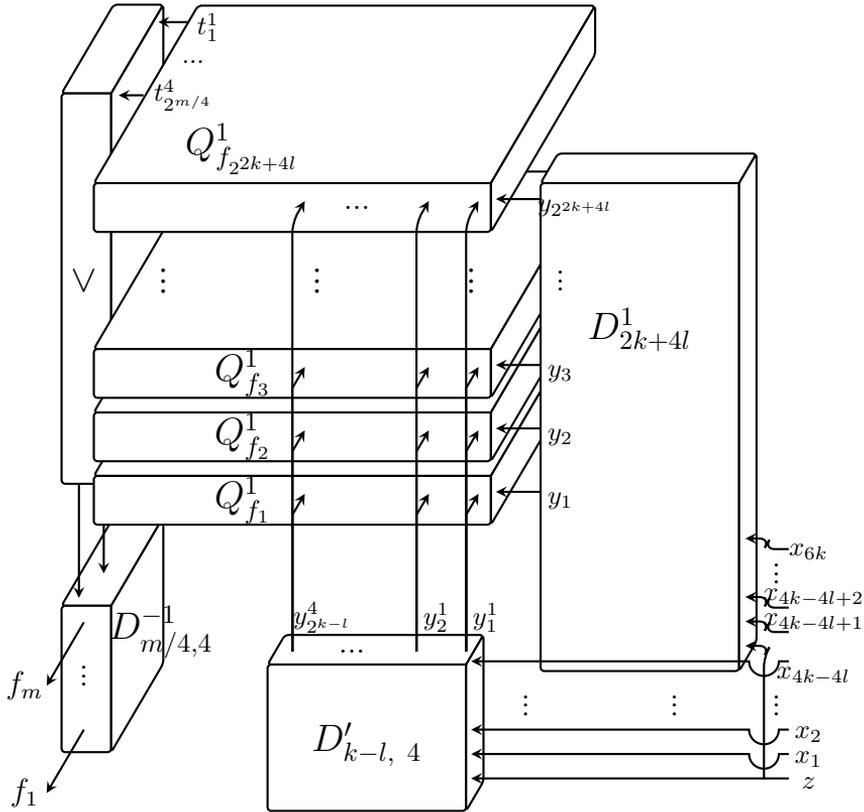


Рис. 3. Реализация основного блока W_f^1 .

Доказательство. Покажем, что схема W_f^1 (см. рис. 3) реализует оператор f согласно формуле (1).

Дешифратор D_{2k+4l}^1 реализует все элементарные конъюнкции

$$y_i = x_{4k-4l+1}^{\bar{i}_1} x_{4k-4l+2}^{\bar{i}_2} \cdots x_{6k}^{\bar{i}_{2k+4l}},$$

причем при любом значении переменных ровно один выход будет активным, а остальные нет. Это означает, что среди блоков $Q_{f_i}^1$ активным будет только один. Оставшиеся переменные x_1, \dots, x_{4k-4l} отправляются на блок дешифраторов $D'_{k-l,4}$, где в «зашифрованном» виде отправляются на все блоки $Q_{f_i}^1$. В каждом блоке $Q_{f_i}^1$ они «расшифровываются», то есть преобразуются обратно в переменные x_1, \dots, x_{4k-4l} , после чего реализуется оператор $f_i(x_1, \dots, x_{4k-4l})$. А так как управляющим входом в блок $Q_{f_i}^1$ является $y_i = x_{4k-4l+1}^{\bar{i}_1} x_{4k-4l+2}^{\bar{i}_2} \dots x_{6k}^{\bar{i}_{2k+4l}}$, то фактически на внутри блока $Q_{f_i}^1$ реализуется оператор

$$x_{4k-4l+1}^{\bar{i}_1} x_{4k-4l+2}^{\bar{i}_2} \dots x_{6k}^{\bar{i}_{2k+4l}} f_i(x_1, \dots, x_{4k-4l}).$$

