

Верхняя оценка энергопотребления в классе объемных схем

Ефимов А.А.

В данной работе рассматриваются объёмные схемы, являющиеся обобщением плоских схем в пространстве. Был рассмотрен класс схем, реализующих булевы функции. Для этого класса получена верхняя оценка потенциала — меры мощности, равной количеству элементов схемы, выдающих единицу на данном входном наборе. Показано, что любую функцию от n переменных можно реализовать объёмной схемой, потенциал которой не превосходит $\mathcal{O}(2^{n/3})$.

Ключевые слова: схемы из функциональных элементов, объёмные схемы, мощность схемы, потенциал.

1. Введение

В ряде работ исследовалась сложность схем из функциональных элементов, реализующих функции алгебры логики от n аргументов. Однако, зачастую в них рассматривались схемы, в которых не накладывалось никаких ограничений на размещение элементов схемы, способ соединения и т.п. На самом деле в любой схеме, когда она располагается в пространстве, функциональные элементы имеют определенную длину, ширину и соединяются проводниками, размеры которых следует учитывать.

Данная работа посвящена кубическим схемам, которые определяются аналогично плоским схемам, но в пространстве. Впервые понятие плоской схемы было введено Кравцовым в 1967 году [1]. Развитие теории плоских схем было связано с развитием технологии производства и укладки реальных микросхем. Идея о том, что схемы можно укладывать друг на друга в пространстве была также известна давно, но не находила широкого применения вплоть до недавнего времени. Лишь несколько лет назад подобная технология начала использоваться, так как у инженеров закончились способы выжать лучшие характеристики из чипов прежне-

го размера. В частности, речь идёт о том, чтобы в будущем использовать многослойные чипы.

Основной целью данной работы является обобщение результатов Калачева [2, 3] на объёмные схемы. Как и в его работах, автор использует такое понятие сложности схемы, как максимальный потенциал. Он равен максимальному значению количества единиц на всех внутренних узлах схемы, взятому по всем входным наборам. Неформально говоря, потенциал показывает количество «энергии» схемы, необходимой для её функционирования. В данной работе была получена верхняя оценка потенциала для класса булевых функций.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Кубическим элементом будем называть булев оператор, у которого в сумме не более шести входов и выходов, причем каждому его входу и выходу сопоставлена некоторая метка из множества $\{l, t, r, b, f, a\}$, причём метки не повторяются.

Метки будем называть сторонами элемента:

- l – левая сторона;
- r – правая сторона;
- t – верхняя сторона;
- b – нижняя сторона;
- f – передняя сторона;
- a – задняя сторона.

Кубический элемент будем изображать в виде единичного куба в пространстве. При этом входам и выходам элемента сопоставляются грани куба в соответствии с присвоенными им метками.

Метки, присвоенные входам (выходам) оператора будем называть *входами (выходами)* элемента. Метки, не присвоенные ни входам, ни выходам, будем называть *изоляторами*. Множество входов (выходов) элемента e будем обозначать $in(e)$ ($out(e)$). Входы и выходы элемента будем называть его *контактами*.

Если на всех выходах элемента реализуются тождественные функции, то будем называть элемент *коммутационным*, иначе – *логическим*.

Коммутационный элемент соответствует либо проводнику в микросхеме, либо пересечению проводов, либо тождественной функции, служащей для усиления сигнала.

Описывать элемент можно уравнениями, которые задают его оператор, заменяя все переменные в них на сопоставленные им метки (l, t, r, b, f, a) . Тогда в левой части каждого уравнения будет стоять выходная метка, а в правую часть будут входить только входные метки.

Всюду далее значок $:=$ будет обозначать «по определению равно».

За E обозначим множество всех кубических элементов.

Сетью из кубических элементов на множестве $M \subset \mathbb{Z}^3$ будем называть отображение $K : M \rightarrow E$.

Элемент $K(x, y, z)$ будем называть *элементом схемы K с координатами (x, y, z)* .

Левой, правой, верхней, нижней, передней и задней стороной элемента e с координатами (x, y, z) будем называть точки с координатами $(x - \frac{1}{2}, y, z)$, $(x + \frac{1}{2}, y, z)$, $(x, y, z + \frac{1}{2})$, $(x, y, z - \frac{1}{2})$, $(x, y + \frac{1}{2}, z)$, $(x, y - \frac{1}{2}, z)$ соответственно.

Будем говорить, что сеть K из кубических элементов корректна, если для любых элементов x и y схемы K верно, что если сторона a элемента x совпадает со стороной b элемента y , то выполнено одно из условий:

- один из элементов x, y – изолирующий,
- стороны a и b являются изоляторами,
- среди них одна является входом, другая выходом, например, a – выход, а b – вход, в таком случае будем говорить, что выход a *подключен* ко входу b .

