

# Синтез легкотестируемых схем при однотипных константных неисправностях на входах и выходах элементов

Попков К.А.

Доказаны следующие утверждения: для любого натурального  $k$  и любой булевой константы  $p$  существует базис, состоящий из булевой функции от  $\max(k + 1; 3)$  переменных и отрицания одной переменной (существует базис, состоящий из булевой функции от не более чем  $2,5k + 2$  переменных и отрицания этой функции), в котором любую булеву функцию, кроме константы  $p$ , можно реализовать схемой из функциональных элементов, избыточной и допускающей проверяющий (соответственно, диагностический) тест длины не более 2 относительно не более  $k$  однотипных константных неисправностей типа  $p$  на входах и выходах элементов. Показано, что при рассмотрении только однотипных константных неисправностей типа  $p$  на входах элементов указанные оценки длин тестов можно понизить до 1.

**Ключевые слова:** схема из функциональных элементов, однотипная константная неисправность, проверяющий тест, диагностический тест.

## 1. Введение

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданные булевы функции. Логический подход к тестированию электрических схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [1]; этот подход также применим к тестированию схем из функциональных элементов (см. [2, 3, 4]). Пусть имеется схема из функциональных элементов  $S$  с одним выходом, реализующая булеву функцию  $f(\tilde{x}^n)$ , где  $\tilde{x}^n = (x_1, \dots, x_n)$ . Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько элементов схемы  $S$  могут перейти в неисправное состояние. В результате схема  $S$  вместо исходной функции  $f(\tilde{x}^n)$  будет

реализовывать некоторую булеву функцию  $g(\tilde{x}^n)$ , вообще говоря, отличную от  $f$ . Все такие функции  $g(\tilde{x}^n)$ , получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях элементов схемы  $S$ , называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [2, 3, 4]. *Проверяющим тестом* для схемы  $S$  называется такое множество  $T$  наборов значений переменных  $x_1, \dots, x_n$ , что для любой отличной от  $f(\tilde{x}^n)$  функции неисправности  $g(\tilde{x}^n)$  схемы  $S$  в  $T$  найдётся набор  $\tilde{\sigma}$ , на котором  $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$ . *Диагностическим тестом* для схемы  $S$  называется такое множество  $T$  наборов значений переменных  $x_1, \dots, x_n$ , что  $T$  является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности  $g_1(\tilde{x}^n)$  и  $g_2(\tilde{x}^n)$  схемы  $S$  в  $T$  найдётся набор  $\tilde{\sigma}$ , на котором  $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$ . Число наборов в  $T$  называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины  $2^n$  для схемы  $S$  всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины  $n$ . Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно элементов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один элемент. Единичные тесты обычно рассматривают для избыточных схем (см. [4, с. 110–111]), т. е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой (такие функции неисправности называют *нетривиальными*).

Назовём проверяющий (диагностический) тест *k-проверяющим* (*k-диагностическим*), если в схеме могут быть неисправны не более  $k$  элементов, где  $k \in \mathbb{N}$ . Будем рассматривать такие тесты только для *k-неизбыточных схем* (см. [5, с. 68]), в которых любая допустимая неисправность не менее одного и не более  $k$  элементов приводит к нетривиальной функции неисправности. Очевидно, что понятия 1-проверяющего и 1-диагностического тестов совпадают с понятиями единичного проверяющего и единичного диагностического тестов соответственно.

Любое множество булевых функций будем называть *базисом*.

Пусть зафиксирован вид неисправностей элементов,  $B$  — произвольный функционально полный базис и  $T$  — единичный проверяющий тест для некоторой схемы из функциональных элементов  $S$  в базисе  $B$ . Введём следующие обозначения: пусть  $D_{\text{ЕП}}^B(T)$  — длина теста  $T$ ;  $D_{\text{ЕП}}^B(S) = \min D_{\text{ЕП}}^B(T)$ , где минимум берётся по всем единичным проверяющим тестам  $T$  для схемы  $S$ ;  $D_{\text{ЕП}}^B(f) = \min D_{\text{ЕП}}^B(S)$ , где минимум берётся по всем избыточным схемам  $S$  в базисе  $B$ , реализующим функцию  $f$ ;  $D_{\text{ЕП}}^B(n) = \max D_{\text{ЕП}}^B(f)$ , где максимум берётся по всем булевым функ-

циям  $f$  от  $n$  переменных, для которых определено значение  $D_{\text{ЕП}}^B(f)$ . Функция  $D_{\text{ЕП}}^B(n)$  называется *функцией Шеннона* длины единичного проверяющего теста. По аналогии с функциями  $D_{\text{ЕП}}^B$  можно ввести функции  $D_{\text{ПП}}^B$ ,  $D_{k\text{-П}}^B$ ,  $D_{\text{ЕД}}^B$ ,  $D_{\text{ПД}}^B$  и  $D_{k\text{-Д}}^B$  для соответственно полного проверяющего,  $k$ -проверяющего, единичного и полного диагностического и  $k$ -диагностического тестов, зависящие от  $T$ , от  $S$ , от  $f$  и от  $n$  (в определениях функций  $D_{\text{ПП}}^B(f)$  и  $D_{\text{ПД}}^B(f)$  не предполагается избыточность схем, а в определениях функций  $D_{k\text{-П}}^B(f)$  и  $D_{k\text{-Д}}^B(f)$  предполагается  $k$ -избыточность схем). Так, например,  $D_{k\text{-Д}}^B(n)$  — функция Шеннона длины  $k$ -диагностического теста.

Перечислим основные результаты, касающиеся тестирования схем из функциональных элементов. Класс допустимых неисправностей функциональных элементов ограничим константными неисправностями на входах и выходах элементов, а также только на входах элементов, при которых значение на неисправном входе (выходе) любого элемента становится равно некоторой булевой константе. Неисправности на входах и выходах элементов называются однотипными константными типа  $p$ , если эта константа одна и та же для каждого неисправного элемента и равна  $p$ , и произвольными константными, если эта константа может быть равна как 0, так и 1 для каждого неисправного элемента независимо от неисправностей других элементов. Для удобства над буквой  $D$  после символов, обозначающих базис, через точку с запятой будем ставить символы «0, 1» или « $p$ » в случаях, когда в схемах допускаются соответственно произвольные константные неисправности или однотипные константные неисправности типа  $p$ ,  $p \in \{0, 1\}$ , на входах/выходах элементов, а под буквой  $D$  после символов, обозначающих вид функции, — символы «(IO)» или «(I)» в случаях, когда в схемах допускаются неисправности соответственно на входах и выходах элементов или только на входах элементов. Вполне разумно предполагать, что если в базисе содержится булева константа  $\alpha$ , то у элемента, её реализующего, не может быть неисправности типа  $\alpha$  на его выходе.

