О минимальной Шefферовой функции в классе кусочно-параллельных функций, определенных над двоично-рациональными числами

Агафонова М.В.

В настоящей статье рассматривается класс нейронных кусочно-параллельных функций с двоично-рациональными коэффициентами(BPP). Приводится доказательство существования в нем минимальной Шефферовой функции. Под минимальной Шефферовой функцией в рассматриваемом классе, понимается функция этого класса, порождающая этот класс по операциям суперпозиции и содержащая минимально возможное количество переменных и пороговых функций. Было установлено, что в данном классе минимальная Шефферова функция содержит две переменных и одну пороговую функцию. Также в статье приводится одно из необходимых условий Шефферовости функции, принадлежащей BPP.

Ключевые слова: класс, кусочно-параллельные функции, нейронные функции, двоично-рациональные коэффициенты, операции суперпозици, Шефферова функция.

1. Введение.

Исследование класса нейронных кусочно-параллельных функций берет свое начало из работы Половникова В.С [1]. В указанной работе, вводится понятие нейронной схемы над элементами, реализующими линейные функции и нелинейные функции активации. Над нейронными схемами выполняются операции суперпозиции: добавление фиктивного входа, изъятие фиктивного входа, склеивание входов, переименование входов без склеивания, последовательное соединение. Таким образом, рассматривается функциональная система [2] нейронных схем. Автором работы [1], были изучены и описаны некоторые свойства нейронных схем, методы их построения,а также произведены доказательства эквивалентности между множеством функций реализуемых нейронными схемами без памяти и множеством кусочно-линейных функций (PL), а также между множеством функций, реализуемых нейронными схемами модели Мак-Каллока-Питтса[3], и множеством кусочно-параллельных функций (PP). Изучение класса PL было продолжено в работах А. Кана. [4][5]. Рассмотрение же класса PP, было развито в работе [6], а в настоящей работе рассматривается его подкласс, состоящий из кусочно-параллельных функций с двоично-рациональными коэффициентами.

Класс кусочно-параллельных функций порождается множеством состоящим, из всех вещественных констант, сумматора, умножителя на вещественную константу и функции Хэвисайда. В работе [6] вещественные коэффициенты в PP заменяются на приближающие их двоично-рациональные. Учитывая, что любое двоично-рациональное число может быть получено из константы $\frac{1}{2}$ и формул $\frac{1}{2}x, -x, x+y$, при использовании операций суперпозиции, рассматриваемый в этой работе класс, имеет конечный базис, в отличие от PP. Учитывая, что константа $\frac{1}{2}$ получается из суперпозиции: $\frac{1}{2}(\theta(\theta(x)) = \frac{1}{2}$, где $\theta(x)$ - функция Хэвисайда:

$$\theta(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases},$$

имеем базис

$$B = \{\frac{1}{2}x, -x, x+y, \theta(x)\}.$$

Замыкание функций $B = \{\frac{1}{2}x, -x, x+y, \theta(x)\}$, по операциям суперпозиции (добавление фиктивной переменной, удаление фиктивной переменной, отожествление переменных, переименование переменных без отожествления, последовательная подстановка функции вместо переменной) образует множеством кусочно-параллельных функций с двоично-рациональными коэффициентами и обозначается BPP,

$$[B] = BPP.$$

Конечность базиса в классе BPP существенно отличает его от класса PP.

Ранее было показано, что любая функция из класса PP аппроксимируется с любой наперед заданной точностью элементом из множества BPP, зависящим от заданной точности. [6].

Следует отметить, что в работе [6] приводится доказательство того, что для ВРР существует Шефферова [7] функция, которая имеет вид:

$$F(x, y, z) = x - \frac{1}{2}(y) - \frac{1}{2}\theta^{'}(z) + \frac{1}{2},$$

где

$$\theta^{'}(z) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{при } z > 0 \\ 0 & \text{при } z \leq 0 \end{cases},$$

а также, доказательство существования в классе ВРР для произвольного натурального числа k базиса, состоящего из k элементов.

В данной же работе, найдена Шефферова функция минимальная в классе ВРР а также некоторые условия Шефферовости функции в этом классе. Под минимальной Шефферовой функцией понимается функция этого класса, порождающая этот класс и имеющая минимальное количество переменных и пороговых элементов.

