О конечных заданиях логических систем

Боков Г. В.

В работе рассматривается задача конечного представления логических систем пропозициональными исчислениями. Исследуются три типа логических систем: линейные, монотонные и импликативные. Для каждого из этих типов логических систем доказаны достаточные условия их конечного задания. Кроме того, доказан критерий конечного задания произвольной логической системы множества классических тавтологий.

Ключевые слова: логические системы, пропозициональные исчисления, конечное задание, правила вывода.

1. Введение

Пропозициональные исчисления являются мощным средством задания логических систем и процессов [8]. Заложенный в них инструментарий позволяет решать алгоритмические проблемы для широкого класса логических систем [1, 3, 6, 18, 19, 21], включая системы с нестандартными правилами вывода [2, 5, 20].

При моделировании логических систем часто возникает вопрос: какие логические системы допускают «простое» задание пропозициональными исчислениями, а какие нет? Поскольку каждую логическую систему можно рассматривать как обобщённое пропозициональное исчисление, то естественно ограничиться рассмотрением только таких заданий, которые в некоторой степени проще исходной логической системы. Как правило, простое задание основано на выделении систем образующих или порождающих элементов логической системы. Рассмотрим это более подробно.

Пусть дана логическая система $\mathcal{L} = \langle \mathbf{M}, \mathbf{Q} \rangle$ над множеством формул $\mathbf{M}$, замкнутом относительно правил $\mathbf{Q}$.

Определение 1. Правило вывода $(F_1, \ldots, F_n) / F_0$ *допустимо* в логической системе $\mathcal{L}$, если

$$\sigma F_1 \in \mathbf{M},\ \ldots,\ \sigma F_n \in \mathbf{M} \quad \Longrightarrow \quad \sigma F_0 \in \mathbf{M}$$

для любой подстановки σ. Множество всех допустимых в $\mathcal{L}$ правил вывода обозначим через $\mathbf{R}_{\mathcal{L}}$.

Определение 2. Исчисление $\mathcal{P} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ *задаёт* логическую систему $\mathcal{L}$, если выполнены следующие условия:

1) $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{M}$;

2) $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}_{\mathcal{L}}$;

3) $[\mathcal{P}] = \mathbf{M}$, т.е. эквивалентность

$$\mathbf{A} \vdash_{\mathbf{R}} A \;\Leftrightarrow\; A \in \mathbf{M}$$

выполнена для любой формулы A. В этом случае, аксиомы $\mathbf{A}$ играют роль порождающих элементов, а $\mathbf{R}$ — роль порождающих правил вывода. Исчисление $\mathcal{P}$, задающее логическую систему $\mathcal{L}$, назовём *порождающим* для $\mathcal{L}$.

Накладывая ограничения на множества $\mathbf{A}$ и $\mathbf{R}$ можно получать порождающие исчисления для логической системы $\mathcal{L}$, обладающие заданными свойствами. Например, если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{R}$ — конечные множества, то говорят, что $\mathcal{L}$ допускает *конечное* задание. Такие задания представляют наибольший интерес, как с практической [7, 9], так и с теоретической [4] точки зрения. В основу исследования положены результаты работы [17].

2. Основные определения и обозначения

Введем ограничения на исходный пропозициональный язык, состоящий из логических связок $\mathcal{F}$ и счетного множества пропозициональных переменных $\mathcal{V}$. Будем считать, что всем логическим связкам из $\mathcal{F}$ в стандартной интерпретации соответствуют булевы функции, существенно зависящие от всех своих переменных, причём разным логическим связкам соответствуют разные булевы функции. Для простоты будем отождествлять логические связки с их стандартными интерпретациями, т.е. будем считать, что $\mathcal{F} \subseteq \mathbf{P}_2$.

Следуя [16], определим несколько классов булевых функций.

Определение 3. Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{P}_2$ называется

$$\begin{aligned}
&\alpha\text{-функцией, если } f(x, \ldots, x) = x,\\
&\beta\text{-функцией, если } f(x, \ldots, x) = 1,\\
&\gamma\text{-функцией, если } f(x, \ldots, x) = 0,\\
&\delta\text{-функцией, если } f(x, \ldots, x) = \overline{x}.
\end{aligned}$$

Обозначим через $\mathcal{F}_\alpha$, $\mathcal{F}_\beta$, $\mathcal{F}_\gamma$, $\mathcal{F}_\delta$ соответственно множества всех α-, β-, γ-, δ-функций в $\mathcal{F}$.

Определение 4. Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{P}_2$ называется *линейной*, если для неё имеет место соотношение

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \ldots \oplus c_n x_n,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \{0, 1\}$ и $\oplus$ — сумма по модулю 2. Множество всех линейных функций в $\mathbf{P}_2$ обозначим через $\mathbf{L}$.

Определение 5. Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{P}_2$ называется *монотонной*, если для любых наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in \{0, 1\}^n$ таких, что $\widetilde{\alpha} \leq \widetilde{\beta}$, имеет место соотношение

$$f(\widetilde{\alpha}) \leq f(\widetilde{\beta}).$$

Множество всех монотонных функций в $\mathbf{P}_2$ обозначим через $\mathbf{M}$.

Определение 6. Функция $f(x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbf{P}_2$ называется *импликативной*, если соотношение

$$f(a_1, \ldots, a_n, a_0) = 0 \ \Leftrightarrow \ a_0 < \min(a_1, \ldots, a_n)$$

выполнено для любых $a_1, \ldots, a_n, a_0 \in \{0, 1\}$. Множество всех импликативных функций в $\mathbf{P}_2$ обозначим через $\mathbf{I}$.

3. Линейные логические системы

Пусть $\mathcal{F} \subseteq \mathbf{L}$. Формулы, тавтологии и исчисления над связками $\mathcal{F}$ будем называть *линейными*. Обозначим через $\nu_A(a)$ число вхождений символа $a \in \mathcal{F} \cup \mathcal{V}$ в формулу A. Для линейных тавтологий верна лемма.

Лемма 1. *Любая переменная линейной тавтологии имеет чётное число вхождений.*

Доказательство. Линейная формула A от переменных $x_1, \ldots, x_n$ однозначно задает линейную функцию $f_A(x_1, \ldots, x_n)$, которая по определению 4 представима в виде:

$$f_A(x_1, \ldots, x_n) = c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \{0, 1\}$. Несложно убедиться, что для $1 \leq i \leq n$ коэффициент $c_i = 0$ тогда и только тогда, когда $\nu_A(x_i)$ — чётное. Следовательно, каждая переменная x_i, для которой $\nu_A(x_i)$ нечётно, является существенной для функции f_A. Напомним, что мы предположили, что все логические связки из $\mathcal{F}$, задают булевы функции, существенно зависящие от всех своих переменных. Поэтому, если A является тавтологией, то функция f_A не имеет существенных переменных и, следовательно, любая переменная имеет чётное число вхождений. $\square$

3.1. Линейное исчисление для произвольных связок

Определим множество правил вывода $\mathbf{R}_L$, состоящее из правил вида

$$\frac{A}{B}$$

для всех $A, B \in \mathbf{Fm}$ таких, что $A \models B$ и A, B содержат не более 3 логических связок из $\mathcal{F}$. Формулы A и B, такие что $A \vdash_{\mathbf{R}_L} B$ и $B \vdash_{\mathbf{R}_L} A$, будем называть *эквивалентными* и обозначать через $A \sim B$. Если при этом A и B эквивалентны как алфавитные деревья, то будем говорить, что A и B эквивалентны *сильно*. Заметим, что в силу определения изоморфизма алфавитных деревьев число вхождений символов из $\mathcal{F} \cup \mathcal{V}$ в сильно эквивалентные формулы A и B совпадают.

