

# Решётка клонов трёхзначной логики, содержащих функции $0, 1, 2, \min, \max$

Моисеев С. В.

В настоящей работе дано полное описание решётки всех клонов трёхзначной логики, содержащих одновременно все константы  $0, 1, 2$  и функции  $\min, \max$ . Клоны описаны как множества сохранения предикатов.

**Ключевые слова:** теория клонов, решетка клонов, трёхзначная логика.

**Теорема.** *Существует ровно 33 клон трёхзначной логики, содержащих функции  $0, 1, 2, \min, \max$ . Решётка клонов по включению представлена на диаграмме Хассе (рис. 1). Вершине  $v$  диаграммы соответствует класс сохранения множества всех предикатов, указанных на стрелках всех путей от верхней точки диаграммы к вершине  $v$ .*

Верхней точке диаграммы 1 соответствует множество всех функций трёхзначной логики. Нижней точке диаграммы соответствует клон, порождённый функциями  $0, 1, 2, \min, \max$ . Стрелки на диаграмме направлены от клона к клону, предполному в нём. Для клона  $M'$ , у которого ровно один непосредственный надклон  $M$ , на стрелке от  $M$  к  $M'$  указан предикат, сохраняемый клоном  $M'$ , но не сохраняемый его надклоном  $M$ . Таким образом, все исследуемые клоны можно определить как классы сохранения какого-то подмножества десяти предикатов, указанных на диаграмме.

## 1. Основные понятия теории клонов

**Обозначение.** Арности предикатов и функций (при необходимости) в данной работе будем указывать в верхнем индексе после символа предиката/функции, например:  $p^{(n)}, f^{(r)}$ .

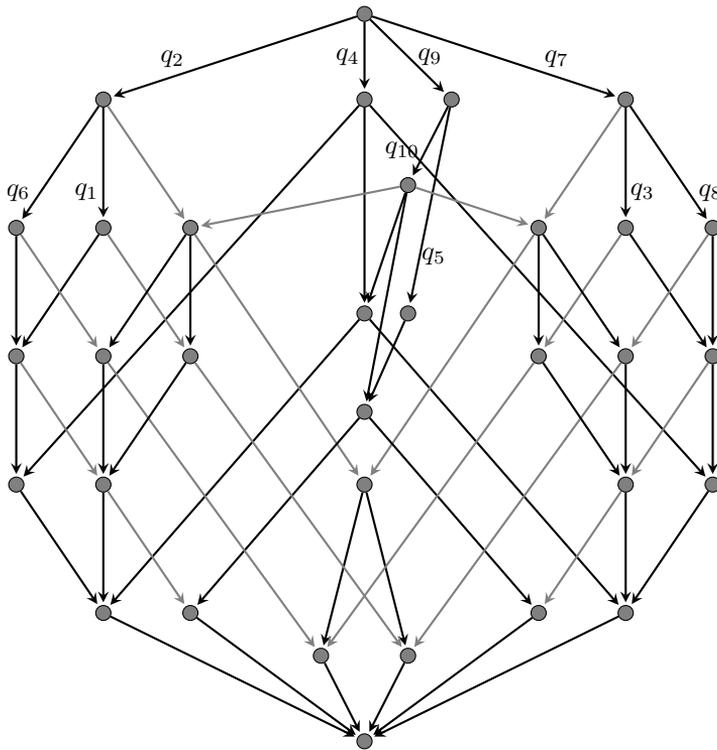


Рис. 1.

### 1.1. Клоны функций $k$ -значной логики

Пусть  $P_k$  — множество всех функций  $k$ -значной логики.