2. Полученные результаты

Сначала рассмотрим, полученное необходимое условие Шефферовости функции, принадлежащей классу ВРР, с тем условием, что данная функция будет минимальной Шефферовой в нем. Не трудно увидеть, что Шефферова функция содержит хотя бы один нелинейный элемент и зависит не менее чем от двух переменных. Поэтому Шефферовы функции будем искать в следующем виде:

$$g(x, y) = ax + by + c + r\theta(dx + ey + f).$$

Очевидно количество переменных не может быть уменьшено, так как из суперпозиций функций, зависящих от одной переменной, получаются функции, также зависящие от одной переменной. А удаление пороговой функции приведет к тому, что мы будем получать только непрерывные линейные функции. *Определение* Пусть для функции $g(x, y) \in BBP$,

$$g(x, y) = ax + by + c + r\theta(dx + ey + f),$$

выполнено:

$$a + b - 1 \neq 0$$

Тогда, если функция g является Шеферовой, тогда выполнены следующие неравенства:

$$\begin{cases} d(-\frac{c}{a+b-1}) + e(-\frac{c}{a+b-1}) + f \geq 0, \\ d(-\frac{c+r}{a+b-1}) + e(-\frac{c+r}{a+b-1}) + f < 0. \end{cases}$$

Доказательство: Это утверждение следует из того факта, что Шефферова функция, не должна сохранять ни одну из констант. Рассмотрим обратное, подставим какую-либо произвольную константу k:

$$g(k,k) = ak + bk + c + r\theta(dk + ek + f) = k$$

Возможны 2 случая для $\theta(dk + ek + f)$:

1)При $dk + ek + f < 0$, при этом $\theta(dk + ek + f) = 0$,

Тогда функция $g(k,k)$ примет вид:

$$g(k,k) = ak + bk + c = k.$$

Откуда найдем выражение для k:

$$ak + bk - k = -c,$$

$$k(a + b - 1) = -c.$$

$$k = -\frac{c}{(a + b - 1)}$$

при условии, что $a + b - 1 \neq 0$

Т.е. если система условий $\begin{cases} dk + ek + f < 0, \\ a + b - 1 \neq 0. \end{cases}$ выполнена, то функция g сохраняет константу k:

$$k = -\frac{c}{a + b - 1}.$$

Следовательно, для того чтобы такая константа k не существовала, т.е. функция $g(x,y)$ не сохраняла, ни одну из констант, необходимо чтобы:

$$d(-\frac{c}{a + b - 1}) + e(-\frac{c}{a + b - 1}) + f \geq 0.$$

Аналогично рассматривается второй случай:

2) При $dk + ek + f \geq 0$, при этом $\theta(dk + ek + f) = 1$,

Тогда функция $g(k,k)$ примет вид:

$$g(k,k) = ak + bk + c + r = k.$$

Откуда найдем выражение для k:

$$ak + bk - k = -c - r,$$

$$k(a + b - 1) = -c - r,$$

$$k = -\frac{c + r}{a + b - 1}$$

при условии, что $a + b - 1 \neq 0$.

Т.е. при выполнении системы условий $\begin{cases} dk + ek + f \geq 0, \\ a + b - 1 \neq 0. \end{cases}$, такая константа k существует:

$$k = -\frac{c + r}{a + b - 1}.$$

Т.е., для того чтобы такая константа k не существовала, необходимо, чтобы:

$$d(-\frac{c + r}{a + b - 1}) + e(-\frac{c + r}{a + b - 1}) + f < 0.$$

Следовательно, для того, чтобы g(x,y) не сохраняла ни какую из переменных необходимо чтобы ее коэффициенты удовлетворяли системе условий:

$$\begin{cases} d(-\frac{c}{a+b-1}) + e(-\frac{c}{a+b-1}) + f \geq 0, \\ d(-\frac{c+r}{a+b-1}) + e(-\frac{c+r}{a+b-1}) + f < 0. \end{cases}$$

Утверждение доказано.

Рассмотрим пример функции, удовлетворяющей описанным выше условиям и являющейся Шефферовой в классе ВРР.

Такая функция имеет вид:

$$F(x, y) = -\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}\theta(-x).$$

Теперь подставим коэффициенты рассматриваемой функции $F(x, y)$ в найденные уравнения.

$$a = -\frac{1}{2}, b = 1, c = 0, r = \frac{1}{2}, d = -1, e = 0, f = 0.$$

$$\begin{cases} -1(-\frac{0}{-\frac{1}{2}+1-1}) + 0(-\frac{0}{-\frac{1}{2}+1-1}) + 0 \geq 0, \\ -1(-\frac{0+-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1-1}) + 0(-\frac{0+\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1-1}) + 0 < 0. \end{cases}, \begin{cases} 0 \geq 0, \\ -(-\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1-1}) < 0. \end{cases}, \begin{cases} 0 \geq 0, \\ -1 < 0. \end{cases}$$

Условия выполняются. Докажем теперь, что эта функция является Шефферовой в классе кусочно-параллельных функций с двоично-рациональными коэффициентами.