В [4, с. 116] для базиса Жегалкина  $B_1 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$  показано, что  $D_{\text{ЕП}}^{B_1; 0,1}(n) \leq n + 3$ ; при этом используется метод построения схем из работы [6]. К.К. Салуджа и С.М. Редди в [7] получили оценку  $D_{k\text{-П}}^{*B_1; 0,1}(n) \leq 4 + \sum_{i=1}^{\lceil \log_2 2k \rceil} C_n^i$ ; наличие звёздочки над буквой  $D$  обусловлено тем, что в указанной работе рассматривались схемы, содержащие, помимо входных переменных  $x_1, \dots, x_n$ , дополнительную вход-

ную переменную  $h_0$ , вместо которой при реализации функций подавалась булева константа, но которая принимала значения как 0, так и 1 на наборах из теста. Д.С. Романовым и Е.Ю. Романовой в [8] для базисов  $B'_1 = \{\&, \oplus, 1\}$ ,  $B''_1 = \{\&, \oplus, \sim\}$  установлены неравенства  $D_{\text{ЕП (IO)}}^{B'_1; 0,1}(n) \leq 16$  и  $D_{\text{ЕП (IO)}}^{B''_1; 0,1}(n) \leq 16$ ; в частности, улучшен упомянутый результат из [4] (любая схема в базисе  $B'_1$  является также схемой в базисе  $B_1$ ). Н.П. Редькин в [9–11] для базиса  $B_2 = \{\&, \vee, \neg\}$  получил оценки  $D_{\text{ПП (I)}}^{B_2; p}(n) \lesssim 4 \left( 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} \right)$ ,  $D_{\text{ЕД (I)}}^{B_2; p}(n) \lesssim 4 \left( 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} \right)$  и  $D_{\text{ПП (I)}}^{B_2; 0,1}(n) \lesssim \frac{2^n}{\sqrt{\log_2 n}}$  соответственно, где  $p = 0$  или 1.

В данной работе будут рассматриваться  $k$ -проверяющие и  $k$ -диагностические тесты при  $k \in \mathbb{N}$ , а в качестве неисправностей функциональных элементов — однотипные константные неисправности типа  $p$ ,  $p \in \{0, 1\}$ , на входах и выходах элементов, а также только на входах элементов. Будут определены базисы  $B_3$  и  $B_4$ , состоящие из двух булевых функций от не более чем  $\max(k+1, 3)$  переменных и от не более чем  $2,5k+2$  переменных соответственно, для которых в случае  $p = 0$ , в частности, будут доказаны равенства  $D_{k\text{-П (IO)}}^{B_3; 0}(n) = D_{k\text{-Д (IO)}}^{B_4; 0}(n) = 2$  и  $D_{k\text{-П (I)}}^{B_3; 0}(n) = D_{k\text{-Д (I)}}^{B_4; 0}(n) = 1$  (следствия 1–4). Также будет рассмотрен случай  $p = 1$ .

Введём обозначения  $\tilde{0}^r = \underbrace{0, \dots, 0}_r$ ,  $\tilde{1}^r = \underbrace{1, \dots, 1}_r$ , где  $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Будем говорить, что функциональный элемент  $E'$  расположен в схеме  $S$  ниже функционального элемента  $E$ , если в этой схеме существует ориентированный путь от  $E$  к  $E'$ .

## 2. Проверяющие тесты

Пусть  $p = 0$ , т.е. в качестве неисправностей функциональных элементов допускаются только однотипные константные неисправности типа 0 на входах и, возможно, на выходах элементов. Два двоичных набора будем называть  $k$ -соседними, если они различаются не более, чем в  $k$  компонентах. Пусть  $\omega(\tilde{x}^t)$ , где  $t \geq 2$ , — произвольная булева функция, принимающая значение 1 на наборе  $(\tilde{1}^t)$  и значение 0 на всех наборах,  $k$ -соседних с набором  $(\tilde{1}^t)$ , кроме него самого.

**Лемма 1.** *Любая схема  $S$ , состоящая только из входных переменных  $x_1, \dots, x_n$  и функциональных элементов, реализующих функцию вида  $\omega(\tilde{x}^t)$ , выход каждого из которых, кроме выходного, соединён ров-*

но с одним входом ровно одного элемента,  $k$ -неизбыточна, и множество  $\{(\tilde{I}^n)\}$  является для неё  $k$ -проверяющим тестом относительно неисправностей на входах и выходах элементов.

*Доказательство.* На наборе  $(\tilde{I}^n)$  на всех  $t$  входах и на выходе каждого элемента схемы  $S$  возникнет значение 1, поскольку  $\omega(\tilde{I}^t) = 1$ . Предположим, что среди всех входов и выходов элементов схемы  $S$  есть не менее одного и не более  $k$  неисправных. Из всех элементов этой схемы, у которых хотя бы один вход и/или выход неисправны, выберем произвольный «нижний» элемент  $E$ , ниже которого в схеме  $S$  не существует элемента с указанным свойством (это можно сделать, так как схема  $S$  конечна и не содержит ориентированных циклов).

Докажем, что значение на выходе элемента  $E$  на наборе  $(\tilde{I}^n)$  в схеме  $S$  равно 0. Если неисправен выход этого элемента, то утверждение очевидно. Если же неисправен хотя бы один из входов элемента  $E$ , а его выход исправен, то на наборе  $(\tilde{I}^n)$  значения не менее чем на одном и не более чем на  $k$  входах этого элемента в схеме  $S$  отличны от «правильных», т. е. от единиц, поскольку всего в этой схеме неисправны не более  $k$  входов/выходов элементов, а выходы элементов в ней не ветвятся. Тогда в силу определения функции  $\omega$  значение на выходе элемента  $E$  на наборе  $(\tilde{I}^n)$  в схеме  $S$  равно 0, что и требовалось доказать.