**Определение.** Пусть  $M \subseteq P_k$ . Определим множество  $[M]$  (замыкание множества  $M$  относительно суперпозиции) следующими аксиомами:

- 1) Для любых  $r \geq 1, j \in \{1, \dots, r\}$  множество  $[M]$  содержит функцию-проектор

$$pr_j^{(r)} : (x_1, \dots, x_r) \mapsto x_j.$$

- 2)  $(f \in M) \implies (f \in [M])$ .

$$\begin{aligned}
3) \quad & \llbracket f^{(n)} \in [M], f_1^{(r_1)} \in [M], \dots, f_n^{(r_n)} \in [M], \\
& \forall x_1 \dots \forall x_r \left( h^{(r)}(x_1, \dots, x_r) = \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. = f^{(n)} \left( f_1^{(r_1)}(x_1, \dots, x_r), \dots, f_n^{(r_n)}(x_1, \dots, x_r) \right) \right) \\
& \rrbracket \implies h^{(r)} \in [M].
\end{aligned}$$

**Определение.** Множество  $M \subseteq P_k$  функций  $k$ -значной логики называется *клоном функций*, если

$$[M] = M.$$

## 1.2. Реляционные клоны

Обозначим через  $R_k$  множество всех предикатов на  $k$ -элементном множестве  $\{0, 1, \dots, k-1\}$ , т.е. множество всех функций вида

$$p: \{0, 1, \dots, k-1\}^n \rightarrow \{\perp, \top\},$$

где  $\perp, \top$  — константы «ложь», «истина».

Зафиксируем следующие предикаты из  $R_3$ :

$$\begin{aligned}
false^{(0)} & \quad (\text{константа «ложь»}) \\
true^{(0)} & \quad (\text{константа «истина»}) \\
eq^{(2)}: (x_1, x_2) & \mapsto (x_1 = x_2) \quad (\text{предикат равенства})
\end{aligned}$$

**Определение.** Пусть  $Q \subseteq R_k$  — множество предикатов. Определим множество  $[Q]_{p.p.}$  (*замыкание множества  $Q$  относительно примитивных позитивных формул*) следующими аксиомами:

$$\begin{aligned}
1) \quad & \{false^{(0)}, true^{(0)}, eq^{(2)}\} \subseteq [Q]_{p.p.} \\
2) \quad & (p \in Q) \implies (p \in [Q]_{p.p.}) \\
3) \quad & \llbracket p_1^{(r_1)} \in [Q]_{p.p.}, \dots, p_n^{(r_n)} \in [Q]_{p.p.}, \\
& \forall x_1 \dots \forall x_r \left( p^{(r)}(x_1, \dots, x_r) = \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. = \exists y_1 \dots \exists y_s \left( p_1^{(r_1)}(z_{1,1}, \dots, z_{1,r_1}) \wedge \dots \wedge p_n^{(r_n)}(z_{n,1}, \dots, z_{n,r_n}) \right) \right) \\
& \rrbracket \implies p^{(r)} \in [Q]_{p.p.}
\end{aligned}$$

( $s \geq 0, n \geq 1, z_{k,j}$  обозначает один из символов « $x_1$ », ..., « $x_r$ », « $y_1$ », ..., « $y_s$ »).

**Определение.** Множество  $Q \subseteq R_k$  называется *реляционным клоном*, если

$$[Q]_{p.p.} = Q.$$

### 1.3. Связь между клонами функций и реляционными клонами

**Определение.** Скажем, что функция  $f^{(r)} \in P_k$  *сохраняет* предикат  $p^{(n)} \in R_k$ , если

$$(p^{(n)}(x_{1,1}, \dots, x_{1,n}) \wedge \dots \wedge p^{(n)}(x_{r,1}, \dots, x_{r,n})) \implies p^{(n)}(f^{(r)}(x_{1,1}, \dots, x_{r,1}), \dots, f^{(r)}(x_{1,n}, \dots, x_{r,n})).$$

Множество всех функций, сохраняющих каждый предикат множества  $Q \subseteq R_k$ , будем обозначать как  $Pol(Q)$ . Множество всех предикатов, сохраняемых всеми функциями из множества  $M \subseteq P_k$ , будем обозначать как  $Inv(M)$ .

**Теорема** (Гейгер [1]; Боднарчук и др. [2]).

$$\begin{aligned} Pol\ Inv\ M &= [M]; \\ Inv\ Pol\ Q &= [Q]_{p.p.} \end{aligned}$$

## 2. Клоны трёхзначной логики, содержащие функции 0, 1, 2, *min*, *max*, как классы сохранения множества предикатов

**Определение.** Будем говорить, что *множество  $M$  является классом сохранения множества предикатов  $Q$* , если  $M = Pol(Q)$ .