Множество M будем называть *носителем* сети K .

Введём понятие *графа корректной сети из кубических элементов K* (будем обозначать G_K). G_K – ориентированный граф, вершинами которого являются входы и выходы элементов схемы. Если выход одного элемента подключен ко входу другого, то им будет соответствовать одна и та же вершина графа (будем говорить, что эта вершина является выходом первого элемента и входом второго). Из вершины a в вершину b ведет ребро в том и только в том случае, когда существует элемент e такой, что a является его входом, b – выходом, причем функция, реализуемая на выходе b , существенно зависит от входа a .

Объёмной схемой или *схемой из кубических элементов* на множестве $M \subset \mathbb{Z}^3$ будем называть корректную сеть из кубических элементов, в графе которой нет ориентированных циклов. Множество M будем называть *носителем* схемы K .

Длиной схемы K будем называть длину наименьшего прямоугольного параллелепипеда, содержащего все непустые элементы схемы K , обозначается $l(K)$.

Шириной схемы K будем называть ширину наименьшего прямоугольного параллелепипеда, содержащего все непустые элементы схемы K , обозначается $w(K)$.

Высотой схемы K будем называть высоту наименьшего прямоугольного параллелепипеда, содержащего все непустые элементы схемы K , обозначается $h(K)$.

Если вход (выход) элемента не подключен к выходу (входу) другого элемента, будем его называть *входом* (*выходом*) схемы. *Контактами* схемы K будем называть её входы и выходы, и обозначать их $In(K)$, $Out(K)$ соответственно.

Узлами схемы K будем называть вершины графа G_K .

Если M – носитель схемы K , то величину $|M|$, равную количеству элементов в множестве M , будем называть *объёмом* схемы K и обозначать $|K|$.

В графе G_K будем считать, что все ребра имеют вес 1. *Расстоянием между вершинами* в графе G_K будем считать длину наименьшего пути между этими вершинами. *Расстоянием между узлами* схемы будем называть расстояние между соответствующими вершинами в G_K . Расстояние от узла a до узла b на схеме K будем обозначать $\rho_K(a, b)$.

Каждой объёмной схеме K можно сопоставить схему их функциональных элементов $Circ(K)$ следующим образом:

- 1) каждой функции $f_{s,i}$, которую реализует i -й выход элемента s объёмной схемы, сопоставим функциональный элемент $e_{s,i}$, реализующий $f_{s,i}$; если i -й и j -й выходы являются выходами одной и той же функции, то им будет соответствовать один и тот же функциональный элемент;
- 2) если i -й выход элемента s_1 подключен к j -му входу элемента s_2 , то соединим выход элемента $e_{s_1,i}$ с j -ми входами элементов $e_{s_2,k}$ для всех k , для которых $f_{s_2,k}$ существенно зависит от j -го аргумента;

- 3) удалим все тождественные функции, присоединив их вход ко всем их выходам.

Будем говорить, что схема K реализует булев оператор F , если схема из функциональных элементов $Circ(K)$ реализует F . Через $Impl(F)$ обозначим множество всех объёмных схем, реализующих оператор F .

Назовём схему K минимальной, если она обладает минимальным объёмом среди всех объёмных схем, реализующих F_K .

Через $V(F)$ обозначим объём минимальной схемы, реализующей оператор F .

Будем говорить, что объёмные схемы K_1 и K_2 равны и писать $K_1 = K_2$, если существует параллельный перенос пространства, который позволяет совместить схемы K_1 и K_2 , иначе будем говорить, что они различны. Для каждой схемы K зафиксируем некоторую нумерацию её узлов. На i -м узле реализуется некоторая функция g_i от входных переменных схемы K (на входах схемы считаем, что реализуются тождественные функции).

Везде далее будем считать, что схема K имеет n входов и l узлов. Состоянием схемы K на входном наборе x назовём вектор

$$s_K(x) := (g_1(x), \dots, g_l(x)).$$

Если $v = (v_1, \dots, v_q) \in \{0, 1\}^q$, обозначим $|v| := v_1 + v_2 + \dots + v_q$.

Потенциалом схемы K на входном наборе $x \in \{0, 1\}^n$ назовём величину $u_K(x) := |s_K(x)|$.

Максимальным потенциалом схемы K назовём величину

$$\hat{U}(K) := \max_{x \in \{0, 1\}^n} u_K(x).$$

Пусть $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ – булева функция. Тогда

$$\hat{U}(f) := \min_{K \in Impl(f)} \hat{U}(K).$$

Если $Impl(f)$ пусто, то формально полагаем $\hat{U}(f) = \infty$.

