Получение верхней оценки на хроматическое число графов заданной толщины и обхвата

Адилов С.Ш.

Данная работа посвящена изучению свойств графов с заданными параметрами толщины и обхвата. Приведена верхняя оценка на хроматическое число графов, зависящая от толщины k и обхавата g, где $k \geq 1$ и $g \geq 3$. В частности, для бипланарных графов с обхватом не менее 10 доказана 5-раскрашиваемось.

Ключевые слова: хроматическое число, обхват, толщина, планарный граф, бипланарный граф.

Введение

Вопрос наличия связей между обхватом и хроматическим числом произвольных графов был изучен венгерским математиком Палом Эрдёшем, который, используя вероятностный метод, доказал, что для любых положительных l и r существует граф с обхватом $g \geq l$ и хроматическим числом $\chi \geq r$. [1] Другими словами, существуют графы со сколь угодно большими обхватом и хроматическим числом. Однако, как известно, для планарных графов (графов с толщиной 1) имеет место аналитически доказанная теорема Хивуда, согласно которой такие графы допускают правильную раскраску в 5 цветов.[2] Если же графы при этом не содержат треугольников (толщина равна 1 и обхват не менее 4), то по теореме Грётча (Грётша) верна их 3-раскрашиваемость.[3] Для произвольных бипланарных графов, то есть графов с толщиной 2, доказано, что их хроматическое число не превосходит 12.[4] Как выяснилось в статье [5], эта оценка улучшаема до 8 для бипланарных графов, не содержащих треугольников. Таким образом, правильная раскраска может быть связана с такими параметрами, как толщина и обхват. Данная работа показывает общую оценку хроматического числа графов с толщиной $k \geq 1$ и обхватом $g \geq 3$.

Основные определения

В статье рассматриваются обыкновенные графы, то есть конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Определение. *Графом* G называется пара (V, E), где V – конечное непустое множество и E – множество неупорядоченных пар различных элементов из V. Элементы V называются *вершинами* графа, элементы E – *ребрами*. (n, m)*-графом* будем называть граф с n вершинами и m ребрами.

Определение. *Плоским графом* называется изображение графа на плоскости, причем вершинам графа сопоставлены точки на плоскости, а ребрам – кусочно гладке линии, соединяющие соответствующие вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме концевых вершин.

Определение. *Гранью* называется область, ограниченная ребрами в плоском графе и не содержащая внутри себя вершин и ребер графа. Одна из граней не ограничена и называется *внешней* гранью, а остальные – *внутренними* гранями. *Границей грани* будем считать множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани.

Определение. Граф называется *планарным*, если он представим в виде плоского графа.

Определение. Пусть $G = (V, E)$ – некоторый граф, r – натуральное число. *Правильной вершинной* r*-раскраской* графа G называется произвольная функция вида $f : V \to \{1, \ldots, r\}$ такая, что $f(u) \neq f(v)$ для любых смежных вершин u и v. *Хроматическим числом* $\chi(G)$ графа G называется наименьшее r, для которого G имеет правильную вершинную r-раскраску.

Определение. *Толщина* графа G есть наименьшее число планарных подграфов, объединение которых дает G.

Определение. Граф $G = (V, E)$ называется *бипланарным* (*двупланарным*), если его толщина равна 2, то есть существуют подграфы $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ графа G такие, что G_1, G_2 - планарные и $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Определение. *Обхватом* графа называется минимальная из длин его циклов.

Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть G – планарный (n, m)-граф с обхватом g. Тогда справедливо неравенство:*

$$m \leq \frac{g}{g-2}(n-2).$$

Доказательство. Пусть f – число граней плоского изображения графа G. Каждое ребро графа G, не являющееся мостом (ребром, не содержащимся ни в одном цикле), принадлежит двум граням. Всякая грань ограничена по крайней мере g ребрами. Отсюда получим оценку снизу удвоенного числа ребер графа G, то есть

$$gf \leq 2m.$$

Так как G – планарный граф, справедлива формула Эйлера:

$$f = m - n + 2.$$

Получим

$$g(m-n+2) \leq 2m \iff m \leq \frac{g}{g-2}(n-2).$$

$\square$

Лемма 2. *Для любого (n, m)-графа с толщиной k и обхватом g справедливо неравенство*

$$m \leq \frac{kg}{g-2}(n-2).$$

Доказательство. Имеем $G := G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_k$, где G_j – планарные (n_j, m_j)-графы, $j = \overline{1, k}$. Согласно лемме 1

$$m_j \leq \frac{g}{g-2}(n_j - 2) \leq \frac{g}{g-2}(n-2).$$

Получим

$$m \leq m_1 + m_2 + \ldots + m_k \leq \frac{kg}{g-2}(n-2).$$

$\square$

Лемма 3. *В любом графе с толщиной k и обхватом не менее g существует вершина степени не более $d = \left\lceil \frac{2kg}{g-2} \right\rceil - 1$.*