Далее изменение значения на выходе элемента  $E$  на наборе  $(\tilde{I}^n)$  в схеме  $S$  с «правильного» значения 1 на 0 пройдёт по цепочке до выхода схемы  $S$  (здесь снова используются тот факт, что всего в этой схеме неисправны не более  $k$  входов/выходов элементов, а выходы элементов в ней не ветвятся, и определение функции  $\omega$ ). Таким образом, неисправность схемы  $S$  будет обнаружена на наборе  $(\tilde{I}^n)$ . Отсюда следует, что данная схема  $k$ -неизбыточна и множество  $\{(\tilde{I}^n)\}$  является для неё  $k$ -проверяющим тестом. Лемма 1 доказана.  $\square$

Положим для удобства  $m = \max(k + 1; 3)$ ,  $\tilde{x}^m = (x_1, \dots, x_m)$  и  $\varphi(\tilde{x}^m) = x_1 \dots x_m \vee \bar{x}_1 \dots \bar{x}_m$ . Рассмотрим базис  $B_3 = \{\varphi(\tilde{x}^m), \bar{x}\}$ . Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида  $\varphi(\tilde{x}^m)$  (вида  $\bar{x}$ ), будем называть  $\varphi$ -элементом (соответственно, инвертором).

**Лемма 2.** *Не существует схем в базисе  $B_3$ , реализующих константу 0 и  $k$ -неизбыточных относительно неисправностей на входах и выходах элементов.*

*Доказательство.* Выход любой схемы в базисе  $B_3$ , реализующей константу 0, очевидно, не может совпадать ни с одним из её входов, по-

этому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности на выходе этого элемента получающаяся схема по-прежнему будет реализовывать константу 0, т.е. исходная схема  $k$ -избыточна. Лемма 2 доказана.  $\square$

Выделим возможное представление функции  $f(\tilde{x}^n)$ :

$$f(\tilde{x}^n) = x_i, \quad (1)$$

где  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Лемма 3.** Любую булеву функцию  $f(\tilde{x}^n)$  вида (1) можно реализовать  $k$ -неизбыточной схемой в базисе  $B_3$ , допускающей  $k$ -проверяющий тест длины 0 относительно неисправностей на входах и выходах элементов.

*Доказательство.* Функцию  $f$ , очевидно, можно реализовать схемой, не содержащей функциональных элементов. У такой схемы нет ни одной функции неисправности, поэтому пустое множество является для неё  $k$ -проверяющим тестом. Лемма 3 доказана.  $\square$

**Лемма 4.** Любую булеву функцию  $f(\tilde{x}^n)$ , не представимую в виде (1), можно реализовать  $k$ -неизбыточной схемой в базисе  $B_3$ , допускающей  $k$ -проверяющий тест из одного набора  $(\tilde{1}^n)$  относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых — в случае  $f(\tilde{1}^n) = 0$  — выход выходного элемента схемы исправен.

*Доказательство.* Пусть  $A = [\{\varphi(\tilde{x}^m)\}]$  — замыкание множества  $\{\varphi(\tilde{x}^m)\}$ , тогда  $A \subseteq T_1$ , поскольку  $\varphi(\tilde{1}^m) = 1$  (определения замыкания и замкнутого класса  $T_1$  можно найти, например, в [12] на с. 14 и 17 соответственно). Из определения функции  $\varphi$  нетрудно получить, что  $\varphi(\underbrace{x, \dots, x}_m) \equiv 1$ ,  $\varphi(\underbrace{x, \dots, x, y}_{m-1}) = x \sim y$ , поэтому  $1 \in A$  и  $x \sim y \in A$ . Далее,  $xy = \varphi(\underbrace{x, y, \underbrace{1, \dots, 1}_{m-2}}_{m-2}) \in A$  (поскольку  $m \geq 3$ ) и  $\bar{x} \vee y = xy \sim x \in A$ .

Таким образом,  $\{\bar{x} \vee y, xy\} \subseteq A$ , следовательно,  $T_1 = [\{\bar{x} \vee y, xy\}] \subseteq A$  (равенство  $T_1 = [\{\bar{x} \vee y, xy\}]$  установлено, например, в [12, с. 37]). Отсюда и из соотношения  $A \subseteq T_1$  получаем, что  $A = T_1$ , т.е. любую булеву функцию  $h(\tilde{x}^n)$  из класса  $T_1$  можно выразить формулой  $\phi_h$  над множеством  $\{\varphi(\tilde{x}^m)\}$ . Тогда существует схема  $S_h$  в базисе  $B_3$ , состоящая только из входных переменных  $x_1, \dots, x_n$  и  $\varphi$ -элементов, выход каждого из которых, кроме выходного, соединён ровно с одним входом ровно одного элемента, моделирующая формулу  $\phi_h$ .

Отметим, что функция  $\varphi(\tilde{x}^m)$  принимает значение 1 только на наборах  $(\tilde{0}^m)$  и  $(\tilde{1}^m)$ . Отсюда и из неравенства  $k < m$  вытекает, что она принимает значение 0 на всех наборах,  $k$ -соседних с набором  $(\tilde{1}^m)$ , кроме него самого. Поэтому к схеме  $S_h$  можно применить лемму 1, из которой следует, что данная схема  $k$ -неизбыточна и множество  $\{(\tilde{1}^n)\}$  является для неё  $k$ -проверяющим тестом. Рассмотрим два случая.

1. Пусть  $f(\tilde{1}^n) = 1$ . Тогда  $f(\tilde{x}^n) \in T_1$ , схема  $S_f$  реализует функцию  $f$ ,  $k$ -неизбыточна и множество  $\{(\tilde{1}^n)\}$  является для неё  $k$ -проверяющим тестом длины 1.

