

Критерий совпадения V -реализуемости формул расширения L языка арифметики с классической семантикой языка L .

Коновалов А. Ю.

Пусть L — некоторое расширение языка арифметики, V — некоторый класс числовых функций. Определяется понятие V -реализуемости для формул языка L таким образом, что индексы функций из класса V используются для интерпретации импликации и квантора всеобщности. Доказывается, что семантика V -реализуемости для языка L совпадает с классической семантикой этого языка тогда и только тогда, когда класс V содержит все функции, определяемые в языке L .

Ключевые слова: конструктивная семантика, реализуемость, обобщенная реализуемость, формальная арифметика.

Пусть V — некоторое множество частичных функций натурального аргумента. Элементы множества V назовем V -функциями. Будем считать, что для каждого натурального числа n имеется нумерация всех n -местных V -функций. А именно, определено множество индексов $I_n^V \subseteq \mathbb{N}$ вместе с отображением, которое каждому натуральному числу $z \in I_n^V$ ставит в соответствие n -местную V -функцию $\varphi_z^{V,n}$, и при этом всякая n -местная V -функция есть $\varphi_z^{V,n}$ для некоторого $z \in I_n^V$. Будем считать, что множество V вместе с вышеописанной нумерацией обладает следующими свойствами:

С1) V содержит все частично-рекурсивные функции;

С2) если ψ есть n -местная V -функция, s — перестановка на множестве $\{1, \dots, n\}$, то функция ψ' , определенная условным равенством $\psi'(x_1, \dots, x_n) \simeq \psi(x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)})$, является V -функцией;

С3) если ψ есть n -местная V -функция, то функция ψ' , определенная условным равенством

$$\psi'(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \simeq \psi(x_1, \dots, x_n),$$

является V -функцией;

С4) композиция V -функций есть V -функция;

С5) если ψ_1, ψ_2 суть $(n + 1)$ -местные V -функции, то функция ψ' , определенная условным равенством

$$\psi'(x_1, \dots, x_n) \simeq \mu x [\psi_1(x_1, \dots, x_n, x) = \psi_2(x_1, \dots, x_n, x)],$$

является V -функцией (μ — оператор минимизации);

С6) если ψ_1, ψ_2 суть n -местные V -функции, χ — всюду определенная n -местная V -функция, то функция ψ' , определенная условным равенством

$$\psi'(x_1, \dots, x_n) \simeq \begin{cases} 1(x_1, \dots, x_n), & \text{если } \chi(x_1, \dots, x_n) = 1; \\ 2(x_1, \dots, x_n), & \text{иначе,} \end{cases}$$

является V -функцией;

С7) для каждой $(n + m)$ -местной V -функции ψ найдется всюду определенная m -местная V -функция ψ' , что справедливо условное равенство

$$\varphi_{\psi'}^{V, n}(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})(x_1, \dots, x_n) \simeq \psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}).$$

Множество всех частично-рекурсивных функций обладает свойствами С1–С7. Другим примером функций, обладающих свойствами С1–С7, могут служить все арифметические функции или все гиперарифметические функции с подходящей нумерацией (см. [1], [2]).

Будем считать, что язык формальной арифметики LA содержит обозначения для всех примитивно рекурсивных функций, константы для обозначения всех натуральных чисел, а также логические константы \top (истина) и \perp (ложь), которые считаются атомарными формулами (атомами). Расширение LA' языка LA получается добавлением к LA предикатных символов P_i^n и функциональных символов f_i^n для всех $i \geq 0$, $n \geq 1$. Валентность символов P_i^n и f_i^n полагается равной n . Формулы языка LA' строятся из атомов при помощи логических связок \wedge , \vee , \rightarrow и кванторов \exists , \forall , причем квантор \forall используется следующим образом: если A и B — формулы, $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$ — список переменных, то выражение $\forall \bar{x} (A \rightarrow B)$ считается формулой. Такое определение формулы навеяно идеями из базисной арифметики (см. [3]). Выражение $\neg A$ условимся рассматривать как сокращение для формулы $A \rightarrow \perp$. Выражение $A(x_1, \dots, x_n)$ означает, что все свободные переменные формулы A находятся в списке x_1, \dots, x_n . Будем считать, что фиксированы расширение L языка LA и интерпретация \mathcal{N}_L языка L такие, что L — подязык

языка LA' , и интерпретация \mathcal{N}_L является продолжением стандартной интерпретацией языка LA . Заметим, что при этом $\mathcal{N}_L \models \top$ и $\mathcal{N}_L \not\models \perp$.

