Равномерная V-реализуемость принципа Маркова в V-перечислимой области

Коновалов А. Ю.

Определяются различные варианты понятия V-реализуемости для формул языка логики предикатов, основанные на использовании функций из множества V для интерпретации импликации и квантора всеобщности. Устанавливается, что принцип Маркова является слабо V-реализуемым, не является равномерно V-реализуемым и является V-реализуемым равномерно в области M, если множество $M \subseteq \mathbb{N}$ является V-перечислимым.

Ключевые слова: конструктивная семантика, реализуемость, абсолютная реализуемость, обобщенная реализуемость, принцип Маркова.

Принцип конструктивного подбора, или *принцип Маркова*, выражаемый предикатной формулой

$$\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x)) \to (\neg\neg\exists x\, P(x) \to \exists x\, P(x)), \tag{MP}$$

является одним из основных законов конструктивной логики, отличающим ее от интуиционистской логики. В контексте рекурсивной реализуемости принцип Маркова означает, что формула (MP) является реализуемой, если областью возможных значений переменной x является множество всех натуральных чисел $\mathbb{N}$. Возможность варьирования предметной области полностью исследована в работе [1]. Там доказано, что формула (MP) реализуема в некоторой области M тогда и только тогда, когда множество M рекурсивно-перечислимо.

В работах [2, 3] определены обобщения понятия рекурсивной реализуемости, в которых вместо индексов частично-рекурсивных функций в качестве реализаций используются индексы частичных функций из более широких классов. Представляет интерес исследовать вопрос о корректности принципа Маркова относительно различных вариантов обобщенной реализуемости.

Пусть V — некоторое счетное множество частичных функций натурального аргумента. Элементы множества V назовем V-функциями. Будем считать, что для каждого натурального числа n имеется нумерация всех n-местных V-функций. А именно, определено множество индексов $\mathsf{I}_n^V \subseteq \mathbb{N}$ вместе с отображением, которое каждому натуральному числу $z \in \mathsf{I}_n^V$ ставит в соответствие n-местную V-функцию $\varphi_z^{V,n}$, и при этом всякая n-местная V-функция есть $\varphi_z^{V,n}$ для некоторого $z \in \mathsf{I}_n^V$. Будем говорить, что натуральное число z есть *V-индекс* n-местной V-функции φ, если $z \in \mathsf{I}_n^V$ и $\varphi = \varphi_z^{V,n}$. При записи выражений вида $\varphi_z^{V,n}(t_1, \dots, t_n)$ обычно будем опускать верхний индекс n. Будем считать, что множество V вместе с вышеописанной нумерацией обладает следующими свойствами:

С1) множество V содержит все частично-рекурсивные функции;

С2) если ψ есть n-местная V-функция, s — перестановка на множестве $\{1, \dots, n\}$, то функция ψ', определенная условным равенством

$$\psi'(x_1, \dots, x_n) \simeq \psi(x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)}),$$

является V-функцией;

С3) если ψ есть n-местная V-функция, то функция ψ', определенная условным равенством

$$\psi'(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \simeq \psi(x_1, \dots, x_n),$$

является V-функцией;

С4) если ψ есть $(n+m)$-местная V-функция, $a_1, \dots, a_m$ — натуральные числа, то функция ψ', определенная условным равенством

$$\psi'(x_1, \dots, x_n) \simeq \psi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m),$$

является V-функцией;

С5) если ψ есть $(n+1)$-местная V-функция, то функция ψ', определенная условным равенством

$$\psi'(x_1, \dots, x_n) \simeq \mu x\, [\psi(x_1, \dots, x_n, x) = 0],$$

является V-функцией (μ — оператор минимизации);

С6) если ψ есть m-местная V-функция, $\psi_1, \dots, \psi_m$ суть n-местные V-функции, то функция ψ', определенная условным равенством

$$\psi'(x_1, \dots, x_n) \simeq \psi(\psi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_m(x_1, \dots, x_n)),$$

является V-функцией.

Кроме этого, потребуем эффективного выполнения свойств C2–C6. А именно, будем считать, что существует такая V-функция (своя для каждого из свойств C2–C6), которая по V-индексу функции ψ (V-индексам функций $\psi, \psi_1, \ldots, \psi_m$) находит некоторый V-индекс функции ψ'.

Отметим, что свойствам C1–C6 удовлетворяет множество всех частично-рекурсивных функций с подходящей нумерацией. В работах [2, 3] приводятся такие нумерации всех арифметических и всех гиперарифметических функций, что свойства C1–C6 выполняются для соответствующих классов функций.

Предикатные формулы строятся обычным образом из атомов $P(v_1, \ldots, v_n)$, где P есть n-местная предикатная переменная, а $v_1, \ldots, v_n$ — предметные переменные, при помощи логических констант $\top$, $\bot$, связок $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ и кванторов $\forall$, $\exists$.

Пусть M — непустое подмножество натурального ряда. Следуя [4], n-местным обобщенным предикатом на множестве M будем называть всякую функцию типа $M^n \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$. Пусть A — предикатная формула, f — отображение, которое каждой предикатной переменной из A валентности n ставит в соответствие n-местный обобщенный предикат на множестве M. В этом случае отображение f будем называть M-оценкой формулы A. Временно введем в язык логики предикатов константы для обозначения элементов множества M. Формулы с этими константами будем называть предикатными формулами расширенного языка.