Логическая связка $f \in \mathcal{F}$ имеет *корневое вхождение* в формуле A, если $\mathfrak{t}_A(\varepsilon) = f$. Вхождение $\alpha \in \mathbf{Pos}(A)$ связки f в формулу A назовем *сводимым*, если для любого собственного непустого начала $\beta \prec \alpha$ выполнено $\mathfrak{t}_A(\beta) = g$, где g — логическая связка арности больше 1. Следующая лемма показывает, что некорневые сводимые вхождения логических связок в линейных формулах можно опустить ближе в корню дерева, представляющего эту формулу.

Лемма 2. *Для любой линейной формулы A и любого неконстантного символа $f \in \mathcal{F}$, имеющего некорневое сводимое вхождение в A, существует строго эквивалентная ей формула B такая, что $Head(A) = Head(B)$ и $\mathfrak{t}_B(k) = f$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Рассмотрим некорневое сводимое вхождение α символа f в формулу A. Докажем утверждение леммы индукцией по длине слова α.

Базис индукции: $|\alpha| = 1$. Тогда для $B = A$ утверждение леммы верно.

Шаг индукции: пусть утверждение верно для всех таких $\alpha \in \mathbf{Pos}(A)$, что $1 \leq |\alpha| < l$. Докажем его для α, имеющего длину l. Поскольку $|\alpha| > 1$, то найдутся такие $k, i \in \mathbb{N}$ и $\beta \in \mathbb{N}^*$, что $\alpha = ki\beta$. Возможны следующие случаи.

(1) $|\beta| = 0$. Тогда формула A представима в виде

$$h(A_1, \ldots, g(B_1, \ldots, f(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_s), \ldots, B_m), \ldots, A_n),$$

где n, m и s — арности логических связок h, g и f соответственно, $j \in \{1, \ldots, s\}$. Поскольку $s \geq 1$, то такое j всегда найдется. Применением правил $\mathbf{R}_L$ можно вывести строго эквивалентную формулу B вида

$$h(A_1, \ldots, f(C_1, \ldots, g(B_1, \ldots, C_j, \ldots, B_m), \ldots, C_s), \ldots, A_n),$$

для которой $Head(B) = Head(A)$ и $\mathfrak{t}_B(k) = f$, поэтому для случая $|\beta| = 0$ утверждение леммы верно.

(2) $|\beta| > 0$. Тогда найдется такое $j \in \mathbb{N}$ и $\gamma \in \mathbb{N}^*$, что $\beta = j\gamma$ и $\alpha = kij\gamma$. В этом случае формула A представима в виде

$$h(A_1, \ldots, g(B_1, \ldots, f'(C_1, \ldots, C_{j'}, \ldots, C_s), \ldots, B_m), \ldots, A_n),$$

где n, m и s — арности логических связок h, g и f' соответственно, $j' \in \{1, \ldots, s\} \setminus \{j\}$. Поскольку $s > 1$, то такое j' всегда найдется. Применением правил $\mathbf{R}_L$ можно вывести строго эквивалентную формулу C вида:

$$h(A_1, \ldots, f'(C_1, \ldots, g(B_1, \ldots, C_{j'}, \ldots, B_m), \ldots, C_s), \ldots, A_n).$$

Для формулы C имеем $Head(A) = Head(C)$ и $\mathfrak{t}_C(kj\gamma) = f$ и $|kj\gamma| = l - 1$. По индуктивному предположению для формулы C найдется такая строго эквивалентная формула B, что $Head(C) = Head(B)$ и $\mathfrak{t}_B(k') = f$ для некоторого $k' \in \mathbb{N}$. Поскольку отношение строгой эквивалентности является транзитивным, то B строго эквивалентна A и $Head(A) = Head(B)$.

Разбор всех случаев завершает доказательство. $\square$

Следствие 1. *Для любой линейной формулы A и любого неконстантного символа $f \in \mathcal{F}$, имеющего некорневое сводимое вхождение в A, существует строго эквивалентная ей формула B такая, что $Head(B) = f$.*

Доказательство. Согласно Лемме 2 найдется такая строго эквивалентная формула C, что $Head(A) = Head(C)$ и $\mathfrak{t}_C(k) = f$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Формулу C можно представить в виде:

$$h(A_1, \dots, f(B_1, \dots, B_j, \dots, B_m), \dots, A_n),$$

где n и m — арности логических связок h и f соответственно, $j \in \{1, \dots, m\}$. Поскольку $m \geq 1$, то такое j всегда найдется. Применением правил $\mathbf{R}_L$ можно вывести строго эквивалентную формулу B вида

$$f(B_1, \dots, h(A_1, \dots, B_j, \dots, A_n), \dots, B_m),$$

для которого $\mathfrak{t}_B(\varepsilon) = f$. $\square$

Лемма 3. *Для любой линейной формулы A существует такая эквивалентная ей формула B, что выполнены следующие условия:*

1) B не содержит унарных α-связок;

2) B содержит не более одной унарной δ-связки.

Доказательство. Обозначим через $n_\alpha(A)$ и $n_\delta(A)$ число вхождений в A унарных α-связок и унарных δ-связок соответственно. Докажем утверждение леммы индукцией по $n_\alpha(A)$ и $n_\delta(A)$.

Базис индукции: $n_\alpha(A) = 0$ и $n_\delta(A) \leq 1$. Тогда формула A удовлетворяет условиям 1, 2 и утверждение верно.

Шаг индукции: пусть $n_\alpha(A) > 0$ или $n_\delta(A) > 1$. Рассмотрим наименьшее вхождение $\alpha \in \mathbf{Pos}(A)$ унарной связки $f \in \mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{F}_\delta$. Поскольку нет одноместных β-,γ-функций, существенно зависящих от одной переменной, то для любого собственного подслова $\beta \prec \alpha$ символ $\mathfrak{t}_A(\beta)$ имеет арность, большую 1. Поэтому вхождение α символа f является сводимым. По следствию 1 найдется такая строго эквивалентная формула $B \in \mathbf{Fm}$, для которой $Head(B) = f$. Так как $n_\alpha(B) = n_\alpha(A)$ и $n_\delta(B) = n_\delta(A)$, то возможны два случая.

(1) $f \in \mathcal{F}_\alpha$. Тогда применяя правило

$$\frac{f(x)}{x}$$

к формуле B получим, что $A \sim A|_1$. Для формулы $C = A|_1$ имеем $n_\alpha(C) < n_\alpha(A)$ и $n_\delta(C) = n_\delta(A)$.

(2) $f \in \mathcal{F}_\delta$, тогда рассмотрим некорневое сводимое вхождение β унарного символа $g \in \mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{F}_\delta$ в формулу A. Поскольку $n_\delta(A) > 1$, то такое вхождение всегда найдется. По Лемме 2 найдется такая строго эквивалентная формула $C \in \mathbf{Fm}$, что $Head(B) = Head(C)$ и $\mathfrak{t}_C(k) = g$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда формула C имеет вид $f(g(D))$, для некоторой формулы $D \in \mathbf{Fm}$, причём $n_\alpha(C) = n_\alpha(A)$ и $n_\delta(C) = n_\delta(A)$.

Если $g \in \mathcal{F}_\alpha$, то с помощью правила

$$\frac{f(g(x))}{f(x)}$$

из C можно вывести $f(D)$, рассмотрение которой сводится к предыдущему случаю. Если же $g \in \mathcal{F}_\delta$, то применяя правило

$$\frac{f(g(x))}{x}$$

к формуле C получим, что $C \sim D$. Для формулы D имеем $n_\alpha(D) = n_\alpha(A)$ и $n_\delta(D) < n_\delta(A)$.