Представляет интерес рассмотрение варианта конструктивной логики, основанного на использовании V -функций как конструктивного способа получения одних реализаций из других. Понятие V -реализуемости для языка L определим по аналогии с рекурсивной реализуемостью Клини [4, §82].

Пусть фиксированы примитивно-рекурсивные двухместная функция c , которая взаимно однозначно нумерует все пары натуральных чисел, и одноместные обратные функции p_1 и p_2 , так что выполняются соотношения $p_1(c(x, y)) = x$ и $p_2(c(x, y)) = y$. В выражениях вида $p_1(t)$, $p_2(t)$ обычно будем опускать скобки.

Для каждого натурального числа e и произвольной замкнутой формулы Φ языка L определим отношение $e \mathbf{r}^V \Phi$ (e V -реализует Φ) индукцией по построению формулы Φ :

- 1) $e \mathbf{r}^V \Phi \iff \mathcal{N}_L \models \Phi$, если Φ — атом языка L ;
- 2) $e \mathbf{r}^V (\Phi \wedge \Psi) \iff p_1 e \mathbf{r}^V \Phi$ и $p_2 e \mathbf{r}^V \Psi$;
- 3) $e \mathbf{r}^V (\Phi \vee \Psi) \iff (p_1 e = 0$ и $p_2 e \mathbf{r}^V \Phi)$ или $(p_1 e = 1$ и $p_2 e \mathbf{r}^V \Psi)$;
- 4) $e \mathbf{r}^V \exists x \Phi(x) \iff p_2 e \mathbf{r}^V \Phi(p_1 e)$;
- 5) $e \mathbf{r}^V \forall x_1, \dots, x_n (\Phi(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \Psi(x_1, \dots, x_n)) \iff e \in I_{n+1}^V$ и для всех¹ натуральных чисел s, a_1, \dots, a_n , если верно $s \mathbf{r}^V \Phi(a_1, \dots, a_n)$, то определено $\varphi_e^{V, n+1}(a_1, \dots, a_n, s)$ и $\varphi_e^{V, n+1}(a_1, \dots, a_n, s) \mathbf{r}^V \Psi(a_1, \dots, a_n)$.

Замкнутую формулу Φ языка L назовем V -реализуемой (обозначение: $\mathbf{r}^V \Phi$), если найдется такое натуральное число e , что $e \mathbf{r}^V \Phi$.

Семантики расширений языка арифметики, основанные на понятии V -реализуемости для некоторых конкретных классов V , рассматривались в работах [1] и [2]. Там исследовались соотношения таких семантик с базисной и интуиционистской логикой. Сейчас мы установим критерий совпадения семантик, основанных на понятии V -реализуемости, с классической логикой.

Будем говорить, что n -местная частичная функция ψ определима в языке L формулой $\Phi(x_1, \dots, x_n, y)$ этого языка, если имеет место

$$(k_1, \dots, k_n) = k \iff \mathcal{N}_L \models \Phi(k_1, \dots, k_n, k)$$

для всех натуральных чисел k_1, \dots, k_n, k . Множество всех функций, определимых в языке L , обозначим $F(L)$.

¹Однако, если в списке x_1, \dots, x_n на некоторых позициях i и j стоят одинаковые переменные x_i и x_j , то мы не допускаем рассмотрение тех списков a_1, \dots, a_n , в которых $a_i \neq a_j$.

Верны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $V \supseteq F(L)$. Тогда имеет место

$$\mathbf{r}^V \Phi \iff \mathcal{N}_L \models \Phi$$

для всех замкнутых формул Φ языка L .

Теорема 2. Пусть $V \not\supseteq F(L)$. Тогда найдется формула $\Phi(z)$ языка L , для которой формула $\forall z (\Phi(z) \vee \neg\Phi(z))$ не является V -реализуемой.

Список литературы

- [1] Коновалов А. Ю., Плиско В. Е. О гиперарифметической реализуемости // Мат. зам. 2015. **98**, №5. 725–746.
- [2] Коновалов А. Ю. Арифметическая реализуемость и базисная логика // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. №1. 52–56.
- [3] Provably total functions of basic arithmetic // Math. Log. Quart. 2003. **49**. N 3. 316–322.
- [4] Клини С. К. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.

The V -realizability for L -formulas coincides with the classical semantics iff V contains all L -definable functions.
Kononov A. Yu.

Let L be an extension of the language of arithmetic, V a class of number-theoretical functions. A notion of the V -realizability for L -formulas is defined in such a way that indexes of functions in V are used for interpreting the implication and the universal quantifier. It is proved that the semantics for L based on the V -realizability coincides with the classical semantics iff V contains all L -definable functions.

Keywords: constructive semantics, realizability, generalized realizability, formal arithmetic.