2. Пусть  $f(\tilde{1}^n) = 0$ . Тогда  $\bar{f}(\tilde{x}^n) \in T_1$ , схема  $S_{\bar{f}}$  реализует функцию  $\bar{f}$ ,  $k$ -неизбыточна и множество  $\{(\tilde{1}^n)\}$  является для неё  $k$ -проверяющим тестом. Выход схемы  $S_{\bar{f}}$  соединим со входом инвертора  $I$ , выход которого объявим выходом полученной схемы (обозначим её  $S$ ). Очевидно, что схема  $S$  реализует функцию  $f$ , а множество  $\{(\tilde{1}^n)\}$  позволяет обнаружить любую неисправность этой схемы, при которой вход и выход инвертора  $I$  исправны. Если вход этого инвертора неисправен, а выход исправен, то на выходе схемы  $S$  реализуется константа 1, которую можно отличить от функции  $f$  на наборе  $(\tilde{1}^n)$ . Поэтому схема  $S$  является  $k$ -неизбыточной относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход её выходного элемента исправен, и множество  $\{(\tilde{1}^n)\}$  является для неё  $k$ -проверяющим тестом длины 1 относительно неисправностей указанного вида. Лемма 4 доказана.  $\square$

**Лемма 5.** *Для любой  $k$ -неизбыточной схемы в базисе  $B_3$ , реализующей булеву функцию  $f(\tilde{x}^n)$ , не представимую в виде (1), любой  $k$ -проверяющий тест относительно неисправностей на входах элементов содержит хотя бы один набор.*

*Доказательство.* Выход любой  $k$ -неизбыточной схемы, реализующей функцию  $f$ , не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности любого входа этого элемента получающаяся схема будет реализовывать нетривиальную функцию неисправности, которую надо отличить от функции  $f$  хотя бы на одном наборе. Лемма 5 доказана.  $\square$

**Теорема 1.** Для любой булевой функции  $f(\tilde{x}^n)$ , отличной от константы 0, справедливо равенство

$$D_{k-\Pi(10)}^{B_3;0}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (1),} \\ 1, & \text{если } f \text{ не представима в виде (1) и } f(\tilde{1}^n) = 1, \\ 2, & \text{если } f(\tilde{1}^n) = 0. \end{cases}$$

Если же  $f \equiv 0$ , то значение  $D_{k-\Pi(10)}^{B_3;0}(f)$  не определено.

**Следствие 1.** Для любого  $n \geq 1$  справедливо равенство  $D_{k-\Pi(10)}^{B_3;0}(n) = 2$ .

*Доказательство теоремы 1.* Вместо  $D_{k-\Pi(10)}^{B_3;0}(f)$  для краткости будем писать  $D(f)$ . В случае  $f \equiv 0$  значение  $D(f)$  не определено в силу леммы 2. Равенство  $D(f) = 0$ , если функция  $f$  представима в виде (1), следует из леммы 3. Неравенство  $D(f) \leq 1$  в случае, когда функция  $f$  не представима в виде (1) и  $f(\tilde{1}^n) = 1$ , следует из леммы 4.

Пусть  $f \not\equiv 0$  и  $f(\tilde{1}^n) = 0$ . В силу леммы 4 функцию  $f$  можно реализовать  $k$ -неизбыточной схемой в базисе  $B_3$ , допускающей  $k$ -проверяющий тест из одного набора  $(\tilde{1}^n)$  относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход выходного элемента схемы исправен. Добавим к этому набору любой двоичный набор  $\tilde{\sigma}$  длины  $n$ , на котором функция  $f$  принимает значение 1. Тогда любую неисправность, при которой неисправен выход выходного элемента указанной схемы, можно обнаружить на наборе  $\tilde{\sigma}$ . Поэтому данная схема  $k$ -неизбыточна относительно неисправностей на входах и выходах элементов и множество  $\{(\tilde{1}^n), \tilde{\sigma}\}$  является для неё  $k$ -проверяющим тестом длины 2, откуда следует, что  $D(f) \leq 2$ .

Неравенство  $D(f) \geq 1$  в случае, когда функция  $f$  отлична от константы 0 и не представима в виде (1), вытекает из леммы 5 (неисправности на входах элементов являются частным случаем неисправностей на входах и выходах элементов).

Докажем неравенство  $D(f) \geq 2$  в случае  $f \not\equiv 0$  и  $f(\tilde{1}^n) = 0$ . Предположим, что оно неверно, т.е.  $D(f) \leq 1$ . Выше было показано, что  $D(f) \geq 1$ , поэтому  $D(f) = 1$ . Значит, функцию  $f(\tilde{x}^n)$  можно реализовать  $k$ -неизбыточной схемой  $S$ , допускающей  $k$ -проверяющий тест из какого-то одного набора  $\tilde{\pi}$ . Пусть данная функция существенно зависит от  $s$  переменных; из соотношений  $f \not\equiv 0$  и  $f(\tilde{1}^n) = 0$  следует, что  $1 \leq s \leq n$ . Без ограничения общности это переменные  $x_1, \dots, x_s$ . Очевидно, что каждая переменная  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ , обязана подаваться хотя бы на один вход

хотя бы одного элемента схемы  $S$ . Тогда при неисправности этого входа получающаяся функция неисправности  $g_i$  данной схемы не совпадает с  $f$  и её надо отличить от функции  $f$  хотя бы на одном наборе, причём функция  $g_i$ , очевидно, может отличаться от функции  $f$  только на тех наборах,  $i$ -я (слева) компонента которых равна 1. Отсюда получаем, что первые  $s$  компонент набора  $\tilde{\pi}$  равны единице. Функция  $f(\tilde{x}^n)$  не зависит существенно от переменных  $x_{s+1}, \dots, x_n$  (при  $s < n$ ), поэтому  $f(\tilde{\pi}) = f(\tilde{1}^n) = 0$ . Но тогда неисправность на выходе выходного элемента схемы  $S$  нельзя обнаружить на наборе  $\tilde{\pi}$ , т. е. множество  $\{\tilde{\pi}\}$  не может являться  $k$ -проверяющим тестом для схемы  $S$ . Полученное противоречие означает, что  $D(f) \geq 2$ . Теорема 1 доказана.  $\square$

**Теорема 2.** Для любой булевой функции  $f(\tilde{x}^n)$  справедливо равенство

$$D_{k-\Pi(1)}^{B_3; 0}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (1),} \\ 1, & \text{если } f \text{ не представима в виде (1).} \end{cases}$$

**Следствие 2.** Для любого  $n \geq 0$  справедливо равенство  $D_{k-\Pi(1)}^{B_3; 0}(n) = 1$ .

*Доказательство теоремы 2.* Вместо  $D_{k-\Pi(1)}^{B_3; 0}(f)$  для краткости будем писать  $D(f)$ . Равенство  $D(f) = 0$  в случае, когда функция  $f$  представима в виде (1), следует из леммы 3. Если же функция  $f$  не представима в виде (1), то неравенство  $D(f) \leq 1$  следует из леммы 4, а неравенство  $D(f) \geq 1$  — из леммы 5. Теорема 2 доказана.  $\square$

Используя теоремы 1–2, следствия 1–2 и принцип двойственности (см., например, [12, с. 19, утверждение 3]), а именно, рассматривая схемы, получающиеся заменой всех элементов в схемах из доказательства теорем 1–2 на двойственные, нетрудно получить двойственные им результаты для случая  $p = 1$  и базиса  $B_3^* = \{\overline{x_1} \dots \overline{x_m} \vee \overline{x_1} \dots \overline{x_m}, \overline{x}\}$ . В частности, при  $n \geq 1$  справедливо равенство  $D_{k-\Pi(10)}^{B_3^*; 1}(n) = 2$ , а при  $n \geq 0$  — равенство  $D_{k-\Pi(1)}^{B_3^*; 1}(n) = 1$ .