Теорема 1 (Основная теорема). Пусть дана булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда существует объёмная схема V_f со входами x_1, x_2, \dots, x_n на одном выходе которой реализуется функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, причём схема V_f обладает следующими характеристиками:

- 1) $l(V_f) = \mathcal{O}(2^{n/3})$, $w(V_f) = \mathcal{O}(2^{n/3})$, $h(V_f) = \mathcal{O}(2^{n/3})$.
- 2) $\hat{U}(V_f) = \mathcal{O}(2^{n/3})$.

3. Реализация булевой функции

3.1. Параметры основных блоков

Для реализации булевой функции нам потребуются несколько различных блоков. Опишем их характеристики.

- 1) Дешифратор D'_n (Калачёв Г.В., [3, лемма 2.14]):

$$l(D'_n) = 2^n, \quad w(D'_n) \leq n(n+3)/2, \quad h(D'_n) = 1, \quad \hat{U}(D'_n) = \mathcal{O}(n^2 \cdot 2^n).$$

- 2) Дешифратор D_n^1 :

$$l(D_n^1) = \mathcal{O}(2^n), \quad w(D_n^1) = \mathcal{O}(2^{n/2}), \quad h(D_n^1) = 1, \quad \hat{U}(D_n^1) = \mathcal{O}(2^n).$$

- 3) Блок дешифраторов $D'_{n,k}$ (Калачёв Г.В., [3, лемма 2.19]):

$$l(D'_{n,k}) = \mathcal{O}(k \cdot 2^n), \quad w(D'_{n,k}) = \mathcal{O}(n^2) + \mathcal{O}(nk), \quad h(D'_{n,k}) = 1,$$

$$\hat{U}(D'_{n,k}) = \mathcal{O}(kn^2 \cdot 2^n) + \mathcal{O}(k^2n \cdot 2^n).$$

- 4) Левый обратный блок $D'_{n,k}{}^{-1}$ (Калачёв Г.В., [3, лемма 2.20]):

$$l(D'_{n,k}{}^{-1}) = \mathcal{O}(k \cdot 2^n), \quad w(D'_{n,k}{}^{-1}) = \mathcal{O}(kn^2), \quad h(D'_{n,k}{}^{-1}) = 1,$$

$$\hat{U}(D'_{n,k}{}^{-1}) = \mathcal{O}(k^2n^2 \cdot 2^n).$$

- 5) Схема S_f , реализующая функцию f от n переменных (Калачёв Г.В., [3, лемма 2.25]):

$$l(S_f) = \mathcal{O}(2^{n/2}), \quad w(S_f) = \mathcal{O}(2^{n/2}), \quad h(S_f) = 1, \quad \hat{U}(S_f) = \mathcal{O}(2^{n/2}).$$

- 6) Блок S_f^1 :

$$l(S_f^1) = \mathcal{O}(2^{n/3}), \quad w(S_f^1) = \mathcal{O}(2^{n/3}), \quad h(S_f^1) = 1, \quad \hat{U}(S_f^1) = \mathcal{O}(2^{n/3}).$$

- 7) Схема V_f^1 , реализующая функцию f от n переменных:

$$l(V_f^1) = \mathcal{O}(2^{n/3}), \quad w(V_f^1) = \mathcal{O}(2^{n/3}), \quad h(V_f^1) = \mathcal{O}(2^{n/3}), \quad \hat{U}(V_f^1) = \mathcal{O}(2^{n/3}).$$

3.2. Реализация вспомогательных блоков

В данном параграфе подробно опишем реализацию всех вспомогательных блоков. Будем считать, что если у нас есть плоская схема, то можно естественным образом построить объемную схему такой же длины, ширины, и единичной высоты. При этом ясно, что оценки потенциала такой объемной схемы будут совпадать. Отметим, что некоторые леммы из работы [3] мы переформулируем указанным образом, то есть будем считать, что плоские схемы — это объемные схемы единичной высоты.

Почти все блоки, которые мы будем использовать будут иметь так называемый *управляющий вход* z . Если $z = 0$ и значения других входов равны 0, то потенциал внутренней части блока равен 0. Отметим, что значения выходов в таком случае также равны 0, то есть реализуемая схемой функция от переменных z, x_1, \dots, x_n лежит в классе T_0 . Таким образом, вход z играет роль «выключателя» блока. Наличие такого входа позволяет достаточно легко оценивать потенциал схем, состоящих из нескольких блоков.

Для удобства введём еще одно обозначение. Пусть $i \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq 2^n - 1$. Тогда $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \dots, \bar{i}_n$ — разложение числа i в двоичном виде, где \bar{i}_1 — младший бит разложения, а \bar{i}_n — старший.

Дешифратор D'_n .

D'_n — плоский дешифратор.