Пусть фиксированы примитивно-рекурсивные двухместная функция c, которая взаимно однозначно нумерует все пары натуральных чисел, и одноместные обратные функции p_1 и p_2, так что выполняются соотношения $\mathsf{p}_1(\mathsf{c}(x,y)) = x$ и $\mathsf{p}_2(\mathsf{c}(x,y)) = y$. В выражениях вида $\mathsf{p}_1(t)$, $\mathsf{p}_2(t)$ обычно будем опускать скобки.

Для натурального числа e, замкнутой предикатной формулы A расширенного языка и M-оценки f формулы A определим отношение $e\ \mathbf{r}_f^V\ A$ (число e V-реализует формулу A при оценке f):

1) неверно $e\ \mathbf{r}_f^V\ \bot$;

2) верно $e\ \mathbf{r}_f^V\ \top$;

3) $e\ \mathbf{r}_f^V\ P(a_1, \ldots, a_n) \rightleftharpoons e \in f(P)(a_1, \ldots, a_n)$, если P есть n-местная предикатная переменная;

4) $e\ \mathbf{r}_f^V\ (\Phi \wedge \Psi) \rightleftharpoons \mathsf{p}_1 e\ \mathbf{r}_f^V\ \Phi$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}_f^V\ \Psi$;

5) $e\ \mathbf{r}_f^V\ (\Phi \vee \Psi) \rightleftharpoons (\mathsf{p}_1 e = 0$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}_f^V\ \Phi)$ или $(\mathsf{p}_1 e = 1$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}_f^V\ \Psi)$;

6) $e\ \mathbf{r}_f^V\ (\Phi \to \Psi) \rightleftharpoons e \in \mathsf{I}_1^V$ и для всех натуральных чисел s, если имеет место $s\ \mathbf{r}_f^V\ \Phi$, то определено $\varphi_e^V(s)$ и верно $\varphi_e^V(s)\ \mathbf{r}_f^V\ \Psi$.

7) $e\ \mathbf{r}_f^V\ \exists x\, \Phi(x) \rightleftharpoons \mathsf{p}_1 e \in M$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}_f^V\ \Phi(\mathsf{p}_1 e)$;

8) $e\ \mathbf{r}_f^V\ \forall x\, \Phi(x) \rightleftharpoons e \in \mathsf{I}_1^V$ и для всех $a \in M$ определено $\varphi_e^V(a)$ и имеет место $\varphi_e^V(a)\ \mathbf{r}_f^V\ \Phi(a)$.

Есть несколько способов определить V-реализуемость замкнутых предикатных формул на основании отношения $e\ \mathbf{r}_f^V\ A$:

- замкнутую предикатную формулу A назовем *слабо V-реализуемой* (обозначение: $\mathbf{r}^V\ A$), если для любого непустого множества $M \subseteq \mathbb{N}$ и произвольной M-оценки f найдется такое натуральное число e, что имеет место $e\ \mathbf{r}_f^V\ A$;

- замкнутую предикатную формулу A назовем *V-реализуемой равномерно в области M* (обозначение: $\mathbf{ur}_M^V\ A$), если найдется такое натуральное число e, что для любой M-оценки f имеет место $e\ \mathbf{r}_f^V\ A$;

- замкнутую предикатную формулу A назовем *равномерно V-реализуемой* (обозначение: $\mathbf{ur}^V\ A$), если найдется такое натуральное число e, что для любого непустого множества $M \subseteq \mathbb{N}$ и произвольной M-оценки f имеет место $e\ \mathbf{r}_f^V\ A$.

Верны следующие теоремы.

Теорема 1. *Формула* (MP) *является слабо V-реализуемой.*

Теорема 2. *Формула* (MP) *не является равномерно V-реализуемой.*

Теорема 3. *Пусть множество M непусто и V-перечислимо. Тогда формула* (MP) *является V-реализуемой равномерно в области M.*

Список литературы

[1] Заславский И. Д., Цейтин Г. С. К вопросу об обобщениях принципа конструктивного подбора // Тр. МИАН СССР. 1964. **72**. 344—347.

[2] Коновалов А. Ю., Плиско В. Е. О гиперарифметической реализуемости // Мат. зам. 2015. **98**, №5. 725—746.

[3] Коновалов А. Ю. Арифметическая реализуемость и базисная логика // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. №1. 52–56.

[4] Плиско В. Е. Абслолютная реализуемость предикатных формул // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. **47**. №2. стр. 315–334.

Markov's Principle is uniformly V-realizable in any V-enumerable domain.

Konovalov A. Yu.

Various variants of the notion of the V-realizability for predicate formulas are defined, where indexes of functions in the set V are used for interpreting the implication and the universal quantifier. It is proved that Markov's Principle is weakly V-realizable, not uniformly V-realizable, and uniformly V-realizable in any V-enumerable domain $M \subseteq \mathbb{N}$.

Keywords: constructive semantics, realizability, absolute realizability, generalized realizability, Markov's Principle.