Во всех случаях для формулы A найдется такая формула B, что $A \sim B$ и либо $n_\alpha(B) < n_\alpha(A)$, либо $n_\delta(B) < n_\delta(A)$. Тогда по предположению индукции лемма доказана. □

Лемма 4. *Для любой линейной формулы существует эквивалентная ей формула, не содержащая α-связок.*

Доказательство. Рассмотрим линейную формулу A с l α-связками. Докажем индукцией по $l \geq 0$, что существует эквивалентная формула B, не содержащая α-связок.

Базис индукции: $l = 0$. Тогда для $B = A$ утверждение верно.

Шаг индукции: пусть утверждение верно для всех $0 \leq l' < l$, докажем его для l. Поскольку $l > 0$, то найдется вхождение символа $f \in \mathcal{F}_\alpha$

в формулу A. Согласно Лемме 3 можно считать, что A не содержит одноместных символов из $\mathcal{F}_\alpha$ и содержит не более одного символа из $\mathcal{F}_\delta$. Без ограничения общности будем считать, что $\mathcal{F}$ содержит только одну 0-местную β-функцию и одну 0-местную γ-функцию, которые обозначим через 1 и 0, соответственно. Возможны два случая:

(1) Если A не содержит одноместных символов из $\mathcal{F}_\delta$, тогда по следствию 1 найдется такая строго эквивалентная формула B, что $B = f(B_1, \ldots, B_n)$, где n — арность символа f и $n > 1$. Поскольку B не имеет одноместных связок, то последовательным применением правил $\mathbf{R}_L$ из B можно вывести формулу C вида

$$f(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{n_1}, \underbrace{x_2, \ldots, x_2}_{n_2}, \ldots \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{n_k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n_{k+1}}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n_{k+2}}, D), \quad (1)$$

где $\{x_1, \ldots, x_k\}$ — все переменные формулы A, $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_i \in \mathbb{N}_+$, $i = 2, \ldots, k+2$ и D — это формула вида $g(D_1, \ldots, D_m)$, где m — арность g и

$$D_1 = \begin{cases} x_i, \text{ если } n_{i-1} \neq 0 \text{ и } 0 \leq n_i < \nu_A(x_i), \\ 1, \text{ если } n_k = \nu_A(x_k) \text{ и } 0 \leq n_{k+1} < \nu_A(1), \\ 0, \text{ если } n_{k+1} = \nu_A(1). \end{cases}$$

Причем, для каждого $1 \leq i \leq k+2$, если $n_i = 0$, то $n_{i+1} = 0$, а также, если $n_{i+1} \neq 0$, то $n_i = \nu_A(x_i)$. По сути A в этом случае представляет собой дерево, внутренние вершины которого имеют хотя бы два выходных ребра, а правил $\mathbf{R}_L$ перебалансируют это дерево.

(2) Если A содержит одноместный символов $h \in \mathcal{F}_\delta$, тогда по следствию 1 найдется такая строго эквивалентная формула B, что $B = h(f(B_1, \ldots, B_n)$, где n — арность символа f и $n > 1$. Поскольку B_i не имеют одноместных связок, то последовательным применением правил $\mathbf{R}_L$ из B можно вывести формулу C вида

$$h(f(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{n_1}, \underbrace{x_2, \ldots, x_2}_{n_2}, \ldots \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{n_k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n_{k+1}}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n_{k+2}}, D)),$$

где $\{x_1, \ldots, x_k\}$ — все переменные формулы A, $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_i \in \mathbb{N}_+$, $i = 2, \ldots, k+2$ и D — это формула вида $g(D_1, \ldots, D_m)$, где m — арность

g и

$$D_1 = \begin{cases} x_i, \text{ если } n_{i-1} \neq 0 \text{ и } 0 \leq n_i < \nu_A(x_i), \\ 1, \text{ если } n_k = \nu_A(x_k) \text{ и } 0 \leq n_{k+1} < \nu_A(1), \\ 0, \text{ если } n_{k+1} = \nu_A(1). \end{cases}$$

Причем, для каждого $1 \leq i \leq k+2$, если $n_i = 0$, то $n_{i+1} = 0$, а также, если $n_{i+1} \neq 0$, то $n_i = \nu_A(x_i)$. Из этой формулы с помощью правил $\mathbf{R}_L$ получим формулу

$$f(\underbrace{x_1, \ldots, x_1,}_{n_1} \underbrace{x_2, \ldots, x_2,}_{n_2} \ldots \underbrace{x_k, \ldots, x_k,}_{n_k} \underbrace{1, \ldots, 1,}_{n_{k+1}} \underbrace{0, \ldots, 0,}_{n_{k+2}} D'),$$

где $D' = g(D_1, \ldots, h(D_m))$.

В обоих случаях найдется формула B вида 1, строго эквивалентная A. Теперь рассмотрим случаи:

1) Если $n_i \neq 0$ и $n_{i+1} = 0$, где $i \leq k+1$, тогда по Лемме 1 $n_j = 2m_j,\ j = 1, \ldots, i-1$. Так как $f \in \mathcal{F}_\alpha$, то $n = 2l+1$, поэтому $n_i = 2m_i$, где $m_i = l - \sum_{j=1}^{i-1} m_j \in \mathbb{N}$. Применяя правило из $\mathbf{R}_L$, заданное схемой

$$\frac{f(\underbrace{x_1, \ldots, x_1,}_{2m_1} \underbrace{x_2, \ldots, x_2,}_{2m_2} \ldots \underbrace{x_i, \ldots, x_i,}_{2m_i} y)}{y}$$

получим, что $A \sim D$.

2) Если $n_{k+1} = 2m_{k+1}$, тогда по Лемме 1 $n_j = 2m_j,\ j = 1, \ldots, k$. Следовательно, $n_{k+2} = 2m_{k+2}$, где $m_{k+2} = l - \sum_{j=1}^{k+1} m_j \in \mathbb{N}$. Применяя правило из $\mathbf{R}_L$, заданное схемой

$$\frac{f(\underbrace{x_1, \ldots, x_1,}_{2m_1} \underbrace{x_2, \ldots, x_2,}_{2m_2} \ldots \underbrace{x_{k+2}, \ldots, x_{k+2},}_{2m_{k+2}} y)}{y}$$

получим, что $A \sim D$.

3) Если $n_{k+1} = 2m_{k+1}+1$, тогда $n_{k+2} \neq 0$ и $D_1 = 0$, поэтому применяя правила из $\mathbf{R}_L$ можно получить формулу

$$f(\underbrace{x_1, \ldots, x_1,}_{n_1} \underbrace{x_2, \ldots, x_2,}_{n_2} \ldots \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{n_k} \underbrace{1, \ldots, 1,}_{n_{k+1}-1} \underbrace{0, \ldots, 0,}_{n_{k+2}+1} D'),$$

строго эквивалентную A, для которой $D' = g(D'_1, \ldots, D_m)$ и $D'_1 = 1$. Откуда применяя правила $\mathbf{R}_L$ можно вывести формулу D'.

В любом случае найдется такая формула $C \in \mathbf{Fm}$, что $A \sim C$ и число вхождений α-связок в C на единицу меньше, чем в A. Лемма доказана. $\square$

Лемма 5. *Для любой линейной формулы существует эквивалентная ей формула, содержащая не более одного символа из $\mathcal{F}_\sigma$, где $\sigma \in \{\beta, \gamma, \delta\}$.*

Доказательство. Утверждение леммы будем доказывать индукцией по числу вхождений n символов из $\mathcal{F}_\sigma$ в формулу A.