Лемма 1. (Калачёв Г.В., [3, лемма 2.14]) *Существует объемная схема D'_n со входами z, x_1, \dots, x_n имеющая 2^n выходов, на i -м выходе которой на допустимых наборах ($z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$) реализуется функция*

$$zx_1^{\bar{i}_1} x_2^{\bar{i}_2} \dots x_n^{\bar{i}_n},$$

причём схема D'_n обладает следующими характеристиками:

- 1) $l(D'_n) = \mathcal{O}(2^n)$, $w(D'_n) = \mathcal{O}(n^2)$, $h(D'_n) = 1$.
- 2) $\hat{U}(D'_n) = \mathcal{O}(n^2 \cdot 2^n)$.

Дешифратор D_n^1 .

D_n^1 — плоский дешифратор, имеющий оптимальный потенциал.

Лемма 2. Существует объемная схема D_n^1 со входами z, x_1, \dots, x_n имеющая 2^n выходов, на i -м выходе которой на допустимых наборах ($z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$) реализуется функция

$$zx_1^{\bar{i}_1} x_2^{\bar{i}_2} \dots x_n^{\bar{i}_n},$$

причём схема D_n^1 обладает следующими характеристиками:

1) $l(D_n^1) = \mathcal{O}(2^n)$, $w(D_n^1) = \mathcal{O}(2^{n/2})$, $h(D_n^1) = 1$.

2) $\hat{U}(D_n^1) = \mathcal{O}(2^n)$.

Доказательство. Будем полагать, что $n = 2k$. Построим дешифратор D_n^1 из двух дешифраторов D'_k и некоторого количества элементов $\&$ и $\&'$ (см. рис. 1).

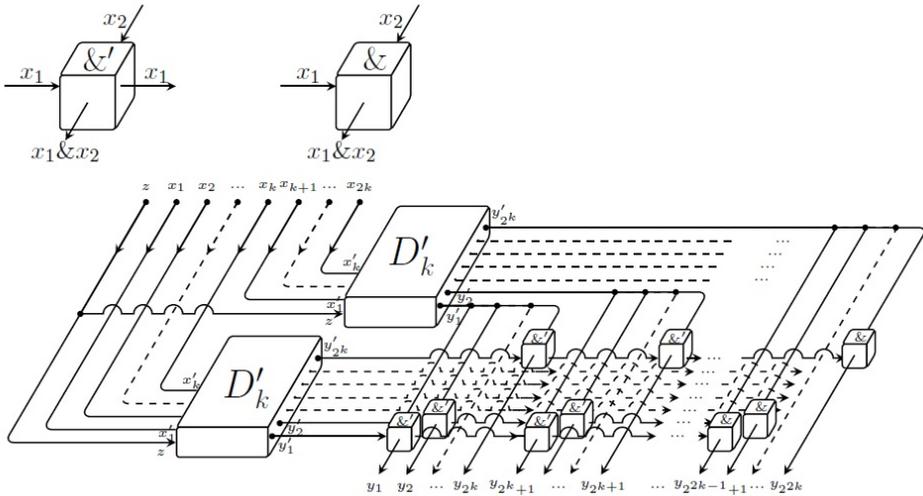


Рис. 1. Реализация дешифратора D_n^1 .

Посчитаем характеристики схемы D_n^1 .

$$l(D_n^1) = (k + 1) + 2 \cdot \mathcal{O}(k^2) + 2^k \cdot 2^k = \mathcal{O}(2^{2k}) = \mathcal{O}(2^n).$$

$$w(D_n^1) = 2 \cdot l(D'_k) = \mathcal{O}(2^k) = \mathcal{O}(2^{n/2}).$$

$$h(D_n^1) = 1.$$

Оценим потенциал схемы. Заметим, что так как у каждого элемента схемы максимум 6 входов/выходов, то потенциал не превосходит объема схемы, умноженного на 6. Таким образом, потенциал всей «левой» части схемы (включая блоки D'_k) оценим через объем.

$$U_1 \leq 6 \cdot w(D_n^1) \cdot ((k+1) + 2 \cdot w(D'_k)).$$

Далее воспользуемся тем фактом, что при любом входном наборе из любой из 2-х схем D'_k выходит ровно один активный провод. Оценим длину активного провода нижнего блока D'_k .

$$U_2 \leq \mathcal{O}(2^{2k}).$$

Оценим длину активного провода верхнего блока D'_k .

$$U_3 \leq \mathcal{O}(2^{2k}).$$

Также заметим, что сигнал из верхнего блока D'_k в какой-то момент разветвится на 2^k сигналов, которые пойдут вниз и пересекутся с сигналом из нижнего блока D'_k . Оценим потенциал этой части схемы через объем.