Таким образом, если мы возьмем дизъюнкцию всех выходов блоков $Q_{f_i}^1$ (с помощью блока $\vee_{2^{2k+4l}}^m$, на рис. 1 он для удобства обозначен просто \vee), то получим верное значение согласно формуле (1). Но в таком случае мы не получим верной оценки потенциала, поэтому внутри каждого блока $Q_{f_i}^1$ мы сначала «зашифруем» выходы с помощью блока $D_{m/4,4}^1$, а после взятия дизъюнкции «расшифруем» с помощью блока $D_{m/4,4}^{-1}$. Поскольку при любом наборе входных переменных активным будет только один блок $Q_{f_i}^1$, то на выходе блока \vee будут «зашифрованные» выходы $Q_{f_i}^1$, а значит на выходе $D_{m/4,4}^{-1}$ будут верные значения согласно формуле 1.

Теперь оценим параметры схемы W_f^1 в случае $n = 6k, m = 8^{4l}$.

$$l(W_f^1) = 1 + w(D_{2k+4l}^1) + l(Q_{f_i}^1) + 1 = \mathcal{O}(2^{k+2l}) + \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{2k}) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}).$$

$$w(W_f^1) = 1 + w(Q_{f_i}^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{2k}) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}).$$

$$\begin{aligned} h(W_f^1) &= \max(w(D'_{k-l,4}) + l(D_{2k+4l}^1) - 1, h(\vee) + h(D_{m/4,4}^{-1})) = \\ &= \max(\mathcal{O}((k-l)^2 + 4(k-l)) + \mathcal{O}(2^{2k+4l}), \mathcal{O}(2^{2k+4l}) + \mathcal{O}(4m^2)) = \\ &= \mathcal{O}(2^{2k+4l}) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}). \end{aligned}$$

Для оценки объёма схемы $V(W_f^1)$ воспользуемся тем фактом, что для любой объёмной схемы K верно неравенство:

$$V(K) \leq l(K) \cdot w(K) \cdot h(K).$$

Таким образом, имеем оценку:

$$V(W_f^1) \leq l(W_f^1) \cdot w(W_f^1) \cdot h(W_f^1) \leq \mathcal{O}(m \cdot 2^n).$$

Оценим потенциал схемы.

- 1) Входы $z, x_1, x_2, \dots, x_{4k-4l}$ подводим к блоку $D'_{k-l,4}$. Эту часть схемы оцениваем через объем:

$$U_1 \leq 6 \cdot (4k-4l+1) \cdot (w(D'_{2k+4l})+1) \leq \mathcal{O}((4k-4l+1) \cdot 2^{k+2l}) \leq \mathcal{O}(2^{2k+4l}).$$

- 2) Оценим потенциал блока $D'_{k-l,4}$:

$$U_2 \leq \hat{U}(D'_{k-l,4}) \leq \mathcal{O}(4 \cdot (k-l)^2 \cdot 2^{k-l}) + \mathcal{O}(16 \cdot (k-l) \cdot 2^{k-l}) \leq \mathcal{O}(2^{k+2l}).$$

- 3) На выходах блока $D'_{k-l,4}$ будут активны ровно 4 провода, подводим их к блокам $Q_{f_i}^1$ и оценим потенциал:

$$U_3 \leq 4 \cdot l(D'_{2k+4l}) \leq 4 \cdot \mathcal{O}(2^{2k+4l}) = \mathcal{O}(2^{2k+4l}).$$

- 4) Подводим провода $z, x_{4k-4l}, x_{4k+1}, \dots, x_{6k}$ к дешифратору D^1_{2k+4l} и оценим потенциал:

$$U_4 \leq \mathcal{O}(2k+4l).$$

- 5) Оценим потенциал дешифратора D^1_{2k+4l} :

$$U_5 \leq \hat{U}(D^1_{2k+4l}) \leq \mathcal{O}(2^{2k+4l}).$$

- 6) Так как среди выходов дешифратора D^1_{2k+4l} будет активным только один, и все его выходы будут подключены к управляющим входам блоков $Q_{f_i}^1$, то только 1 из блоков будет активен, а остальные $2^{2k+4l} - 1$ будут иметь потенциал 4:

$$U_6 \leq 4 \cdot (2^{2k+4l} - 1) + \hat{U}(Q_{f_i}^1) \leq \mathcal{O}(2^{2k+4l}).$$