Базис индукции: $n \leq 1$. Тогда для $B = A$ утверждение верно.

Шаг индукции: пусть утверждение леммы верно для n, такого что $1 \leq n < k$. Покажем, что оно верно и для $n = k$. Согласно Лемме 3 можно считать, что A не содержит одноместных символов из $\mathcal{F}_\alpha$ и содержит не более одного символа из $\mathcal{F}_\delta$. Применяя те же рассуждения, что и в Лемме 4, можно считать, что A не содержит одноместных символов из $\mathcal{F}_\delta$ и $\mathcal{F}$ содержит только одну 0-местную β-функцию и одну 0-местную γ-функцию, которые также обозначим через 1 и 0, соответственно.

Поскольку $k > 1$, то найдутся вхождения символов $f, g \in \mathcal{F}_\sigma$ в формулу A. Тогда по Лемме 2 и следствию 1 найдется такая строго эквивалентная формула B вида $B = f(gB_1, \dots, B_n)$, в которой расстановка скобок для связки g определена её арностью. Поскольку B не имеет одноместных связок, то последовательным применением правил $\mathbf{R}_L$ из B можно вывести формулу C вида

$$f(g\underbrace{x_1, \dots, x_1,}_{n_1}\underbrace{x_2, \dots, x_2,}_{n_2} \dots \underbrace{x_k, \dots, x_k,}_{n_k}\underbrace{1, \dots, 1,}_{n_{k+1}}\underbrace{0, \dots, 0,}_{n_{k+2}} D),$$

где $\{x_1, \dots, x_k\}$ — все переменные формулы A, $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_i \in \mathbb{N}_+$, $i = 2, \dots, k+2$ и D — это формула вида $h(D_1, \dots, D_m$, где m — арность h и

$$D_1 = \begin{cases} x_i, \text{ если } n_{i-1} \neq 0 \text{ и } 0 \leq n_i < \nu_A(x_i), \\ 1, \text{ если } n_k = \nu_A(x_k) \text{ и } 0 \leq n_{k+1} < \nu_A(1), \\ 0, \text{ если } n_{k+1} = \nu_A(1). \end{cases}$$

Причем, для каждого $1 \leq i \leq k+2$, если $n_i = 0$, то $n_{i+1} = 0$, а также, если $n_{i+1} \neq 0$, то $n_i = \nu_A(x_i)$. Рассмотрим случаи:

1) Если $n_i \neq 0$ и $n_{i+1} = 0$, где $i \leq k+1$, тогда по Лемме 1 $n_j = 2m_j$, $j = 1, \dots, i-1$. Так как $f, g \in \mathcal{F}_\sigma$ и $\sigma \in \{\beta, \gamma, \delta\}$, то $n = 2l + 1$,

поэтому $n_i = 2m_i$, где $m_i = l - \sum_{j=1}^{i-1} m_j \in \mathbb{N}$. Применяя правило из $\mathbf{R}_L$, заданное схемой

$$\frac{f(g\,\underbrace{x_1,\ldots,x_1,}_{2m_1}\underbrace{x_2,\ldots,x_2,}_{2m_2}\ldots\underbrace{x_i,\ldots,x_i,}_{2m_i}y)}{y}$$

получим, что $A \sim D$.

2) Если $n_{k+1} = 2m_{k+1}$, тогда по Лемме 1 $n_j = 2m_j,\ j = 1,\ldots,k$. Следовательно, $n_{k+2} = 2m_{k+2}$, где $m_{k+2} = l - \sum_{j=1}^{k+1} m_j \in \mathbb{N}$. Применяя правило из $\mathbf{R}_L$, заданное схемой

$$\frac{fg\,\underbrace{x_1\ldots x_1}_{2m_1}\underbrace{x_2\ldots x_2}_{2m_2}\ldots\underbrace{x_{k+2}\ldots x_{k+2}}_{2m_{k+2}}y}{y}$$

получим, что $A \sim D$.

3) Если $n_{k+1} = 2m_{k+1} + 1$, тогда $n_{k+2} \neq 0$ и $D_1 = 0$, поэтому применяя правила из $\mathbf{R}_L$ можем получить формулу

$$f(g\,\underbrace{x_1,\ldots,x_1,}_{n_1}\underbrace{x_2,\ldots,x_2,}_{n_2}\ldots\underbrace{x_k,\ldots,x_k,}_{n_k}\underbrace{1,\ldots,1,}_{n_{k+1}-1}\underbrace{0,\ldots,0,}_{n_{k+2}+1}D'),$$

строго эквивалентную A, где $D' = g(D'_1,\ldots,D_m)$ и $D'_1 = 1$. Откуда применяя правила $\mathbf{R}_L$ можно вывести формулу D'.

В любом случае найдется такая линейная формула C, что $A \sim C$ и число вхождений символов из $\mathcal{F}_\sigma$ в C меньше, чем в A. $\square$

Если n — максимальная арность связок из $\mathcal{F}$, то обозначим через $\mathbf{A}_L$ множество всех тавтологий над $\mathcal{F}$, не содержащих символов из $\mathcal{F}_\alpha$, содержащие не более одного символа из $\mathcal{F}_\sigma$ для каждого $\sigma \in \{\beta,\gamma,\delta\}$ и не более $3n$ вхождений переменных. Определим линейное пропозициональное исчисление $\mathcal{P}_L = \langle\emptyset, \mathbf{A}_L \cup \mathbf{R}_L\rangle$ над схемами аксиом $\mathbf{A}_L$ и правилами вывода $\mathbf{R}_L$. Для исчисления $\mathcal{P}_L$ верна следующая лемма.

Лемма 6. *Исчисление $\mathcal{P}_L$ является конечным заданием логической системы $\langle \mathbf{Cl}, \mathbf{R}\rangle$ для любого $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}_L$.*

Доказательство. Согласно леммам 4 и 5 для любой линейной тавтологии A существует эквивалентная ей формула $B \in \mathbf{A}_L$. Поэтому

$$\vdash_{\mathcal{P}_L} A$$

для любой тавтологии $A \in \mathbf{Cl}$ и, следовательно, исчисление $\mathcal{P}_L$ является конечным заданием системы $\langle \mathbf{Cl}, \mathbf{R} \rangle$ для любого $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}_L$. $\square$

При наложении ограничения на связки множества $\mathcal{F}$ можно значительно упростить исчисление $\mathcal{P}_L$, порождающее множество линейных тавтологий. Следующие два раздела демонстрируют примеры таких исчислений.

3.2. Линейное исчисление для эквивалентности

Предположим, что функция $x \oplus y \oplus 1 \in [\mathcal{F}]$. Прежде, чем приступить к определению исчисления, напомним некоторые вспомогательные понятия.

Определение 7. *Системой тождеств* над логическими связками $\mathcal{F}$ — это подмножество пар формул $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{Fm} \times \mathbf{Fm}$. Каждая система тождеств $\mathbf{S}$ задает отношение эквивалентности $\sim_{\mathbf{S}}$ на множестве формул $\mathbf{Fm}$, являющееся рефлексивным, симметричным и транзитивным замыканием множества пар

$$\mathbf{S}^* = \{(A, A[B]_\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{Pos}(A) \ \text{ и } \ (A|_\alpha, B) \in \mathbf{S}\}.$$

При этом для каждой такой пары $(A, A[B]_\alpha)$ говорят, что формула $A[B]_\alpha$ получена из формулы A заменой подформулы $A|_\alpha$ на эквивалентную ей формулу B. Будем говорить, что формулы A и B эквивалентны относительно $\mathbf{S}$, если $A \sim_{\mathbf{S}} B$.