Классический подход к описанию клонов  $k$ -значной логики состоит в том, чтобы характеризовать их как классы сохранения множеств предикатов. Данный подход обоснован следующим фактом, являющимся следствием теоремы Гейгера–Боднарчука:

**Теорема.** Пусть  $M$  — клон  $k$ -значной логики. Тогда существует множество  $Q \subseteq R_k$  (возможно, бесконечное), такое что

$$M = Pol(Q).$$

## 2.1. Предикаты, характеризующие клоны трёхзначной логики, содержащие функции 0, 1, 2, *min*, *max*

В соответствии с классическим подходом будем определять клоны трёхзначной логики, содержащие функции 0, 1, 2, *min*, *max*, через множество предикатов, классом сохранения которых они являются. В нашем случае каждый клон может быть определён как класс функций, сохраняющих какое-то подмножество десяти предикатов арности 2, указанных в списке ниже. Каждый предикат этого списка определён через множество наборов, на которых он принимает значение «истина». Именно эти предикаты имеются в виду на диаграмме 1.

$q_1 = \{22, 11, 01, 00\}$	(частичный порядок $0 < 1$ )
$q_2 = \{22, 11, 10, 01, 00\}$	(эквивалентность $0 \sim 1$ )
$q_3 = \{22, 12, 11, 00\}$	(частичный порядок $1 < 2$ )
$q_4 = \{22, 12, 11, 02, 01, 00\}$	(линейный порядок $0 < 1 < 2$ )
$q_5 = \{22, 12, 11, 10, 00\}$	(частичный порядок $1 < 0, 1 < 2$ )
$q_6 = \{22, 12, 11, 10, 02, 01, 00\}$	(предпорядок $(0 \sim 1) < 2$ )
$q_7 = \{22, 21, 12, 11, 00\}$	(эквивалентность $1 \sim 2$ )
$q_8 = \{22, 21, 12, 11, 02, 01, 00\}$	(предпорядок $0 < (1 \sim 2)$ )
$q_9 = \{22, 21, 12, 11, 10, 01, 00\}$	(центральный предикат)
$q_{10} = \{22, 21, 12, 11, 10, 02, 01, 00\}$	(все наборы кроме 20)

## 2.2. Множества предикатов, классами сохранения которых являются клоны трёхзначной логики, содержащие функции 0, 1, 2, *min*, *max*

Определим для каждой вершины  $v$  диаграммы 1 некоторое множество предикатов  $\pi(v) \subseteq \{q_1, \dots, q_{10}\}$ .

- 1) Верхней точке *top* диаграммы сопоставим пустое множество:

$$\pi(\text{top}) = \emptyset.$$

- 2) Пусть  $v'$  — вершина диаграммы, в которую входит ровно одно ребро из некоторой вершины  $v$ . В этом случае на диаграмме это ребро помечено некоторым предикатом  $p$ . Положим

$$\pi(v') = \pi(v) \cup \{p\}.$$

3) Пусть  $v'$  — вершина диаграммы, в которую входит несколько рёбер из некоторых вершин  $v_1, \dots, v_m$  ( $m \geq 2$ ). Положим

$$\pi(v') = \pi(v_1) \cup \dots \cup \pi(v_m).$$

Таким образом,  $\pi(v)$  совпадает со множеством всех предикатов, указанных на стрелках всех путей от верхней точки диаграммы 1 к вершине  $v$ . В частности, если  $v', v''$  — две различные вершины диаграммы, то  $\pi(v') \neq \pi(v'')$ .

Обозначим все вершины диаграммы через  $v_1, \dots, v_{33}$ , где нумерация вершин выбрана согласно формулам ниже. В частности,  $v_1$  — верхняя точка диаграммы,  $v_5$  — нижняя точка диаграммы.