- 7) Так как ровно 4 выхода одного блока $Q_{f_i}^1$ будут активны, то потенциал внутри блока \vee можно оценить через объем 4 столбцов схемы \vee :

$$U_7 \leq 6 \cdot 4 \cdot h(\vee) \leq \mathcal{O}(2^{2k+4l}).$$

- 8) Осталось оценить потенциал блока $D^{-1}_{m/4,4}$:

$$U_8 \leq \hat{U}(D^{-1}_{m/4,4}) \leq \mathcal{O}(m^2 \cdot 2^{m/4}).$$

В итоге, имеем следующую оценку потенциала схемы W_f^1 :

$$\begin{aligned}\hat{U}(W_f^1) &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 \leq \mathcal{O}(2^{2k+4l}) + \mathcal{O}(2^{k+2l}) + \\ &+ \mathcal{O}(2^{2k+4l}) + \mathcal{O}(2k+4l) + \mathcal{O}(2^{2k+4l}) + \mathcal{O}(2^{2k+4l}) + \mathcal{O}(2^{2k+4l}) + \mathcal{O}(m^2 \cdot 2^{m/4}) \leq \\ &\leq \mathcal{O}(2^{2k+4l}) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}).\end{aligned}$$

Таким образом, получаем верное утверждение теоремы в случае $n = 6k, m = 8^{4l}$. Если же $n = 6k+r, m = 8^{4l}+t$, где $r = 1 \dots 5, t = 1 \dots (8^{4(l+1)} - 8^{4l} - 1)$, то построим схему для $n = 6k + 6, m = 8^{4(l+1)}$ и на последние $6-r$ входов подадим константу 0. Заметим, что в данном случае получим искомую схему и константы в оценках увеличатся не более, чем в $16 \cdot 4 = 64$ раза, а значит оценки по порядку останутся верными. \square

3.4. Реализация булева оператора в случае $m > n$

Лемма 8. Пусть дан булев оператор $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$, ($m > n$). Тогда существует объемная схема W_f^1 со входами z, x_1, x_2, \dots, x_n на m выходах которой реализуется на допустимых наборах ($z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$) реализуется оператор $f'(z, \vec{x}) = zf(\vec{x})$, причём схема W_f^1 обладает следующими характеристиками:

- 1) $l(W_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3})$, $w(W_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3})$,
 $h(W_f^1) = \mathcal{O}(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3})$;
- 2) $\hat{U}(W_f^1) = \mathcal{O}(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3})$;
- 3) $V(W_f) \leq \mathcal{O}(m \cdot 2^n)$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $n = 8t, m = kn$. Покажем, что тогда схема, изображенная на рис. 4 реализует оператор f .

Мы подаем входные переменные z, x_1, \dots, x_n на вход блока дешифраторов $D'_{n/8,8}$, далее все эти провода подводим к каждому из k блоков обратных дешифраторов $D_{n/8,8}^{-1}$. «Расшифрованные» переменные z, x_1, \dots, x_n мы подаем на соответствующий блок $W_{f_i}^1$, который реализует оператор f_i от n переменных. Далее, собирая все выходы блоков $W_{f_i}^1$, получаем выходы оператора f .