Система тождеств $\mathbf{S}$ называется *полной*, если любые эквивалентные формулы в $\mathbf{Fm}$ эквивалентным относительно $\mathbf{S}$, т.е. для любых $A, B \in \mathbf{Fm}$ выполнено

$$f_A \equiv f_B \quad \Longrightarrow \quad A \sim_{\mathbf{S}} B.$$

Согласно теореме Линдона [13] для любой системы связок $\mathcal{F} \subseteq P_2$ существует конечная полная система тождеств $\mathbf{S}$. Стоит отметить, что Линдон не только доказал, что для каждого замкнутого класса в P_2 система формул в его базисе имеет конечную полную систему тождеств, но и привел пример замкнутого класса в $\mathbf{P}_7$, для системы формул которого не существует такой системы тождеств [14]. Позже было показано, что данные классы существуют и в логиках меньшей значности: Вишин [10] привел пример в $\mathbf{P}_4$, а Мурский [15] в $\mathbf{P}_3$.

Пусть $\mathbf{S}$ — конечная полная система тождеств для $\mathcal{F}$ и $x \leftrightarrow y$ — формула, выражающая функцию $x \oplus y \oplus 1 \in [\mathcal{F}]$. Тогда определим конечное множество $\mathbf{R}^1_L$, состоящее из правил трех типов:

$$\frac{x_1 \leftrightarrow y_1,\ \ldots,\ x_n \leftrightarrow y_n}{f(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow f(y_1, \ldots, y_n)} \tag{2}$$

для каждого $f \in \mathcal{F}$,

$$\frac{x \leftrightarrow y}{y \leftrightarrow x} \tag{3}$$

и

$$\frac{x,\ x \leftrightarrow y}{y}. \tag{4}$$

Определим линейное исчисление $\mathcal{P}^1_L = \left\langle \emptyset, \mathbf{A}^1_L \cup \mathbf{R}^1_L \right\rangle$ с множеством схем аксиом

$$\mathbf{A}^1_L = \{x \leftrightarrow x\} \cup \{A \leftrightarrow B \mid (A, B) \in \mathbf{S}\}$$

и множеством правил вывода $\mathbf{R}^1_L$. Ясно, что исчисление $\mathcal{P}^1_L$ конечно. Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 7. *Если* $(A \leftrightarrow B) \in [\mathcal{P}^1_L]$, *то* $(C[A] \leftrightarrow C[B]) \in [\mathcal{P}^1_L]$ *для любой формулы* C.

Доказательство. Заметим, что для любого $\alpha \in \mathbf{Pos}(C)$ формула $C|_\alpha \leftrightarrow C|_\alpha$ является подстановочным вариантом аксиомы $x \leftrightarrow x$ из $\mathbf{A}^1_L$. Так как формула $C[A] \leftrightarrow C[B]$ выводима из формулы $A \leftrightarrow B$ и формул $C|_\alpha \leftrightarrow C|_\alpha$ для $\alpha \in \mathbf{Pos}(C)$ с помощью применения конечного числа правил вида (2), то $C[A] \leftrightarrow C[B]$ выводима в $\mathcal{P}^1_L$. □

Покажем, что исчисление $\mathcal{P}^1_L$ является конечным заданием множества тавтологий.

Лемма 8. *Исчисление* $\mathcal{P}^1_L$ *является конечным заданием логической системы* $\langle \mathbf{Cl}, \mathbf{R} \rangle$ *для любого* $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^1_L$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную тавтологию $A \in \mathbf{Cl}$. Так как $\mathbf{S}$ — конечная полная система тождеств для $\mathcal{F}$, то $A \sim_{\mathbf{S}} B$ для $B = (x \leftrightarrow x)$. Докажем индукцией по определению отношения $\sim_{\mathbf{S}}$, что $A \leftrightarrow B \in [\mathcal{P}^1_L]$.

Базис индукции: состоит из следующих случаев:

1) $A = B$. Тогда $A \leftrightarrow B$ является подстановочным вариантом аксиомы $x \leftrightarrow x$ из $\mathbf{A}^1_L$;

2) $(A, B) \in \mathbf{S}^*$. Тогда для $B = A[C]_\alpha$, для некоторой формулы C и позиции $\alpha \in \mathbf{Pos}(A)$ таких, что $(A|_\alpha, C) \in \mathbf{S}$. Так как $A|_\alpha \leftrightarrow C$ — аксиома из $\mathbf{A}^1_L$, то $A \leftrightarrow B$ выводима в $\mathcal{P}^1_L$ по Лемме 7.

Шаг индукции: состоит из следующих случаев:

1) $B \sim_{\mathbf{S}} A$. По предположению индукции
$$\vdash_{\mathcal{P}^1_L} B \leftrightarrow A.$$
Так как $A \leftrightarrow B$ выводима из $B \leftrightarrow A$ с помощью правила (3), то $A \leftrightarrow B$ выводима в $\mathcal{P}^1_L$;

2) $A \sim_{\mathbf{S}} C$ и $C \sim_{\mathbf{S}} B$. По предположению индукции
$$A \leftrightarrow C,\ C \leftrightarrow B \in [\mathcal{P}^1_L].$$
По Лемме 7
$$(A \leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B) \in [\mathcal{P}^1_L].$$
Так как $A \leftrightarrow B$ выводима из $A \leftrightarrow C$ и $(A \leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$ с помощью правила (4), то $A \leftrightarrow B$ выводима в $\mathcal{P}^1_L$.

Из доказанного следует, что $(x \leftrightarrow x) \leftrightarrow A \in [\mathcal{P}^1_L]$. Поскольку $x \leftrightarrow x$ — аксиома из $\mathbf{A}^1_L$, то A выводима в $\mathcal{P}^1_L$ с помощью правила (4). Таким образом, $[\mathcal{P}^1_L] = \mathbf{Cl}$ и, следовательно, $\mathcal{P}^1_L$ является конечным заданием логической системы $\langle \mathbf{Cl}, \mathbf{R} \rangle$ для любого $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^1_L$. $\square$

3.3. Линейное исчисление для унарных связок

Предположим, что функция $x \oplus y \oplus 1 \notin [\mathcal{F}]$, тогда $\mathcal{F}$ состоит только из унарных линейных функций и констант. Определим конечное множество схем аксиом
$$\mathbf{A}^2_L = \{c \mid c \in \mathcal{F}_\beta\} \cup \{f(c) \mid f \in \mathcal{F}_\delta,\ c \in \mathcal{F}_\gamma\}$$
и конечное множество правил вывода $\mathbf{R}^2_L$, состоящее из правил:
$$\frac{x}{f(x)}, \quad \frac{g(x)}{g(f(x))}, \quad \frac{x}{g(h(x))}$$

для всех $f \in \mathcal{F}_\alpha$ и $g, h \in \mathcal{F}_\delta$. Пусть $\mathcal{P}_L^2 = \left\langle \emptyset, \mathbf{A}_L^2 \cup \mathbf{R}_L^2 \right\rangle$ — линейное пропозициональное исчисление над схемами аксиом $\mathbf{A}_L^2$ и правилами вывода $\mathbf{R}_L^2$. Покажем, что $\mathcal{P}_L^2$ является конечным заданием множества тавтологий.