$$U_4 \leq 6 \cdot 2l(D'_k) \cdot 2^k.$$

Сложим полученные результаты и получим оценку потенциала:

$$\begin{aligned} \hat{U}(D_n^1) = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 &\leq 6 \cdot w(D_n^1) \cdot ((k+1) + 2 \cdot w(D'_k)) + \mathcal{O}(2^{2k}) + \mathcal{O}(2^{2k}) + \\ &+ 6 \cdot 2l(D'_k) \cdot 2^k = \mathcal{O}(2^k) \cdot \mathcal{O}(k^2) + \mathcal{O}(2^{2k}) + \mathcal{O}(2^{2k}) = \mathcal{O}(2^n). \end{aligned}$$

В случае, когда $n = 2k + 1$ построим схему для $n = 2k + 2$ и подадим на последний вход x_{2n+2} константу 0. Получим схему с нужными характеристиками в силу того, что константы в оценках схемы увеличатся максимум в 2 раза, нам нужны оценки по порядку. \square

Замечание: В данной работе мы используем дешифратор D_n^1 , так как он имеет оптимальный потенциал. Дешифратор D'_n использовался в работе [3] потому, что у него была оптимальная «глубина», хотя и неоптимальный потенциал.

Блок дешифраторов $D'_{n,k}$.

Плоский блок дешифраторов $D'_{n,k}$. На вход подаются k групп переменных по n штук + отдельная переменная z . Переменные обозначаем x_j^i , где i — номер группы, а j — номер переменной в этой группе. Каждую группу переменных мы подаем на отдельный дешифратор D'_n , переменную z подаем на все дешифраторы. Объединение выходов всех дешифраторов есть выходы схемы. Основное свойство блока дешифраторов в том, что у него сравнительно небольшой потенциал, а при этом на выходе активны всегда ровно k выходов (по одному с каждого дешифратора).

Лемма 3. (Калачёв Г.В., [3, лемма 2.19]) Существует объемная схема $D'_{n,k}$ со входами $z, x_1^1, \dots, x_n^1, x_1^2, \dots, x_n^2, \dots, x_n^k$ имеющая $k \cdot 2^n$ выходов, на (i, j) -м выходе которой реализуется функция

$$(x_1^i)^{\bar{j}_1} (x_2^i)^{\bar{j}_2} \dots (x_n^i)^{\bar{j}_n},$$

причём схема $D'_{n,k}$ обладает следующими характеристиками:

- 1) $l(D'_{n,k}) = \mathcal{O}(k \cdot 2^n)$, $w(D'_{n,k}) = \mathcal{O}(n^2) + \mathcal{O}(nk)$, $h(D'_{n,k}) = 1$.
- 2) $\hat{U}(D'_{n,k}) = \mathcal{O}(kn^2 \cdot 2^n) + \mathcal{O}(k^2n \cdot 2^n)$.

Обратный блок дешифраторов $D'^{-1}_{n,k}$.

Плоский левый обратный блок дешифраторов $D'^{-1}_{n,k}$ к блоку $D'_{n,k}$.

Лемма 4. (Калачёв Г.В., [3, лемма 2.20]) Существует объемная схема $D'^{-1}_{n,k}$ со входами $z, x_1^1, \dots, x_{2^n}^1, x_1^2, \dots, x_{2^n}^2, \dots, x_{2^n}^k$ имеющая $k \cdot n$ выходов, причём схема $D'^{-1}_{n,k}$ обладает следующими характеристиками:

- 1) $l(D'^{-1}_{n,k}) = \mathcal{O}(k \cdot 2^n)$, $w(D'^{-1}_{n,k}) = \mathcal{O}(kn^2)$, $h(D'^{-1}_{n,k}) = 1$.
- 2) $\hat{U}(D'^{-1}_{n,k}) = \mathcal{O}(k^2n^2 \cdot 2^n)$.

Блок S_f .

Плоский блок S_f . Блок, который выдает значения данной булевой функции f и имеет оптимальные параметры (на плоскости).

Лемма 5. (Калачёв Г.В., [3, лемма 2.25]) Пусть дана функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда существует объемная схема S_f со входами z, x_1, x_2, \dots, x_n на одном выходе которой на допустимых наборах ($z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$) реализуется функция $zf(x_1, x_2, \dots, x_n)$, причём схема S_f обладает следующими характеристиками:

- 1) $l(S_f) = \mathcal{O}(2^{n/2})$, $w(S_f) = \mathcal{O}(2^{n/2})$, $h(S_f) = 1$.
- 2) $\hat{U}(S_f) = \mathcal{O}(2^n)$.