Оценим параметры схемы W_f^1 .

$$l(W_f^1) = l(W_{f_i}^1) + w(D_{n/8,8}^{-1}) + \mathcal{O}(8 \cdot 2^{n/8}) + w(D'_{n/8,8}) \leq$$

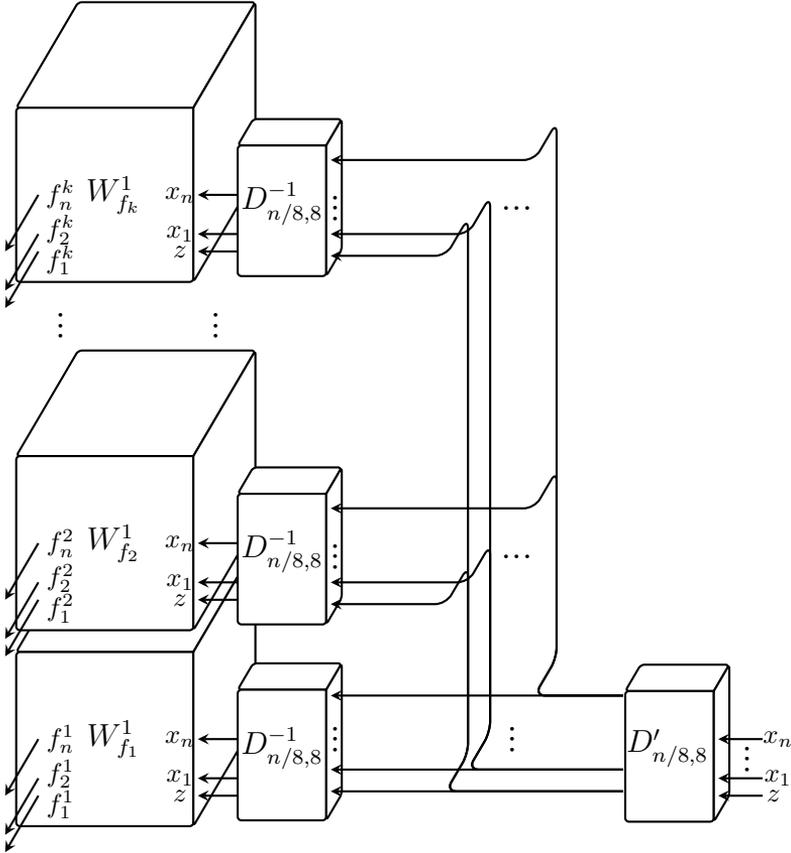


Рис. 4. Реализация основного блока W_f^1 при $m > n$.

$$\leq \mathcal{O}(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}) + \mathcal{O}(n^2/8) + \mathcal{O}(8 \cdot 2^{n/8}) + \mathcal{O}(n^2/16 + n) \leq \mathcal{O}(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}).$$

$$w(W_f^1) = w(W_{f_i}^1) \leq \mathcal{O}(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}).$$

$$h(W_f^1) = k \cdot h(W_{f_i}^1) \leq \mathcal{O}\left(\frac{m}{n^{2/3}} \cdot 2^{n/3}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}\right).$$

Аналогично доказательству из леммы 7 оценим объём схемы W_f^1 :

$$V(W_f^1) \leq l(W_f^1) \cdot w(W_f^1) \cdot h(W_f^1) \leq \mathcal{O}(m \cdot 2^n).$$

Оценим потенциал схемы.

1) Блок дешифраторов $D'_{n/8,8}$.

$$U_1 \leq \hat{U}(D'_{n/8,8}) \leq \mathcal{O}(8n \cdot 2^{n/8} + n^2/8 \cdot 2^{n/8}) = \mathcal{O}(n^2 \cdot 2^{n/8}).$$

2) Далее на выходе из блока дешифраторов $D'_{n/8,8}$ будут активны 8 проводов, которые мы подводим к блокам $D_{n/8,8}^{-1}$. Таким образом, имеем оценку:

$$U_2 \leq 8 \cdot (h(W_f^1) + k \cdot \mathcal{O}(8 \cdot 2^{n/8})) \leq \mathcal{O}\left(\frac{m}{n^{2/3}} \cdot 2^{n/3}\right).$$

3) Оценим потенциал всех k блоков $D_{n/8,8}^{-1}$:

$$U_3 \leq k \cdot \hat{U}(D_{n/8,8}^{-1}) \leq k \cdot \mathcal{O}(n^2 \cdot 2^{n/8}) \leq \mathcal{O}(mn \cdot 2^{n/8}).$$