### 3. Диагностические тесты

Рассмотрим случай  $p = 0$ . Положим для удобства  $q = 2k + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2$  и  $\tilde{x}^q = (x_1, \dots, x_q)$ . Отметим, что  $q \leq 2,5k + 2$ , а в силу соотношения  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1 = \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$  имеет место равенство  $q = 2k + \lceil \frac{k+1}{2} \rceil + 1$ . Пусть  $\psi(\tilde{x}^q)$  — булева функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- (i)  $(\tilde{1}^q) = 1$ ;
- (ii) на всех наборах,  $k$ -соседних с набором  $(\tilde{1}^q)$ , кроме него самого, функция  $\psi$  принимает значение 0;
- (iii) на всех наборах,  $k$ -соседних с набором  $\tilde{\sigma}_1 = (\tilde{0}^{k+1}, \tilde{1}^{k+\lceil \frac{k+1}{2} \rceil})$ , функция  $\psi$  принимает значение 0;
- (iv) на всех наборах,  $k$ -соседних с набором  $\tilde{\sigma}_2 = (\tilde{1}^{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}, \tilde{0}^{2k+1})$ , функция  $\psi$  принимает значение 1.

На всех остальных двоичных наборах длины  $q$  функция  $\psi$  может принимать произвольные значения.

Покажем, что данная функция определена корректно, т. е. множества наборов, на которых она принимает значения 0 и 1, не пересекаются. Заметим, что набор  $\tilde{\sigma}_2$  отличается от набора  $(\tilde{1}^q)$  в  $2k + 1$  компоненте, а от набора  $\tilde{\sigma}_1$  — в

$$\left( \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil \right) + \left( k + \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil \right) = k + 2 \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil \geq 2k + 1$$

компоненте, поэтому любой набор,  $k$ -соседний с набором  $\tilde{\sigma}_2$ , отличается от каждого из наборов  $(\tilde{1}^q)$ ,  $\tilde{\sigma}_1$  по крайней мере в  $k + 1$  компоненте, т. е. не может быть  $k$ -соседним ни с одним из этих наборов. Далее, набор  $(\tilde{1}^q)$  отличается от набора  $\tilde{\sigma}_1$  в  $k + 1$  компоненте, поэтому не является  $k$ -соседним с этим набором. Тем самым показано, что множества наборов, на которых функция  $\psi(\tilde{x}^q)$  принимает значения 0 и 1, не пересекаются, значит, она определена корректно.

Рассмотрим базис  $B_4 = \{\psi, \bar{\psi}\}$ . Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида  $\psi(\tilde{x}^q)$  (вида  $\bar{\psi}(\tilde{x}^q)$ ), будем называть  $\psi$ -элементом (соответственно,  $\bar{\psi}$ -элементом).

По аналогии с леммами соответственно 2, 3 и 5 доказываются следующие утверждения.

**Лемма 6.** *Не существует схем в базисе  $B_4$ , реализующих константу 0 и  $k$ -неизбыточных относительно неисправностей на входах и выходах элементов.*

**Лемма 7.** *Любую булеву функцию  $f(\tilde{x}^n)$  вида (1) можно реализовать  $k$ -неизбыточной схемой в базисе  $B_4$ , допускающей  $k$ -диагностический тест длины 0 относительно неисправностей на входах и выходах элементов.*

**Лемма 8.** Для любой  $k$ -неизбыточной схемы в базисе  $B_4$ , реализующей булеву функцию  $f(\tilde{x}^n)$ , не представимую в виде (1), любой  $k$ -диагностический тест относительно неисправностей на входах элементов содержит хотя бы один набор.

Выделим ещё одно возможное представление функции  $f(\tilde{x}^n)$ :

$$f(\tilde{x}^n) = x_{i_1} \& \dots \& x_{i_s}, \quad (2)$$

где  $s \in \{1, \dots, n\}$  и  $i_1, \dots, i_s$  — попарно различные индексы от 1 до  $n$ .

Отметим, что представление (1) является частным случаем представления (2).

**Лемма 9.** Любую булеву функцию  $f(\tilde{x}^n)$ , не представимую в виде (1), можно реализовать  $k$ -неизбыточной схемой  $S$  в базисе  $B_3$ , допускающей  $k$ -диагностический тест длины 1 относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых — в случае, когда функция  $f$  не представима в виде (2) — выход выходного элемента схемы исправен; при этом в указанном случае единственной функцией неисправности схемы  $S$  является функция  $f \oplus x_1 \dots x_n$ .

*Доказательство.* Пусть  $A' = [\{\psi(\tilde{x}^q)\}]$  — замыкание множества  $\{\psi(\tilde{x}^q)\}$ , тогда  $A' \subseteq T_1$  в силу условия (i). Из условий (i)–(iv) нетрудно получить, что  $\psi(\underbrace{x, \dots, x}_q) \equiv 1$ ,  $\psi(\tilde{1}^{q-2}, x, y) = xy$  и  $\psi(\underbrace{y, \dots, y}_{k+1}, \underbrace{x, \dots, x}_{k + \lceil \frac{k+1}{2} \rceil}) = \bar{x} \vee y$ ,

поэтому  $\{\bar{x} \vee y, xy\} \subseteq A'$  и  $T_1 = [\{\bar{x} \vee y, xy\}] \subseteq A'$ . Отсюда и из соотношения  $A' \subseteq T_1$  получаем, что  $A' = T_1$ , т. е. любую булеву функцию  $h(\tilde{x}^n)$  из класса  $T_1$  можно выразить формулой  $\phi'_h$  над множеством  $\{\psi(\tilde{x}^q)\}$ . Тогда существует схема  $S'_h$  в базисе  $B_4$ , состоящая только из входных переменных  $x_1, \dots, x_n$  и  $\psi$ -элементов, выход каждого из которых, кроме выходного, соединён ровно с одним входом ровно одного элемента, моделирующая формулу  $\phi'_h$ . С учётом условий (i), (ii) получаем, что к схеме  $S'_h$  можно применить лемму 1, из которой следует, что данная схема  $k$ -неизбыточна и множество  $\{\tilde{1}^n\}$  является для неё  $k$ -проверяющим тестом.