Лемма 9. *Исчисление $\mathcal{P}_L^2$ является конечным заданием логической системы $\langle \mathbf{Cl}, \mathbf{R} \rangle$ для любого $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}_L^2$.*

Доказательство. Так как $\mathcal{F}$ состоит из унарных связок и констант, то каждая тавтология $A \in \mathbf{Cl}$ представима в виде

$$A = f_1(f_2(\ldots f_n(c))),$$

где $f_i \in \mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{F}_\delta$ и $c \in \mathcal{F}_\beta \cup \mathcal{F}_\gamma$, причём

- если $c \in \mathcal{F}_\beta$, то A содержит четное число вхождений символов из $\mathcal{F}_\delta$;
- если $c \in \mathcal{F}_\gamma$, то A содержит нечетное число вхождений символов из $\mathcal{F}_\delta$.

Докажем индукцией по n, что $A \in [\mathcal{P}_L^2]$.

Базис индукции: $n = 0$ и $c \in \mathcal{F}_\beta$, либо $n = 1$ и $c \in \mathcal{F}_\gamma$. Тогда A является аксиомой из $\mathbf{A}_L^2$ и, следовательно, $A \in [\mathcal{P}_L^2]$.

Шаг индукции: пусть $f_1 \in \mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{F}_\delta$ и $B = f_2(f_3(\ldots f_n(c)) \in [\mathcal{P}_L^2]$. Рассмотрим случаи

1) если $f_1 \in \mathcal{F}_\alpha$, то A выводима из $B = f_2(f_3(\ldots f_n(c))$ с помощью $\mathbf{R}_L^2$;

2) если $f_1 \in \mathcal{F}_\delta$ и $f_2 \in \mathcal{F}_\alpha$, то A выводима из $B = f_1(f_3(\ldots f_n(c))$ с помощью $\mathbf{R}_L^2$;

3) если $f_1 \in \mathcal{F}_\delta$ и $f_2 \in \mathcal{F}_\delta$, то A выводима из $B = f_3(f_4(\ldots f_n(c))$ с помощью $\mathbf{R}_L^2$.

В любом случае A выводима из некоторой формулы $B \in [\mathcal{P}_L^2]$ с помощью правил $\mathbf{R}_L^2$. Поэтому $A \in [\mathcal{P}_L^2]$. Таким образом, $[\mathcal{P}_L^2] = \mathbf{Cl}$ и, следовательно, $\mathcal{P}_L^2$ является конечным заданием логической системы $\langle \mathbf{Cl}, \mathbf{R} \rangle$ для любого $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}_L^2$. $\square$

4. Монотонные логические системы

Пусть $\mathcal{F} \subseteq \mathbf{M}$. Определим конечное множество схем аксиом

$$\mathbf{A}_M = \{c \mid c \in \mathcal{F},\ c \equiv 1\}$$

и конечное множество правил вывода $\mathbf{R}_M$, состоящее из правил вида:

$$\frac{x_{i_1},\ \ldots,\ x_{i_k}}{f(x_1, \ldots, x_n)}$$

для всех $k, n \geq 0$, $f \in \mathcal{F}$ арности n и $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ таких, что

$$x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \models f(x_1, \ldots, x_n).$$

Данные правила основаны на том, что сокращенные дизъюнктивные нормальные формы (д.н.ф.) монотонных функций не содержат отрицаний [16]. Поэтому, если $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{M}$ и её сокращенная д.н.ф. имеет вид

$$\bigvee_{i=1}^{k} x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{n_i}}$$

где все $i_j \in \{1, \ldots, n\}$, то формула $f(A_1, \ldots, A_n)$ всегда является логическим следствием формул $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$.

Рассмотрим пропозициональное исчисление $\mathcal{P}_M = \langle \emptyset, \mathbf{A}_M \cup \mathbf{R}_M \rangle$ над схемами аксиом $\mathbf{A}_M$ и правилами вывода $\mathbf{R}_M$. Покажем, что $\mathcal{P}_M$ является конечным заданием множества тавтологий.

Лемма 10. *Исчисление $\mathcal{P}_M$ является конечным заданием логической системы $\langle \mathbf{Cl}, \mathbf{R} \rangle$ для любого $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}_M$.*

Доказательство. Если $1 \notin \mathcal{F}$, то $\mathbf{Cl} = \emptyset$, то утверждение верно. Иначе, $\mathbf{A}_M \neq \emptyset$. Докажем индукцией по глубине формул, что

$$A \in \mathbf{Cl} \quad \Longrightarrow \quad A \in [\mathcal{P}_M]$$

для любой формулы A.

Базис индукции: $A = c$ для $c \in \mathcal{F}$. Тогда $A \in \mathbf{A}_M$.

Шаг индукции: пусть утверждение верно для $A_1, \ldots, A_n$, докажем его для $A = f(A_1, \ldots, A_n)$ с $f \notin \mathcal{F}$. Рассмотрим сокращенную д.н.ф. функции f:

$$\bigvee_{i=1}^{k} x_{i_1} \& \ldots \& x_{i_{n_i}}$$

Так как $A \in \mathbf{Cl}$, то для некоторого конъюнкта $x_{i_1} \& \ldots \& x_{i_{n_i}}$ выполнено $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{n_i}} \in \mathbf{Cl}$. По индуктивному предположению $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{n_i}}$ выводимы в $\mathcal{P}_M$. Тогда применяя правило

$$\frac{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}}{f(x_1, \ldots, x_n)}$$

из $\mathbf{R}_M$ можно вывести формулу A. Поэтому A также выводима в $\mathcal{P}_M$.

Так как $\mathbf{A}_M \subseteq \mathbf{Cl}$ и для каждого правила

$$\frac{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}}{f(x_1, \ldots, x_n)}$$

из $\mathbf{R}_M$ выполнено $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}} \models f(x_1, \ldots, x_n)$, то всякая формула A, выводимая в $\mathcal{P}_M$, является тавтологией. Следовательно, исчисление $\mathcal{P}_M$ является конечным заданием логической системы $\langle \mathbf{Cl}, \mathbf{R}_M \rangle$. $\square$

5. Импликативные логические системы

Пусть $[\mathcal{F}] \cap \mathbf{I} \neq \emptyset$. Логические системы над данными связками будем называть *импликативными.* Л. Хенкин в своей работе [22] показал, что каждое пропозициональное исчисление, содержащее классическую импликацию, конечно-порождено относительной modus ponens. Покажем, что это верно и для любых импликативных логических систем. Отметим, что для доказательства полноты системы аксиом мы будем использовать известный метод Кальмара [11, 23]

Рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, \ldots, x_n, y) \in [\mathcal{F}] \cap \mathbf{I}$ и произвольную формулу $F \in \mathbf{Fm}$ от переменных $x_1, \ldots, x_n, y$, выражающей функцию f. В этом случае формулу $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ будем обозначать через $x_1 \ldots x_n \to y$. Если $x = x_1 = \ldots = x_n$, то для краткости будем писать $x \to y$ вместо $\underbrace{x \ldots x}_{n} \to y$. Определим множество правил вывода $\mathbf{R}_I(f)$, состоящее из единственного правила

$$\frac{x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x_1 \ldots x_n \to y]}{y},$$

которое будем называть *обобщенным правилом modus ponens* или просто правилом modus ponens, когда вид правило определяется контекстом. По определению 6, выполнено

$$x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x_1 \ldots x_n \to y \models y.$$

Теперь определим схемы аксиом. Без ограничения общности будем считать, что $\mathcal{F} = \{\to, \varphi\}$, где $\to$ — импликативная функция $x_1x_2 \to y$, а φ — произвольная m-арная функция из $\mathbf{P}_2$. Рассмотрим множество схем аксиом $\mathbf{A}_I$, состоящее из тавтологий:

1. $x \to (y_1y_2 \to x)$
2. $x_1x_2 \to x_i$
3. $(x_1x_2 \to (y_1y_2 \to z)) \to ((x_1x_2 \to y_1)(x_1x_2 \to y_2) \to (x_1x_2 \to z))$
4. $(x_i \to y) \to ((x_1x_2 \to z) \to y) \to y)$

где $i \in \{1, 2\}$.