3.3. Реализация булевой функции

Итак, пусть дана булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Будем считать, что $n = 6k$. Разложим функцию f по последним $2k$ переменным:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{6k}) = \bigvee_{i=0}^{2^{2k}-1} x_{4k+1}^{\bar{i}_1} x_{4k+2}^{\bar{i}_2} \dots x_{6k}^{\bar{i}_{2k}} f_i(x_1, \dots, x_{4k}), \quad (1)$$

где

$$f_i(x_1, \dots, x_{4k}) = f(x_1, \dots, x_{4k}, \bar{i}_1, \bar{i}_2, \dots, \bar{i}_{2k}).$$

Для каждой функции f_i от $4k$ переменных построим вспомогательный блок $S_{f_i}^1$ (см. рис. 2), реализующий данную функцию. Особенностью данного блока является тот факт, что на вход ему мы подаем ему выходы из блока дешифраторов $D'_{k,4}$. Таким образом, если вход z неактивен, то потенциал всей схемы равен 4. Подробно посчитаем характеристики схемы.

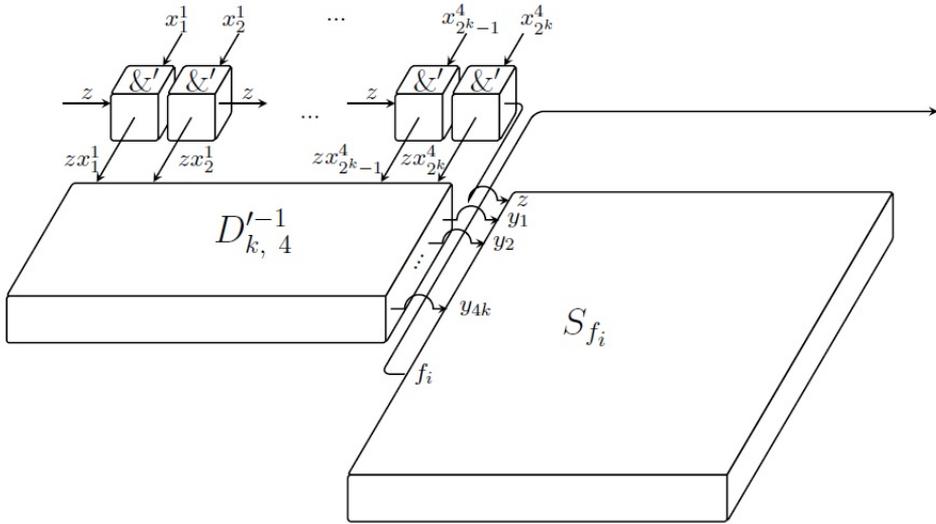


Рис. 2. Реализация блока $S_{f_i}^1$.

Лемма 6. Пусть дана булева функция $f_i(x_1, x_2, \dots, x_{4k})$. Тогда существует объемная схема $S_{f_i}^1$, такая, что схема $S_{f_i}^1 \circ D'_{k,4}$ со входами

z, x_1, x_2, \dots, x_n на одном выходе на допустимых наборах ($z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$) реализует функцию $z f_i(x_1, x_2, \dots, x_{4k})$, причём схема $S_{f_i}^1$ обладает следующими характеристиками:

$$1) l(S_{f_i}^1) = \mathcal{O}(2^{2k}), \quad w(S_{f_i}^1) = \mathcal{O}(2^{2k}), \quad h(S_{f_i}^1) = 1.$$

$$2) \hat{U}(S_{f_i}^1) = \mathcal{O}(2^{2k}), \text{ если } z = 1; \quad u \hat{U}(S_{f_i}^1) = 4, \text{ если } z = 0.$$

Доказательство.

$$l(S_{f_i}^1) = l(D_{k,4}^{-1}) + 1 + w(S_{f_i}) = \mathcal{O}(4 \cdot 2^k) + \mathcal{O}(2^{2k}) = \mathcal{O}(2^{2k}).$$

$$w(S_{f_i}^1) = l(S_{f_i}) + 1 = \mathcal{O}(2^{2k}).$$

$$h(S_{f_i}^1) = 1.$$

Оценим потенциал, если $z = 1$.

$$\begin{aligned} \hat{U}(S_{f_i}^1) &= \mathcal{O}(4 \cdot 2^k) + \hat{U}(D_{k,4}^{-1}) + l(S_{f_i}) + w(S_{f_i}) + \hat{U}(S_{f_i}) = \\ &= \mathcal{O}(4 \cdot 2^k) + \mathcal{O}(16k^2 \cdot 2^k) + \mathcal{O}(2^{2k}) + \mathcal{O}(2^{2k}) + \mathcal{O}(2^{2k}) = \mathcal{O}(2^{2k}). \end{aligned}$$

□

Лемма 7 (Основная лемма). Пусть дана булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда существует объемная схема V_f^1 со входами z, x_1, x_2, \dots, x_n на одном выходе которой на допустимых наборах ($z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$) реализуется функция $z f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, причём схема V_f^1 обладает следующими характеристиками:

$$1) l(V_f^1) = \mathcal{O}(2^{n/3}), \quad w(V_f^1) = \mathcal{O}(2^{n/3}), \quad h(V_f^1) = \mathcal{O}(2^{n/3}).$$

$$2) \hat{U}(V_f^1) = \mathcal{O}(2^{n/3}).$$

Доказательство. Покажем, что схема V_f^1 (см. рис. 3) реализует функцию f согласно формуле (1).