Введём для удобства обозначение  $a = \bar{f}(\tilde{1}^n)$ . Построим схему  $S$  в базисе  $B_4$ , реализующую функцию  $f(\tilde{x}^n)$  (см. рисунок). Схема  $S$  состоит из  $q$  подсхем  $S_1$ – $S_q$  и элемента  $E$ , являющегося  $\psi$ -элементом при  $a = 0$  и  $\bar{\psi}$ -элементом при  $a = 1$ , входы которого соединяются с выходами этих подсхем (1-й вход — с выходом подсхемы  $S_1$ , ...,  $q$ -й вход — с выходом

подсхемы  $S_q$ ). Выходом схемы  $S$  является выход элемента  $E$ . Каждая из подсхем  $S_1, \dots, S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}$  представляет собой копию схемы  $S'_{f \oplus a}$ , каждая из подсхем  $S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil + 1}, \dots, S_{k+1}$  — копию схемы  $S'_{h_{\&}}$ , где  $h_{\&}(\tilde{x}^n) = x_1 \& \dots \& x_n$ , а каждая из подсхем  $S_{k+2}, \dots, S_q$  — копию схемы  $S'_{f \oplus a \oplus h_{\&} \oplus 1}$  (отметим, что каждая из булевых функций  $f \oplus a$ ,  $h_{\&}$  и  $f \oplus a \oplus h_{\&} \oplus 1$  принадлежит классу  $T_1$ : например,  $(f \oplus a)(\tilde{1}^n) = f(\tilde{1}^n) \oplus a = \bar{a} \oplus a = 1$ ).

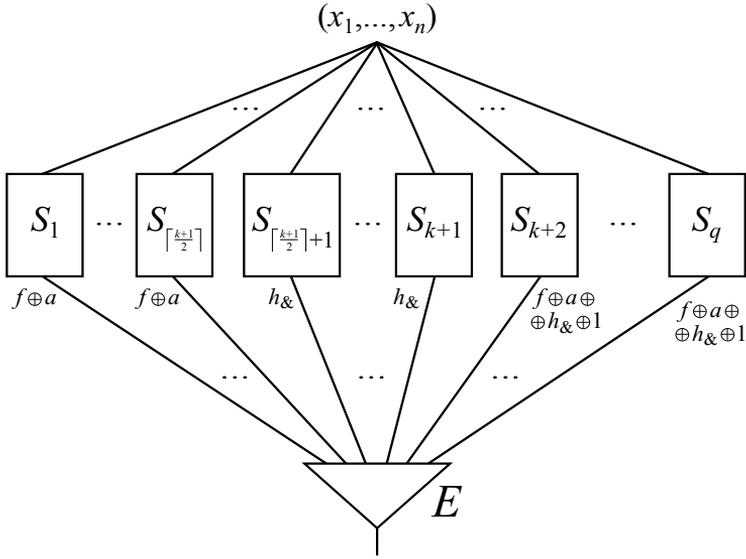


Схема  $S$

Докажем, что построенная схема  $S$  в случае отсутствия в ней неисправностей реализует функцию  $f(\tilde{x}^n)$ . Прежде всего заметим, что элемент  $E$  по определению реализует функцию вида  $\psi \oplus a$  от своих входов. На любом двоичном наборе  $\tilde{\tau}_a$  длины  $n$ , на котором функция  $f$  принимает значение  $a$ , на выходах подсхем  $S_1 - S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}$ ,  $S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil + 1} - S_{k+1}$ ,  $S_{k+2} - S_q$  возникнут значения 0, 0, 1 соответственно (здесь используется тот факт, что  $\tilde{\tau}_a \neq \tilde{1}^n$ , поскольку  $f(\tilde{\tau}_a) = a = f(\tilde{1}^n)$ ). Тогда на входы элемента  $E$  будет подан в точности набор  $\tilde{\sigma}_1$ , а на его выходе, т. е. на выходе схемы  $S$ , возникнет значение  $\psi(\tilde{\sigma}_1) \oplus a = a = f(\tilde{\tau}_a)$  в силу условия (iii). Далее, на любом двоичном наборе  $\tilde{\tau}_{\bar{a}}$  длины  $n$ , на котором функция  $f$  принимает значение  $\bar{a}$ , отличным от набора  $\tilde{1}^n$ , на выходах подсхем  $S_1 - S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}$ ,  $S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil + 1} - S_{k+1}$ ,  $S_{k+2} - S_q$  возникнут значения 1, 0, 0 соответственно. Тогда на входы элемента  $E$  будет подан в точности набор  $\tilde{\sigma}_2$ , а на его выходе,

т. е. на выходе схемы  $S$ , возникнет значение  $\psi(\tilde{\sigma}_2) \oplus a = \bar{a} = f(\tilde{\tau}_{\bar{a}})$  в силу условия (iv). Наконец, на наборе  $(\tilde{I}^n)$  на выходах подсхем  $S_1-S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}$ ,  $S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil+1}-S_{k+1}$ ,  $S_{k+2}-S_q$  возникнут значения 1, 1, 1 соответственно. Тогда на входы элемента  $E$  будет подан набор  $(\tilde{I}^q)$ , а на его выходе, т. е. на выходе схемы  $S$ , возникнет значение  $\psi(\tilde{I}^q) \oplus a = \bar{a} = f(\tilde{I}^n)$  в силу условия (i). Таким образом, на выходе схемы  $S$  реализуется в точности функция  $f(\tilde{x}^n)$ .