4) Оценим потенциал всех k блоков $W_{f_i}^1$:

$$U_4 \leq k \cdot \hat{U}(W_{f_i}^1) \leq k \cdot \mathcal{O}(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}) \leq \mathcal{O}\left(\frac{m}{n^{2/3}} \cdot 2^{n/3}\right).$$

В итоге, имеем следующую оценку потенциала схемы W_f^1 :

$$\begin{aligned} \hat{U}(W_f^1) &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \leq \\ &\leq \mathcal{O}(n^2 \cdot 2^{n/8}) + \mathcal{O}\left(\frac{m}{n^{2/3}} \cdot 2^{n/3}\right) + \mathcal{O}(mn \cdot 2^{n/8}) + \mathcal{O}\left(\frac{m}{n^{2/3}} \cdot 2^{n/3}\right) \leq \\ &\leq \mathcal{O}\left(\frac{m}{n^{2/3}} \cdot 2^{n/3}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем верное утверждение теоремы в случае $n = 8t, m = kn$. Если же $n = 8t + r, m = kn + l$, где $r = 1 \dots 7, l = 1 \dots (n - 1)$, то построим схему для $n = 8t + 8, m = (k+1)n$ и на последние $8 - r$ входов подадим константу 0. Заметим, что в данном случае получим искомую схему и константы в оценках увеличатся не более, чем в константу раз, а значит оценки по порядку останутся верными. \square

В качестве следствия из леммы 7 и леммы 8 докажем основную теорему.

Теорема 2 (Основная теорема). Пусть дан булев оператор $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$. Тогда существует объемная схема W_f со входами x_1, x_2, \dots, x_n на m выходах которой реализуется оператор f , причём схема W_f обладает следующими характеристиками:

1) Если $m \leq n$:

- а) $l(W_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$, $w(W_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$,
 $h(W_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$;
- б) $\hat{U}(W_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$;
- в) $V(W_f) \leq \mathcal{O}(m \cdot 2^n)$.

2) Если $m > n$:

- а) $l(W_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3})$, $w(W_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3})$,
 $h(W_f) = \mathcal{O}(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3})$;
- б) $\hat{U}(W_f) = \mathcal{O}(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3})$;
- в) $V(W_f) \leq \mathcal{O}(m \cdot 2^n)$.

Доказательство. Построим схему W_f^1 , используя лемму 7 при $m \leq n$ или лемму 8 при $m > n$. Подадим в схеме W_f^1 на вход z константу 1. Полученная таким образом схема W_f реализует оператор $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на всех наборах x_1, x_2, \dots, x_n и его параметры остаются такими же по порядку, как и у схемы W_f^1 . \square

Список литературы

- [1] Кравцов С. С., “О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов”, *Проблемы кибернетики*, **19** (1967), 285–293.
- [2] Коршунов А. Д., “Об оценках сложности из объемных функциональных элементов и объемных схем из функциональных элементов”, *Проблемы кибернетики*, **19** (1967), 275–283.
- [3] Калачёв Г. В., “Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции”, *Дискретная математика*, **26**:1 (2014), 49–74.
- [4] Калачёв Г. В., “Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **20**:2 (2016), 203–266.
- [5] Ефимов А. А., “Верхняя оценка энергопотребления в классе объемных схем”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:1 (2019), 117–132.

The upper estimate of the volumetric power consumption of the circuits that implement boolean operators.

Efimov A.A.

In this work volume schemes which are generalization of plane schemes in space are considered. The class of the schemes implementing boolean operators was considered. For this class upper assessment of potential — a measure of the power equal to quantity of the circuit elements giving unit on this input pattern is received. It is shown that any operator of n variables can be realized with a volume scheme whose potential does not exceed $\mathcal{O}(m \cdot 2^{n/3})$ if $m \leq n$ and $\mathcal{O}(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3})$ if $m > n$.

Keywords: schemes from functional elements, volume schemes, scheme power, potential.