Доказательство. Предположим обратное: степень любой вершины такого графа не меньше $d+1$. Тогда имеем 2 неравенства:
так как по предположению каждой вершине инцидентны не менее $d+1$ ребер,

$$2m \geq (d+1)n,$$

и согласно лемме 2

$$m \leq \frac{kg}{g-2}(n-2).$$

Объединив неравенства, получим

$$(d+1)n \leq 2 \cdot \frac{kg}{g-2}(n-2) \iff \left\lceil \frac{2kg}{g-2} \right\rceil n \leq \frac{2kg}{g-2}(n-2) \leq \left\lceil \frac{2kg}{g-2} \right\rceil (n-2).$$

Полученное неравенство $n \leq n-2$ не имеет решений. Противоречие. □

Основные результаты

Теорема 1. *Любой граф с толщиной k и обхватом не менее g допускает правильную раскраску не более чем в* $\chi = \left\lceil \frac{2kg}{g-2} \right\rceil$ *цветов.*

Доказательство. Применим индукцию по количеству вершин n. Очевидно, что такой граф с $n \leq g$ вершинами является либо лесом, либо циклом длины g. Лес раскрашивается в 2 цвета, цикл – в 3. А поскольку при любых $k \geq 1$ и $g \geq 3$

$$\chi = \left\lceil \frac{2kg}{g-2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2k(g-2)+4k}{g-2} \right\rceil = \left\lceil 2k + \frac{4k}{g-2} \right\rceil \geq 3,$$

теорема верна.

Пусть теорема верна для графов с $n > g$ вершинами. Согласно лемме 3 найдется вершина степени не более $\chi - 1$. Удалим эту вершину и все инцидентные ей ребра. По предположению индукции полученный граф допускает правильную раскраску не более чем в χ цветов. Добавив удаленную вершину и все инцидентные ей ребра обратно, получим, что ее тоже можно раскрасить в худшем случае в один из χ цветов, поскольку все смежные $\chi - 1$ вершины могут иметь $\chi - 1$ цветов. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Следующая таблица показывает связь обхвата и хроматического числа бипланарных графов:*

Обхват	3	4	5	6, 7, 8, 9	≥ 10
Верхняя оценка хроматического числа	12	8	7	6	5

Заключение

Полученные результаты обобщают оценки хроматического числа графов произвольной толщины и обхвата. Однако получена лишь оценка сверху и в ряде случаев она оказывается завышенной, так как существуют более сильные утверждения. Например, при $k = 1$ и $g = 4$ получим планарный граф без треугольников. Согласно теореме 1 такие графы 4-раскрашиваемы, в то время как по теореме Грёча хроматическое число планарных графов без треугольников равно 3, как уже было отмечено во введении. Таким образом, становится актуальным вопрос улучшаемости оценки хроматического числа графов с фиксированными толщиной и обхватом. Для случая $k = 2$ и $g = 4$ в статье [5] показана нижняя оценка в 5 цветов.

Список литературы

[1] Paul Erdős Graph theory and probability // Canadian Journal of Mathematics. — 1959. — Т. 11. — С. 34—38.

[2] Харари Фрэнк Теория графов
Изд. 2-е. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 296 с.

[3] H. Grötzsch Zur Theorie der diskreten Gebilde, VII: Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel // Wiss. Z. Martin-Luther-U., Halle-Wittenberg, Math.-Nat. Reihe. — 1959. — Т. 8. — С. 109–120.

[4] L.W. Beineke Biplanar Graphs:: A Survey
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122197002149

[5] Ищенко Р.А. Хроматическое число бипланарных графов без треугольников // Интеллектуальные системы. - 2014 — Т.18, вып.4 - с.223-226

[6] В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич Лекции по теории графов
Р.И. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 384 с.

An upper bound for the chromatic number of graphs with given thickness and girth

S. Sh. Adilov

The thickness of a graph G is the minimum number of planar graphs whose union is G. In this paper, we consider an upper bound for the chromatic number of graphs depending on thickness k and girth g, where $k \geq 1$ and $g \geq 3$. In particular, for biplanar graphs with girth at least 10 we obtain 5-colorability.

Keywords: chromatic number, girth, thickness, planar graph, biplanar graph.