$$\begin{aligned} \pi(v_1) &= \emptyset; \\ \pi(v_2) &= \{q_1, q_2\}; \\ \pi(v_3) &= \{q_2\}; \\ \pi(v_4) &= \{q_3, q_7\}; \\ \pi(v_5) &= \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}; \\ \pi(v_6) &= \{q_2, q_3, q_6, q_7, q_9, q_{10}\}; \\ \pi(v_7) &= \{q_4\}; \\ \pi(v_8) &= \{q_1, q_2, q_4, q_6\}; \\ \pi(v_9) &= \{q_3, q_4, q_7, q_8\}; \\ \pi(v_{10}) &= \{q_5, q_9\}; \\ \pi(v_{11}) &= \{q_1, q_2, q_5, q_6, q_9, q_{10}\}; \\ \pi(v_{12}) &= \{q_3, q_5, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}; \\ \pi(v_{13}) &= \{q_2, q_6\}; \\ \pi(v_{14}) &= \{q_1, q_2, q_6\}; \\ \pi(v_{15}) &= \{q_7\}; \\ \pi(v_{16}) &= \{q_1, q_2, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}; \\ \pi(v_{17}) &= \{q_2, q_7, q_9, q_{10}\}; \\ \pi(v_{18}) &= \{q_7, q_8\}; \\ \pi(v_{19}) &= \{q_3, q_7, q_8\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi(v_{20}) &= \{q_9\}; \\
\pi(v_{21}) &= \{q_1, q_2, q_9, q_{10}\}; \\
\pi(v_{22}) &= \{q_2, q_9, q_{10}\}; \\
\pi(v_{23}) &= \{q_3, q_7, q_9, q_{10}\}; \\
\pi(v_{24}) &= \{q_4, q_9, q_{10}\}; \\
\pi(v_{25}) &= \{q_1, q_2, q_4, q_6, q_9, q_{10}\}; \\
\pi(v_{26}) &= \{q_3, q_4, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}; \\
\pi(v_{27}) &= \{q_2, q_6, q_9, q_{10}\}; \\
\pi(v_{28}) &= \{q_1, q_2, q_6, q_9, q_{10}\}; \\
\pi(v_{29}) &= \{q_7, q_9, q_{10}\}; \\
\pi(v_{30}) &= \{q_7, q_8, q_9, q_{10}\}; \\
\pi(v_{31}) &= \{q_3, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}; \\
\pi(v_{32}) &= \{q_9, q_{10}\}; \\
\pi(v_{33}) &= \{q_5, q_9, q_{10}\}.
\end{aligned}$$

### 3. Идея доказательства

Пусть  $Q_1, \dots, Q_{33}$  — множества предикатов, определённые для вершин  $v_1, \dots, v_{33}$  как описано в разделе 2.2, т. е.

$$Q_1 = \pi(v_1), \dots, Q_{33} = \pi(v_{33}).$$

Основной результат работы можно переформулировать следующим образом:

**Теорема.** *Множество всех клонов трёхзначной логики, содержащих функции 0, 1, 2, min, max, в точности совпадает со множеством клонов, являющихся классами сохранения множеств предикатов  $Q_1, \dots, Q_{33}$ , т. е. со множеством*

$$Pol(Q_1), \dots, Pol(Q_{33}).$$

Этот факт мы докажем, используя следующую логическую цепочку.

1. Вначале докажем, что для характеристики всех клонов трёхзначной логики, содержащих функции  $0, 1, 2, \min, \max$ , достаточно предикатов  $q_1, \dots, q_{10}$ , определённых в разделе 2.1; точнее, что справедлива следующая лемма:

**Лемма 1** (О предикатном базисе). *Если  $M$  — клон трёхзначной логики, содержащий функции  $0, 1, 2, \min, \max$ , то*

$$(\exists Q \subseteq \{q_1, \dots, q_{10}\}) (M = \text{Pol}(Q)).$$

2. Из леммы 1 следует, что существует максимум 1024 клонов трёхзначной логики, содержащих функции  $0, 1, 2, \min, \max$ . Покажем далее, что на самом деле их *не более чем 33*; точнее, что справедлива следующая лемма:

**Лемма 2** (О полноте решётки). *Для любого  $Q \subseteq \{q_1, \dots, q_{10}\}$  существует вершина  $v$  диаграммы, такая что*

$$\text{Pol}(Q) = \text{Pol}(\pi(v)).$$

3. В заключение, покажем, что клонов трёхзначной логики, содержащих функции  $0, 1, 2, \min, \max$ , *не менее чем 33*; точнее, что справедлива следующая лемма:

**Лемма 3.** *Пусть  $v', v''$  — две различные вершины диаграммы 1. Тогда*

$$\text{Pol}(\pi(v')) \neq \text{Pol}(\pi(v'')).$$

## 4. Доказательство леммы 1

1. Лемма 1 утверждает, что каждый клон  $M$  трёхзначной логики, содержащий функции  $0, 1, 2, \min, \max$ , может быть охарактеризован как класс сохранения какого-то подмножества предикатов  $q_1, \dots, q_{10}$ , определённых в разделе 2.1. Для доказательства этого факта покажем вначале, что каждый такой клон  $M$  может быть охарактеризован как класс сохранения какого-то множества предикатов арности 2, т. е. что

$$(\exists Q \subseteq R_3(2)) (M = \text{Pol}(Q)).$$

**Определение.** Функция  $f^{(r+1)} \in P_k$ , где  $r \geq 2$ , называется функцией почти-единогласия (*near-unanimity function, NUF*), если справедливо тождество:

$$f^{(r+1)}(x, y, \dots, y) = f^{(r+1)}(y, x, y, \dots, y) = \dots = f^{(r+1)}(y, \dots, y, x) = y.$$

**Теорема** (Бейкер, Пиксли [3]). Пусть  $M$  — клон, содержащий функцию почти-единогласия  $f^{(r+1)}$  арности  $r + 1$  ( $r \geq 2$ ). Тогда

$$(\exists Q \subseteq R_k(r)) (M = Pol(Q)),$$

где  $R_k(r)$  — множество всех предикатов  $k$ -значной логики арности  $\leq r$ .

Заметим, что каждый клон  $M$  трёхзначной логики, содержащий функции  $0, 1, 2, \min, \max$ , также содержит функцию голосования  $maj^{(3)}$ , определяемую тождеством:

$$maj^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \max(\max(\min(x_1, x_2), \min(x_2, x_3)), \min(x_3, x_1)).$$

Функция  $maj^{(3)}$  является функцией почти-единогласия арности 3, следовательно по теореме Бейкера—Пиксли

$$(\exists Q \subseteq R_3(2)) (M = Pol(Q)).$$

Покажем, что на самом деле

$$(\exists Q \subseteq \{q_1, \dots, q_{10}\}) (M = Pol(Q)).$$

**2.** Для удобства доказательства введём вспомогательную функцию  $\mu$ . В качестве  $\mu$  возьмём любую функцию, такую что для любого предиката  $p \in R_3(2)$ , сохраняемого функциями  $0, 1, 2, \min, \max$ , справедливо

$$(\mu(p) \subseteq \{q_1, \dots, q_{10}\}) \wedge ([\{p\}]_{p.p.} = [\mu(p)]_{p.p.}).$$

Существование функции  $\mu$  мы докажем далее в разделе 4.1.

Докажем теперь лемму 1. Пусть  $M$  — клон трёхзначной логики, содержащий функции  $0, 1, 2, \min, \max$ . Доказательство леммы 1 даёт следующая логическая цепочка:

$$1) (\exists Q \subseteq R_3(2)) (M = Pol(Q)) \text{ (по теореме Бейкера—Пиксли).}$$

- 2)  $Pol(Q) = Pol([Q]_{p.p.})$  (по теореме Гейгера—Боднарчука (см. раздел 1.3), так как