Теорема 1. *Функция:*

$$F(x,y) = -\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}\theta(-x),$$

где

$$\theta(-x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{при } -x \geq 0 \\ 0 & \text{при } -x < 0 \end{cases},$$

является минимальной Шефферовой функцией в классе кусочно-параллельных функций с двоично-рациональными коэффициентами.

Доказательство: Очевидно функция является минимальной в ВРР. Докажем теперь, что она Шефферова.

Для удобства доказательства проведем некоторые преобразования функции $F(x,y)$. Используя равенство:

$$\theta(-x) = 1 - \theta^{'}(x),$$

заменим $\theta(-x)$ на $\theta^{'}(x)$, где

$$\theta^{'}(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x \leq 0 \end{cases}.$$

$$F(x,y) = -\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}(1 - \theta^{'}(x)) = -\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}\theta^{'}(x) + \frac{1}{2},$$

Теперь докажем, что $F(x,y)$ является Шефферовой в ВРР.

Для начала, получим константу $\frac{1}{2}$ из функции $F(x,y)$. Для этого рассмотрим следующую суперпозицию:

$$F_1(x,y) = F(x, F(x,y)) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}\theta^{'}(x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\theta^{'}(x) + \frac{1}{2},$$

$$F_1(x,y) = -x + y - \theta^{'}(x) + 1.$$

Отождествим переменные x и y:

$$F_2(x) = F_1(x,x) = -x + x - \theta^{'}(x) + 1 = -\theta^{'}(x) + 1 = 1 - \theta^{'}(x).$$

Применим операцию суперпозиции для F и $F_2(x)$:

$$F_3 = F(F_2(x), F_2(x)) = -\frac{1}{2}(1 - \theta^{'}(x)) + 1 - \theta^{'}(x) - \frac{1}{2}\theta^{'}(1 - \theta^{'}(x)) + \frac{1}{2}$$

$$F_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\theta^{'}(x) + 1 - \theta^{'}(x) - \frac{1}{2}\theta^{'}(1 - \theta^{'}(x)) + \frac{1}{2} = 1 - \theta^{'}(x) + \frac{1}{2}\theta^{'}(x) - \frac{1}{2}\theta^{'}(1 - \theta^{'}(x)).$$

Рассмотрим чему равно $\theta'(1-\theta'(x))$. Так как

$$1-\theta'(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0 \\ 1 & \text{при } x \leq 0 \end{cases},$$

и одновременно

$$\theta'(1-\theta'(x)) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0 \\ 1 & \text{при } x \leq 0 \end{cases}.$$

Значит, $\theta'(1-\theta'(x)) = 1-\theta'(x)$. Следовательно,

$$F_3 = 1-\theta'(x)+\frac{1}{2}\theta'(x)-\frac{1}{2}(1-\theta'(x)) = 1-\theta'(x)+\frac{1}{2}\theta'(x)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\theta'(x) = \frac{1}{2}.$$

Получим теперь константу ноль. Для чего, подставим в функцию F_2 вместо переменной x, константу $\frac{1}{2}$:

$$F_2(\frac{1}{2}) = -\theta'(\frac{1}{2}) + 1 = -1 + 1 \equiv 0.$$

Получим функцию $y+1$ и константу 1:

$$F_4(y) = F_1(0, y) = 0 + y - \theta'(0) + 1 = y + 1,$$

$$F_4(0) \equiv 1.$$

Теперь получим функцию $-\theta'(x) + 2$, содержащую $\theta'(x)$ и в тоже время всегда принимающую положительные значения:

$$-\theta'(x)+2 \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 2 & \text{при } x \leq 0 \end{cases},$$

$$F_5(x) = F_4(F_2(x)) = -\theta'(x) + 1 + 1 = -\theta'(x) + 2 > 0.$$

Получим функцию $-x$.