К этой системе добавим 2^m аксиом, определяющих значения функции φ на всевозможных значения своих переменных. Пусть $x_1, \dots, x_m$ — различные переменные, если $(x_1', \dots, x_m') \in E_2^m$, то положим $\varphi' = \varphi(x_1', \dots, x_m') \in E_2$. Пусть y — новая переменная, не встречающаяся в $x_1, \dots, x_m$. Если $x_i' = 1$, то через x_i^* обозначим формулу $(x_i \to y) \to y$. Если же $x_i' = 0$, то через x_i^* обозначим формулу $x_i \to y$. По аналогии, если $\varphi' = 1$, то через φ^* обозначим формулу $(\varphi(x_1, \dots, x_m) \to y) \to y$, если же $\varphi' = 0$, то через φ^* обозначим формулу $\varphi(x_1, \dots, x_m) \to y$. Таким образом, к уже определенным аксиомам добавим еще 2^m аксиом вида

$$x_1^* \to (x_2^* \to \dots (x_m^* \to \varphi^*))$$

В дальнейшем, если встретиться формула $A \in \mathbf{Fm}$ и $x_1, \dots, x_n$ — различные переменные в A, $(x_1', \dots, x_n') \in E_2^n$ и $A' = f_A(x_1', \dots, x_n')$, то через A^* будем обозначать формулу $(A \to y) \to y$, если $A' = 1$, и $A \to y$, если $A' = 0$.

Рассмотрим пропозициональное исчисление $\mathcal{P}_I(f) = \langle \emptyset, \mathbf{A}_I \cup \mathbf{R}_I(f) \rangle$ над схемами аксиом $\mathbf{A}_I$ и правилами вывода $\mathbf{R}_I(f)$. Покажем, что $\mathcal{P}_I(f)$ является конечным заданием множества тавтологий. В данном разделе под $\vdash$ будем понимать $\vdash_{\mathbf{P}_I(f)}$.

Для исчисления $\mathcal{P}_I$ верна так называемая Теорема дедукции [12]: если $\Gamma,\ A_1,\ A_2 \vdash B$, то $\Gamma \vdash A_1A_2 \to B$, для любых формул $A_1,\ A_2$ и B и любого множества формул Γ.

Лемма 11. *Если* $\Gamma,\ A_1,\ A_2 \vdash B$, *то* $\Gamma \vdash A_1A_2 \to B$, *для любых формул* $A_1,\ A_2$ *и* B *и любого множества формул* Γ.

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по длине вывода $F_1, \dots, F_n = B$ формулы B из $\Gamma,\ A_1,\ A_2$.

Если B - аксиома, либо $B \in \Gamma$, тогда доказательство следует из аксиомы 1. Если $B = A_i$, то доказательство следует из аксиомы 2.

Пусть B - это результат применения обобщенной операции modus ponens к формулам F_{i_1}, F_{i_2}, F_j, причем F_j имеет вид $F_{i_1}F_{i_2} \to B$. По предположению индукции

$$\Gamma \vdash A_1A_2 \to F_{i_1}$$
$$\Gamma \vdash A_1A_2 \to F_{i_2}$$
$$\Gamma \vdash A_1A_2 \to (F_{i_1}F_{i_2} \to B)$$

Объединим выводы этих формул и добавим к ним следующие три формулы:

$$(A_1A_2 \to (F_{i_1}F_{i_2} \to B)) \to ((A_1A_2 \to F_{i_1})(A_1A_2 \to F_{i_2}) \to (A_1A_2 \to B))$$

$$(A_1A_2 \to F_{i_1})(A_1A_2 \to F_{i_2}) \to (A_1A_2 \to B)$$

$$A_1A_2 \to B$$

Первая получена из аксиомы 3, две последние выводятся из первой с помощью обобщенной операции modus ponens. Образованная последовательность формул является выводом формулы $A_1A_2 \to B$ из Γ. $\square$

Лемма 12. *Пусть $A \in \mathbf{Fm}$ и $x_1, \dots, x_n$ — различные переменные в A. Пусть $(x'_1, \dots, x'_n) \in E_2^n$ и $A' = f_A(x'_1, \dots, x'_n)$. Тогда*

$$x_1^*, \dots, x_n^* \vdash A^*$$

Доказательство. Будем доказывать индукцией по длине формулы A.

Если A — переменная x_i, то утверждение леммы следует из определения выводимости $\vdash$.

Если A — это формула $\varphi(A_1, \dots, A_m)$, то по индуктивному предположению утверждение леммы верно для формул $A_1, \dots, A_m$, т.е.

$$x_1^*, \dots, x_n^* \vdash A_i^*, \ i = 1, \dots, m.$$

Кроме того, из аксиомы для логической связки φ имеем

$$A_1^*, \dots, A_m^* \vdash A^*$$

Следовательно,

$$x_1^*, \dots, x_n^* \vdash A^*$$

Пусть A — это формула $B_1B_2 \to C$ и утверждение леммы верно для формул $B_1,\ B_2$ и C:

$$x_1^*, \ldots, x_n^* \vdash B_i^* \tag{$*$}$$

$$x_1^*, \ldots, x_n^* \vdash C^* \tag{$**$}$$

Рассмотрим несколько подслучаев. Если $B_i' = 0$, то $A' = 1$. Тогда $B_i^* = B_1 \to y,\ A^* = (A \to y) \to y$ и по аксиоме 4 имеем

$$\vdash (B_i \to y) \to ((B_1B_2 \to C) \to y) \to y)$$

Если $C' = 1$, то $A' = 1$. Тогда $C^* = (C \to y) \to y$ и $A^* = (A \to y) \to y$. Имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned}
C &\vdash B_1B_2 \to C \\
C,\ (B_1B_2 \to C) \to y &\vdash y \\
(B_1B_2 \to C) \to y &\vdash C \to y \\
(B_1B_2 \to C) \to y,\ (C \to y) \to y &\vdash y \\
(C \to y) \to y &\vdash ((B_1B_2 \to C) \to y) \to y
\end{aligned}$$

где первый вывод есть использование аксиомы 1, второй и четвертый — применение modus ponens, остальные получены по теореме дедукции.

Если $B_1', B_2' = 1,\ C' = 0$, то $A' = 0$. Тогда $B_i^* = (B_i \to y) \to y$, $C^* = C \to y$ и $A^* = A \to y$. Имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned}
B_1,\ B_2,\ B_1B_2 \to C &\vdash C \\
B_1,\ B_2,\ B_1B_2 \to C,\ C \to y &\vdash y \\
B_1B_2 \to C,\ C \to y &\vdash B_1B_2 \to y \\
B_1B_2 \to C,\ C \to y,\ (B_1B_2 \to y) \to y &\vdash y \\
C \to y,\ (B_1B_2 \to y) \to y &\vdash (B_1B_2 \to C) \to y
\end{aligned}$$

где первый, второй и четвертый вывод являются применением modus ponens, остальные получены по теореме дедукции.

Тогда из (*) и (**) следует

$$x_1^*, \ldots, x_n^* \vdash A^*$$

Разбор всех случаев завершает доказательство леммы. $\square$

Поскольку каждая схема аксиом является тавтологией и обобщенное правило modus, будучи примененным к тавтологиям, выводит тавтологию, то оказывается справедливой лемма.