Дешифратор D_{2k}^1 реализует все элементарные конъюнкции

$$y_i = x_{4k+1}^{\bar{i}_1} x_{4k+2}^{\bar{i}_2} \dots x_{6k}^{\bar{i}_{2k}},$$

причем при любом значении переменных ровно один выход будет активным, а остальные нет. Это означает, что среди блоков $S_{f_i}^1$ активным будет только один. Оставшиеся переменные x_1, \dots, x_{4k} отправляются на

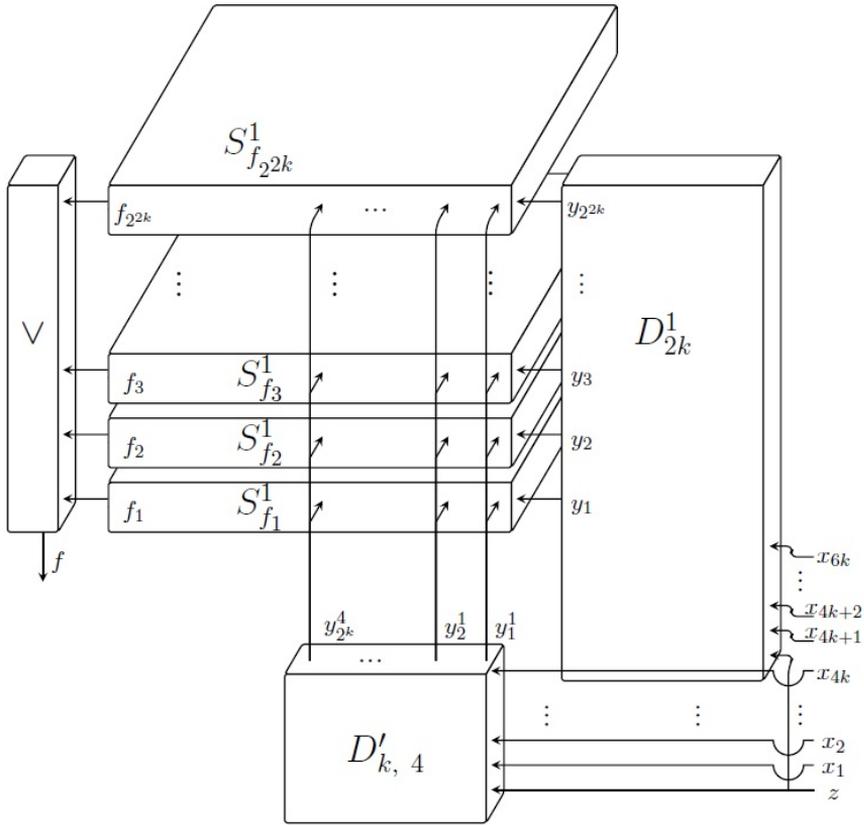


Рис. 3. Реализация основного блока V_f^1 .

блок дешифраторов $D'_{k,4}$, где в «зашифрованном» виде отправляются на все блоки $S_{f_i}^1$. В каждом блоке $S_{f_i}^1$ они «расшифровываются», то есть преобразуются обратно в переменные x_1, \dots, x_{4k} , после чего реализуется функция $f_i(x_1, \dots, x_{4k})$. А так как управляющим входом в блок $S_{f_i}^1$ является $y_i = x_{4k+1}^{\bar{i}_1} x_{4k+2}^{\bar{i}_2} \dots x_{6k}^{\bar{i}_{2k}}$, то фактически на выходе блока $S_{f_i}^1$ реализуется функция

$$x_{4k+1}^{\bar{i}_1} x_{4k+2}^{\bar{i}_2} \dots x_{6k}^{\bar{i}_{2k}} f_i(x_1, \dots, x_{4k}).$$

Далее берется дизъюнкция всех выходов блоков $S_{f_i}^1$, что полностью соответствует формуле (1).