Найдём все возможные функции неисправности схемы  $S$ . Пусть выход элемента  $E$  исправен. При произвольной неисправности не менее одного и не более  $k$  входов/выходов элементов подсхем  $S_1-S_q$  и/или входов элемента  $E$  на любом входном наборе схемы  $S$  могут измениться значения не более чем на  $k$  входах элемента  $E$ . Поэтому на любом наборе  $\tilde{\tau}_a$ , на котором функция  $f$  принимает значение  $a$ , на входы элемента  $E$  поступит набор,  $k$ -соседний с набором  $\tilde{\sigma}_1$ , а на его выходе, т. е. на выходе схемы  $S$ , возникнет значение  $0 \oplus a = a = f(\tilde{\tau}_a)$  в силу условия (iii). Аналогично на любом наборе  $\tilde{\tau}_{\bar{a}}$ , на котором функция  $f$  принимает значение  $\bar{a}$ , отличном от набора  $(\tilde{I}^n)$ , на входы элемента  $E$  поступит набор,  $k$ -соседний с набором  $\tilde{\sigma}_2$ , а на его выходе, т. е. на выходе схемы  $S$ , возникнет значение  $1 \oplus a = \bar{a} = f(\tilde{\tau}_{\bar{a}})$  в силу условия (iv). Наконец, на наборе  $(\tilde{I}^n)$  на входы элемента  $E$  поступит набор,  $k$ -соседний с набором  $(\tilde{I}^q)$ . При этом хотя бы одна компонента указанного набора будет равна 0, поскольку множество  $\{(\tilde{I}^n)\}$  является  $k$ -проверяющим тестом для каждой из подсхем  $S_1-S_q$ , а в случае исправности всех элементов каждая из этих подсхем на наборе  $(\tilde{I}^n)$  выдаёт единицу. Следовательно, на выходе элемента  $E$ , т. е. на выходе схемы  $S$ , возникнет значение  $0 \oplus a = a = \bar{f}(\tilde{I}^n)$  в силу условия (ii). Таким образом, на выходе схемы  $S$  возникнет функция неисправности  $g_1$ , отличающаяся от функции  $f$  только на наборе  $(\tilde{I}^n)$  (её можно записать в виде  $g_1 = f \oplus x_1 \dots x_n$ ).

Если функция  $f$  не представима в виде (2), то по условию леммы выход элемента  $E$  исправен и, тем самым,  $g_1$  — единственная функция неисправности схемы  $S$ . Данную функцию можно отличить от функции  $f$  на наборе  $(\tilde{I}^n)$ , поэтому схема  $S$  является  $k$ -неизбыточной относительно неисправностей на входах и выходах элементов, при которых выход её выходного элемента исправен, и допускает  $k$ -диагностический тест из одного набора, что и требовалось доказать.

Если функция  $f$  представима в виде (2) при  $s = n$ , а выход элемента  $E$  неисправен, то на выходе схемы  $S$  возникнет функция неисправно-

сти  $g_2 \equiv 0$ , однако

$$g_1 = f \oplus x_1 \dots x_n = x_1 \dots x_n \oplus x_1 \dots x_n \equiv g_2.$$

Значит,  $g_1$  — единственная функция неисправности схемы  $S$ . Данную функцию можно отличить от функции  $f$  на наборе  $(\tilde{I}^n)$ , поэтому схема  $S$  является  $k$ -неизбыточной и допускает  $k$ -диагностический тест из одного набора, что и требовалось доказать. Тем самым установлено, что функцию  $x_1 \dots x_n$  можно реализовать  $k$ -неизбыточной схемой в базисе  $B_4$ , допускающей  $k$ -диагностический тест длины 1 относительно неисправностей на входах и выходах элементов. В случае же, когда функция  $f$  имеет вид (2) и  $s < n$ , можно без ограничения общности считать, что  $i_1 = 1, \dots, i_s = s$ , и применить утверждение, сформулированное в предыдущем предложении, с заменой  $n$  на  $s$  (на входы элементов схемы в этом случае будут подаваться только переменные  $x_1, \dots, x_s$ ), а затем добавить к единственному тестовому набору справа произвольные  $n - s$  компонент, чтобы его длина стала равна  $n$  и множество, состоящее из одного этого набора, удовлетворяло определению диагностического теста. Лемма 9 доказана.  $\square$

**Теорема 3.** *Для любой булевой функции  $f(\tilde{x}^n)$ , отличной от константы 0, справедливо равенство*

$$D_{k\text{-Д}}^{B_4; 0}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (1),} \\ 1, & \text{если } f \text{ представима в виде (2), но не в виде (1),} \\ 2, & \text{если } f \text{ не представима в виде (2).} \end{cases}$$

Если же  $f \equiv 0$ , то значение  $D_{k\text{-Д}}^{B_4; 0}(f)$  не определено.

**Следствие 3.** *Для любого  $n \geq 0$  справедливо равенство  $D_{k\text{-Д}}^{B_4; 0}(n) = 2$ .*

*Доказательство теоремы 3.* Вместо  $D_{k\text{-Д}}^{B_4; 0}(f)$  для краткости будем писать  $D(f)$ . В случае  $f \equiv 0$  значение  $D(f)$  не определено в силу леммы 6. Далее будем считать, что  $f \not\equiv 0$ . Равенство  $D(f) = 0$ , если функция  $f$  представима в виде (1), следует из леммы 7. Неравенство  $D(f) \leq 1$  в случае, когда функция  $f$  представима в виде (2), но не в виде (1), следует из леммы 9.

Пусть функция  $f$  не представима в виде (2). В силу леммы 9 её можно реализовать схемой  $S$  в базисе  $B_4$ , единственной функцией неисправности которой при неисправностях на входах и выходах элементов, за исключением выхода выходного элемента, является функция

$g_1 = f \oplus x_1 \dots x_n$ . Если же неисправен выход выходного элемента схемы  $S$ , то она станет реализовывать функцию  $g_2 \equiv 0$ . Пусть  $\tilde{\sigma}$  — произвольный двоичный набор длины  $n$ , отличный от набора  $(\tilde{1}^n)$ , на котором функция  $f$  принимает значение 1; такой набор найдётся, поскольку  $f \not\equiv 0$  и  $f \not\equiv x_1 \dots x_n$ . Тогда функцию  $f$  можно отличить от функции  $g_1$  на наборе  $(\tilde{1}^n)$ , а функцию  $g_2$  можно отличить от каждой из функций  $f$ ,  $g_1$  на наборе  $\tilde{\sigma}$ . Поэтому схема  $S$  является  $k$ -неизбыточной относительно неисправностей на входах и выходах элементов и допускает  $k$ -диагностический тест из наборов  $(\tilde{1}^n)$  и  $\tilde{\sigma}$ , откуда следует, что  $D(f) \leq 2$ .

Неравенство  $D(f) \geq 1$  в случае, когда функция  $f$  не представима в виде (1), вытекает из леммы 8.