Лемма 13. *Для любой формулы $A \in \mathbf{Fm}$, если $\vdash A$, то A — тавтология.*

Докажем теперь обратную лемму.

Лемма 14. *Для любой формулы $A \in \mathbf{Fm}$, если A — тавтология, то $\vdash A$.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — различные переменные, встречающиеся в A. Так как A тавтология, то для любого набора $(x'_1, \ldots, x'_n) \in E_2$ значение $A' = f_A(x'_1, \ldots, x'_n) = 1$. По Лемме 12 для каждого из 2^n возможных множеств $\Gamma_n = \{x^*_1, \ldots, x^*_n\}$ имеем

$$\Gamma_n \vdash (A \to y) \to y,$$

Это означает, что для каждого из 2^{n-1} возможных множеств $\Gamma_{n-1} = \{x^*_1, \ldots, x^*_{n-1}\}$ верно

$$\Gamma_{n-1},\ x_n \to y \vdash (A \to y) \to y$$
$$\Gamma_{n-1},\ (x_n \to y) \to y \vdash (A \to y) \to y$$

Откуда по Теореме дедукции

$$\Gamma_{n-1} \vdash (x_n \to y) \to (A \to y) \to y$$
$$\Gamma_{n-1} \vdash ((x_n \to y) \to y) \to (A \to y) \to y$$

Но

$$\vdash \Big((x_n \to y) \to ((A \to y) \to y)\Big) \to$$
$$\to \bigg(\Big(((x_n \to y) \to y) \to ((A \to y) \to y)\Big) \to ((A \to y) \to y)\bigg)$$

выводимо из аксиомы 4. С помощью двукратного применения правила modus ponens получим

$$\vdash (A \to y) \to y$$

Подставляя вместо y формулу A, имеем

$$\vdash (A \to A) \to A$$

Поскольку, $A \vdash A$, то по Теореме дедукции $\vdash A \to A$. Тогда, применяя правило modus ponens, окончательно получаем, что $\vdash A$. $\square$

Согласно Леммам 13 и 14 исчисление $\mathcal{P}_I(f)$ порождает множество тавтологий **Cl**. Таким образом, верна следующая лемма.

Лемма 15. *Исчисление $\mathcal{P}_I(f)$ является конечным заданием логической системы $\langle \mathbf{Cl}, \mathbf{R} \rangle$ для любого $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}_I$.*

6. Критерий конечного задания множества тавтологий

Теперь докажем критерий конечного задания множества тавтологий **Cl**.

Теорема 1. *Исчисление $\mathcal{P}$ является конечным заданием множества тавтологий* **Cl** *тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

1. $\mathcal{F} \subseteq \mathbf{L}$ *и* $\mathcal{P}_L \leq \mathcal{P}$;
2. $\mathcal{F} \subseteq \mathbf{M}$ *и* $\mathcal{P}_M \leq \mathcal{P}$;
3. $[\mathcal{F}] \cap \mathbf{I} \neq \emptyset$ *и* $\mathcal{P}_I(f) \leq \mathcal{P}$ *для некоторой* $f \in [\mathcal{F}] \cap \mathbf{I}$;
4. $\mathbf{Cl} = \emptyset$.

Доказательство. Если $[\mathcal{P}] = \mathbf{Cl}$, то $\mathcal{P}$ является расширением любого непротиворечивого пропозиционального исчисления. Следовательно, необходимость условий выполнена.

Достаточность условий 1, 2 и 3 следует из Лемма 6, 10 и 15. Достаточность условия 4 следует из того, что пустое множество допускает задание пустым исчислением, т.е. исчислением с пустыми множествами аксиом и правил вывода. □

Список литературы

[1] *Боков Г. В.* Проблема полноты в исчислении высказываний // Интеллектуальные системы, т. 13, вып. 1–4, 2009, сс. 165–182.

[2] *Боков Г. В.* Итеративные пропозициональные исчисления // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, т. 18, вып. 4, 2014, сс. 99–106.

[3] *Боков Г. В.* Об алгоритмической неразрешимости некоторых проблем распознавания для пропозициональных исчислений // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, т. 18, вып. 4, 2014, сс. 207–214.

[4] *Боков Г. В.* О некоторых свойствах решетки пропозициональных исчислений // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, т. 19, вып. 2, 2015, сс. 47–64.

[5] *Боков Г. В.* Разрешимость одно-переменных итеративных пропозициональных исчислений // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, т. 19, вып. 2, 2015, с. 125–134.

[6] *Боков Г. В.* Неразрешимое суперинтуиционисткое пропозициональное исчисление от трех переменных // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, т. 19, вып. 3, 2015, сс. 95–100.

[7] *Боков Г. В.* Об одной системе Фреге // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, т. 19, вып. 4, 2015, сс. 155–168.

[8] *Боков Г. В.* Пропозициональные исчисления как средство задания логических процессов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, т. 20, вып. 3, 2016, сс. 24–36.

[9] *Боков Г. В.* От булевых схем к доказательству теорем // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, т. 22, вып. 1, 2018, сс. 123–130.

[10] *Вишин В. В.* Тождественные преобразования в четырехзначной логике // ДАН СССР, т. 150, № 4, 1963, сс. 719–721.

[11] *Клини С. К.* Математическая логика // Москва, Мир, 1973.

[12] *Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г.* Введение в математическую логику // Москва, Изд-во Моск. ун-та, 1982.

[13] *Линдон Р. К.* Тождества в двузначных исчислениях // Кибернетический сборник, т. 1, 1959, сс. 234–245.

[14] *Линдон Р. К.* Тождества в конечных алгебрах // Кибернетический сборник, т. 1, 1959, сс. 246–248.

[15] *Мурский В. Л.* Существование в трехзначной логике замкнутого класса с конечным базисом, не имеющего конечной полной системы тождеств // ДАН СССР, т. 163, № 4, 1965, сс. 815–818.

[16] *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.* Функции алгебры логики и классы Поста // Москва, Наука, 1966.

[17] *Bokov G. V.* Criterion for propositional calculi to be finitely generated // Discrete Mathematics and Applications, Volume 23, Issue 5-6, 2014, Pages 399–427.

[18] *Bokov G. V.* Undecidability of the problem of recognizing axiomatizations for propositional calculi with implication // Logic Journal of the IGPL, Volume 23, Issue 2, 2015, Pages 341–353.

[19] *Bokov G. V.* On the number of variables in undecidable superintuitionistic propositional calculi // Logic Journal of the IGPL, Volume 24, Issue 5, 2016, Pages 774–791.

[20] *Bokov G. V.* Undecidable Iterative Propositional Calculus // Algebra Logic, Volume 55, Issue 4, 2016, Pages 274–282.

[21] *Bokov G. V.* Undecidable problems for propositional calculi with implication // Logic Journal of the IGPL, Volume 24, Issue 5, 2016, Pages 792–806.

[22] *Henkin L.* Fragments of the propositional calculus // J. Symb. Logic, vol. 14, 1949, pp. 42–82.

[23] *Kalmar L.* Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalkül // Acta Scientiarum Mathematicarum, vol. 7, 1934, pp. 222–243.

On the finite representation of logical systems

Bokov G. V.

In this paper, we consider a problem of finite representation for logical systems. We research three types of logical systems: linear, monotone and implicational. For each type of logical systems we prove sufficient conditions of finite representation. Moreover, we prove a criterion for logical system of classical tautologies to be finitely generated.

Keywords: logical systems, propositional calculus, finite representation, inference rules.