Оценим параметры схемы V_f^1 в случае $n = 6k$.

$$l(V_f^1) = 1 + w(D_{2k}^1) + l(S_{f_i}^1) + 1 = \mathcal{O}(2^k) + \mathcal{O}(2^{2k}) = \mathcal{O}(2^{2k}).$$

$$w(V_f^1) = 1 + w(S_{f_i}^1) = \mathcal{O}(2^{2k}).$$

$$h(V_f^1) = w(D'_{k,4}) + l(D_{2k}^1) - 1 = \mathcal{O}(k^2) + \mathcal{O}(4k) + \mathcal{O}(2^{2k}) = \mathcal{O}(2^{2k}).$$

Оценим потенциал схемы. Входы $z, x_1, x_2, \dots, x_{4k}$ подводим к блоку $D'_{k,4}$. Эту часть схемы оцениваем через объем.

$$U_1 \leq 6 \cdot (4k + 1) \cdot (w(D_{2k}^1) + 1).$$

Оценим потенциал блока $D'_{k,4}$.

$$U_2 \leq \hat{U}(D'_{k,4}).$$

На выходах блока $D'_{k,4}$ будут активны ровно 4 провода, подводим их к блокам $S_{f_i}^1$ и оценим потенциал.

$$U_3 \leq 4 \cdot l(D_{2k}^1).$$

Подводим провода $z, x_{4k}, x_{4k+1}, \dots, x_{6k}$ к дешифратору D_{2k}^1 и оценим потенциал.

$$U_4 \leq \mathcal{O}(2k).$$

Оценим потенциал дешифратора D_{2k}^1 .

$$U_5 \leq \hat{U}(D_{2k}^1).$$

Так как среди выходов дешифратора D_{2k}^1 будет активным только один, и все его выходы будут подключены к управляющим входам блоков $S_{f_i}^1$, то только 1 из блоков будет активен, а остальные $2^{2k} - 1$ будут иметь потенциал 4.

$$U_6 \leq 4 \cdot (2^{2k} - 1) + \hat{U}(S_{f_i}^1).$$

Общую дизъюнкцию всех выходов $S_{f_i}^1$ оценим через объем.

$$U_7 \leq 6 \cdot \mathcal{O}(2^{2k}).$$

В итоге, имеем следующую оценку потенциала схемы V_f^1 :

$$\hat{U}(V_f^1) = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 \leq 6 \cdot (4k + 1) \cdot (w(D_{2k}^1) + 1) + \hat{U}(D'_{k,4}) +$$

$$\begin{aligned}
& +4 \cdot l(D_{2^k}^1) + \mathcal{O}(2^k) + \hat{U}(D_{2^k}^1) + 4 \cdot (2^{2^k} - 1) + \hat{U}(S_{f_i}^1) + 6 \cdot \mathcal{O}(2^{2^k}) = \mathcal{O}(k \cdot 2^k) + \\
& + \mathcal{O}(4k^2 \cdot 2^k) + \mathcal{O}(16k \cdot 2^k) + \mathcal{O}(2^k) + \mathcal{O}(2^{2^k}) + 8\mathcal{O}(2^{2^k}) + \mathcal{O}(2^{2^k}) + \mathcal{O}(2^{2^k}) = \\
& = \mathcal{O}(2^{2^k}).
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем верное утверждение теоремы в случае $n = 6k$. Если же $n = 6k + r$, где $r = 1 \dots 5$, то построим схему для $n = 6k + 6$ и на последние $6 - r$ входов подадим константу 0. Заметим, что в данном случае получим искомую схему и константы в оценках увеличатся не более, чем в 4 раза, а значит оценки по порядку останутся верными. \square

В качестве следствия докажем основную теорему.

Теорема 2 (Основная теорема). *Пусть дана булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда существует объемная схема V_f со входами x_1, x_2, \dots, x_n на одном выходе которой реализуется функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, причём схема V_f обладает следующими характеристиками:*

- 1) $l(V_f) = \mathcal{O}(2^{n/3})$, $w(V_f) = \mathcal{O}(2^{n/3})$, $h(V_f) = \mathcal{O}(2^{n/3})$.
- 2) $\hat{U}(V_f) = \mathcal{O}(2^{n/3})$.

Доказательство. Подадим в схеме V_f^1 на вход z константу 1. Полученная таким образом схема V_f реализует функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на всех наборах x_1, x_2, \dots, x_n и её параметры остаются такими же по порядку, как и у схемы V_f^1 . \square

Список литературы

- [1] Кравцов С. С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов. // Проблемы кибернетики. Вып. 19. — Наука, М., 1967. — С. 285–293.
- [2] Калачев Г. В. Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции // Дискретная математика. — 2014. — Т. 26, № 1. — С. 49–74.
- [3] Калачев Г. В. Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы // Интеллектуальные системы. Теория и приложения (ранее: Интеллектуальные системы по 2014, № 2, ISSN 2075-9460). — 2016. — Т. 20, № 2. — С. 203–266.

The top assessment of energy consumption in a class of volume schemes

Efimov A.A. In this work volume schemes which are generalization of plane schemes in space are considered. The class of the schemes implementing boolean functions was considered. For this class upper assessment of potential — a measure of the power equal to quantity of the circuit elements giving unit on this input pattern is received. It is shown that any function from n of variables can be implemented the volume scheme which potential does not exceed $\mathcal{O}(2^{n/3})$.

Keywords: schemes from functional elements, volume schemes, scheme power, potential.