Докажем неравенство  $D(f) \geq 2$  в случае, когда функция  $f$  не имеет вид (2). Пусть  $S$  — произвольная  $k$ -неизбыточная схема, реализующая функцию  $f$ , и на входы её элементов подаются  $s$  переменных из числа  $x_1, \dots, x_n$ . Поскольку функция  $f$  не представима в виде (2), а значит, и в виде (1), то  $s \geq 1$  и, кроме того, в схеме  $S$  содержится выходной элемент. Без ограничения общности на входы элементов схемы  $S$  подаются переменные  $x_1, \dots, x_s$ . При неисправности на выходе выходного элемента данной схемы возникнет функция неисправности  $g_1 \equiv 0$ .

Очевидно, что функция  $f(\tilde{x}^n)$  может зависеть существенно только от переменных  $x_1, \dots, x_s$ . Если на всех двоичных наборах длины  $n$ , хотя бы одна из первых  $s$  (слева) компонент которых равна 0, функция  $f$  принимает значение 0, то  $f \equiv 0$  или  $f \equiv x_1 \& \dots \& x_s$  (т. е. имеет вид (2)), что невозможно по предположению. Поэтому на некотором наборе  $\tilde{\pi}$  длины  $n$ , хотя бы одна из первых  $s$  компонент которого равна 0, функция  $f$  принимает значение 1. Пусть  $i$ -я компонента набора  $\tilde{\pi}$  равна 0, где  $i \in \{1, \dots, s\}$ . Переменная  $x_i$  подаётся хотя бы на один вход хотя бы одного элемента схемы  $S$ . При неисправности этого входа получающаяся функция неисправности  $g_2$  данной схемы в силу её  $k$ -неизбыточности не совпадает с  $f$ , однако указанную неисправность, очевидно, нельзя обнаружить на наборе  $\tilde{\pi}$  (на этом наборе  $x_i = 0$ ), поэтому  $g_2(\tilde{\pi}) = f(\tilde{\pi}) = 1$ . Таким образом, функции  $f$ ,  $g_1$  и  $g_2$  попарно различны. Чтобы отличить эти функции друг от друга, необходимы по крайней мере два набора, откуда следует неравенство  $D(f) \geq 2$ . Теорема 3 доказана.  $\square$

**Теорема 4.** Для любой булевой функции  $f(\tilde{x}^n)$  справедливо равенство

$$D_{k-Д(1)}^{B_4; 0}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (1),} \\ 1, & \text{если } f \text{ не представима в виде (1).} \end{cases}$$

**Следствие 4.** Для любого  $n \geq 0$  справедливо равенство  $D_{k\text{-Д}(I)}^{B_4; 0}(n) = 1$ .

*Доказательство теоремы 4.* Вместо  $D_{k\text{-Д}(I)}^{B_4; 0}(f)$  для краткости будем писать  $D(f)$ . Равенство  $D(f) = 0$  в случае, когда функция  $f$  представима в виде (1), следует из леммы 7. Если же функция  $f$  не представима в виде (1), то неравенство  $D(f) \geq 1$  следует из леммы 8, а неравенство  $D(f) \leq 1$  — из леммы 9. Теорема 4 доказана.  $\square$

Используя теоремы 3–4, следствия 3–4 и принцип двойственности, нетрудно получить двойственные им результаты для случая  $p = 1$  и базиса  $B_4^* = \{\psi^*, \overline{\psi^*}\}$ , где  $\psi^*(\tilde{x}^q)$  — двойственная к  $\psi(\tilde{x}^q)$  булева функция. В частности, при  $n \geq 0$  справедливы равенства  $D_{k\text{-Д}(IO)}^{B_4^*; 1}(n) = 2$  и  $D_{k\text{-Д}(I)}^{B_4^*; 1}(n) = 1$ .

Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН № 01 «Фундаментальная математика и ее приложения» (грант PRAS-18-01).

## Список литературы

- [1] Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. — 1958. — **51**. — С. 270–360.
- [2] Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и её приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.) / Под ред. О. Б. Лупанова. — М.: Изд-во МГУ, 1986. — С. 7–12.
- [3] Яблонский С. В. Некоторые вопросы надёжности и контроля управляющих систем // Матем. вопросы киберн. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.
- [4] Редькин Н. П. Надёжность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992.
- [5] Коляда С. С. Верхние оценки длины проверяющих тестов для схем из функциональных элементов. — Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н. — М., 2013. — 77 с.
- [6] Reddy S. M. Easily testable realizations for logic functions // IEEE Trans. Comput. — 1972. — **C-21**, No. 11. — P. 1183–1188.
- [7] Saluja K. K., Reddy S. M. Fault detecting test sets for Reed-Muller canonic networks // IEEE Trans. Comput. — 1975. — **C-24**, No. 10. — P. 995–998.

- [8] Романов Д. С., Романова Е. Ю. Метод синтеза избыточных схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискретн. матем. — 2017. — **29**, вып. 4. — С. 87–105.
- [9] Редькин Н. П. О проверяющих тестах для схем при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Изв. вузов. Матем. — 1988. — № 7. — С. 57–64.
- [10] Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие единичные диагностические тесты // Дискретн. матем. — 1989. — **1**, вып. 3. — С. 71–76.
- [11] Редькин Н. П. О проверяющих тестах для схем при константных неисправностях на входах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. — 1997. — № 1. — С. 12–18.
- [12] Угольников А. Б. Классы Поста. Учебное пособие. — М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2008.

**Synthesis of easily testable logic networks under one-type stuck-at faults at inputs and outputs of gates**  
**Popkov K.A.**

The following assertions are proved: for each natural  $k$  and each Boolean constant  $p$ , there exists a basis consisting of a Boolean function on  $\max(k + 1; 3)$  variables and negation of one variable (there exists a basis consisting of a Boolean function on not more than  $2,5k + 2$  variables and negation of this function), in which one can implement any Boolean function except a Boolean constant  $p$  by a logic network which is irredundant and allows a fault detection test (a diagnostic test, respectively) with a length not exceeding 2 under not more than  $k$  stuck-at- $p$  faults at inputs and outputs of gates. It is shown that, when considering only stuck-at- $p$  faults at inputs of gates, one can reduce the mentioned bounds on lengths of tests to 1.

*Keywords:* logic network, one-type stuck-at fault, fault detection test, diagnostic test.