Переименуем в функции $F_1(x, y)$ переменную x в переменную k и применив операцию суперпозиции для $F_1(x, y)$ и $F_1(k, y)$ получим:

$$F_6(x,k,y) = F_1(x, F_1(k,y)) = -x-k+y-\theta'(k)+1-\theta'(x)+1 = -x-k+y-\theta'(k)-\theta'(x)+2$$

Применим суперпозицию для $F_6(x, k, y)$ и $F_5(x)$, причем

$$F_5(x) > 0:$$

$$F_7(x,y) = F_6(x, F_5(x), y) = -x + \theta^{'}(x) - 2 + y - \theta^{'}(-\theta^{'}(x) + 2) - \theta^{'}(x) + 2,$$

$$F_7(x,y) = -x + \theta^{'}(x) - 2 + y - 1 - \theta^{'}(x) + 2 = -x + y - 1,$$

$$F_8(x) = F_4(F_7(x,y)) = -x + y - 1 + 1 = -x + y,$$

$$F_9(x) = F_8(x,0) = -x.$$

Функцию $x+y$ получим следующим образом:

$$F_{10}(x,y) = F_8(F_9(x), y) = -(-x) + y = x + y.$$

Теперь получим функцию $\frac{1}{2}x$. Для этого переименуем в функции $F(x,y)$ переменную x в переменную k и применив операцию суперпозиции для $F_1(x,y)$ и $F(k,y)$ получим:

$$F_{11}(x,k,y) = F_1(x, F(k,y)) = -x - \frac{1}{2}k + y - \frac{1}{2}\theta^{'}(k) + \frac{1}{2} - \theta^{'}(x) + 1,$$

рассмотрим суперпозицию $F_{11}(x,k,y)$ и $F_5(x)$:

$$F_{12}(x,y) = F_{11}(x, F_5(x), y) = -x - \frac{1}{2}(\theta^{'}(x)+2) + y - \frac{1}{2}\theta^{'}(-\theta^{'}(x)+2) + \frac{1}{2} - \theta^{'}(x) + 1 =$$

$$= -x + \frac{1}{2}\theta^{'}(x) - 1 + y - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \theta^{'}(x) + 1 = -x - \frac{1}{2}\theta^{'}(x) + y.$$

И далее рассмотрим суперпозицию $F^{'}(x,y) = F(x,-y)$ и $F_{12}(x,0)$:

$$F_{13}(x) = F^{'}(x, F_12(x,0)) = -\frac{1}{2}x - (-x - \frac{1}{2}\theta^{'}(x)) - \frac{1}{2}\theta^{'}(x) + \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}x + x + \frac{1}{2}\theta^{'}(x) - \frac{1}{2}\theta^{'}(x) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Из функции $-x$ и константы $\frac{1}{2}$ получим константу $-\frac{1}{2}$, и из полученной константы, функций $x+y$ и $F_{13}(x)$ получим $\frac{1}{2}x$:

$$F_{14}(x) = F_{10}(F_13(x), -\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x.$$

И последнее, выведем $\theta(x)$:

$$\theta(x) = 1 - \theta^{'}(-x).$$

Таким образом, получены все функции множества B,

$$B = \{\frac{1}{2}x, -x, x+y, \theta(x)\}$$

являющегося порождающим для класса кусочно-параллельных функций с двоично-рациональными коэффициентами. Следовательно функция

$$F(x,y) = -\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}\theta'(x) + \frac{1}{2}$$

является Шефферовой в данном классе. Следовательно, и функция

$$F(x,y) = -\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}\theta(-x),$$

является минимальной Шефферовой в ВРР.
Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю признательность Часовских А.А. за ценные обсуждения, советы и замечания в ходе работы над темой.

Список литературы

[1] Половников В. С. Об оптимизации структурной реализации нейронных сетей. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук — Москва, 2006.

[2] Кудрявцев В. Б., Функциональные системы . — М.: Изд-во МГУ, 1982.

[3] Хайкин С. Нейронные сети: полный курс // 2-е издание. Вильямс, 2006. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. — 2016. — № 4. — С. 12–17.

[4] Кан А. Н. Вопросы выразимости в классе нейронных функций //Интеллектуальные системы — том 19, — Выпуск 1. — 2015.

[5] Кан А. Н. Вопросы полноты в классе кусочно-линейных непрерывных функций. //Интеллектуальные системы — том 21, — Выпуск 2. — 2017.

[6] Агафонова М. В. О классе нейронных функций с двоично-рациональными параметрами. //Интеллектуальные системы — том 22, — Выпуск 1. — 2018.

[7] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. . — М.: Изд-во Наука, 1986.

On a minimal Scheffer function in the class of partial-parallel functions defined over binary rational numbers.

Agafonova M.V.

This article discusses the class of neural partial-parallel functions with binary rational coefficients (BPP-class). It is proven that a minimal Scheffer function exists in this class. By a minimal Scheffer function in the class, we mean a function of this class that generates this class by superposition operations and contains the minimum possible number of variables and threshold functions. It was established that a minimal Scheffer function contains two variables and one threshold function. The article also provides one of the necessary conditions for the Scheffer-type function to be contained in the BPP-class.

Keywords: class, partial-parallel functions, neural functions, binary coefficients, superposition operations, Scheffer function.