$$Pol(Q) = Pol Inv (Pol Q) = Pol (Inv Pol Q) = Pol([Q]_{p.p.}).$$

- 3)  $Q = \{s_1, \dots, s_m\}$  для некоторых предикатов  $s_1, \dots, s_m \in R_3(2)$  (так как  $Q \subseteq R_3(2)$  и поэтому конечно).
- 4)  $[Q]_{p.p.} = [\{s_1, \dots, s_m\}]_{p.p.} = [[\{s_1\}]_{p.p.} \cup \dots \cup \{\{s_m\}\}]_{p.p.}$  (по определению  $[ ]_{p.p.}$ ).
- 5) Так как  $M = Pol(\{s_1, \dots, s_m\})$  и  $M$  содержит функции  $0, 1, 2, min, max$ , то все предикаты  $s_1, \dots, s_m$  сохраняются функциями  $0, 1, 2, min, max$ . Поэтому к ним можно применить функцию  $\mu$ :  $[[\{s_1\}]_{p.p.} \cup \dots \cup \{\{s_m\}\}]_{p.p.} = [[\mu(s_1)]_{p.p.} \cup \dots \cup \{\mu(s_m)\}]_{p.p.}$ .
- 6)  $[[\mu(s_1)]_{p.p.} \cup \dots \cup \{\mu(s_m)\}]_{p.p.} = [\mu(s_1) \cup \dots \cup \mu(s_m)]_{p.p.}$  (по определению  $[ ]_{p.p.}$ ).
- 7)  $[Q]_{p.p.} = [Q']_{p.p.}$ , где  $Q' = \mu(s_1) \cup \dots \cup \mu(s_m)$ .
- 8)  $Q' \subseteq \{q_1, \dots, q_{10}\}$  (по определению  $\mu$ ).
- 9)  $Pol([Q']_{p.p.}) = Pol(Q')$ .

#### 4.1. Существование вспомогательной функции $\mu$

Пусть  $p \in R_3(2)$  — предикат арности 2, сохраняемый функциями  $0, 1, 2, min, max$ . Докажем, что

$$(\exists Q \subseteq \{q_1, \dots, q_{10}\}) ([\{p\}]_{p.p.} = [Q]_{p.p.}).$$

*Доказательство.* Существует ровно 26 предикатов арности 2, сохраняемых функциями  $0, 1, 2, min, max$ . Это предикаты  $false^{(2)}, true^{(2)}, eq^{(2)}$ , предикаты  $q_1, \dots, q_{10}$ , определённые в разделе 2.1, и 13 предикатов из списка ниже. В качестве номера предиката  $p_j$  этого списка мы указываем число  $j$  (в десятичной кодировке), определяемое формулой

$$j = \tilde{p}_j(2, 2) \cdot 2^8 + \tilde{p}_j(2, 1) \cdot 2^7 + \tilde{p}_j(2, 0) \cdot 2^6 + \dots + \tilde{p}_j(0, 1) \cdot 2^1 + \tilde{p}_j(0, 0) \cdot 2^0,$$

где  $\tilde{p}_j(x_1, x_2) = 1$ , если  $p_j$  истинен на наборе  $(x_1, x_2)$ ;  $\tilde{p}_j(x_1, x_2) = 0$  иначе.

$$\begin{aligned}
p_{281} &= \{22, 11, 10, 00\} && (\text{частичный порядок } 1 < 0) \\
p_{307} &= \{22, 12, 11, 01, 00\} \\
p_{315} &= \{22, 12, 11, 10, 01, 00\} \\
p_{401} &= \{22, 21, 11, 00\} && (\text{частичный порядок } 2 < 1) \\
p_{403} &= \{22, 21, 11, 01, 00\} && (\text{частичный порядок } 0 < 1, 2 < 1) \\
p_{409} &= \{22, 21, 11, 10, 00\} \\
p_{411} &= \{22, 21, 11, 10, 01, 00\} \\
p_{435} &= \{22, 21, 12, 11, 01, 00\} \\
p_{441} &= \{22, 21, 12, 11, 10, 00\} \\
p_{473} &= \{22, 21, 20, 11, 10, 00\} && (\text{линейный порядок } 2 < 1 < 0) \\
p_{475} &= \{22, 21, 20, 11, 10, 01, 00\} && (\text{предпорядок } 2 < (0 \sim 1)) \\
p_{505} &= \{22, 21, 20, 12, 11, 10, 00\} && (\text{предпорядок } (1 \sim 2) < 0) \\
p_{507} &= \{22, 21, 20, 12, 11, 10, 01, 00\} && (\text{все наборы кроме } 02)
\end{aligned}$$

Очевидно, что для любого  $p \in \{false^{(2)}, true^{(2)}, eq^{(2)}, q_1, \dots, q_{10}\}$

$$(\exists Q \subseteq \{q_1, \dots, q_{10}\}) ([\{p\}]_{p.p.} = [Q]_{p.p.}).$$

Покажем, что и оставшиеся 13 предикатов обладают этим свойством.

- 1) Предикаты  $p_{281}, p_{401}, p_{403}, p_{473}, p_{475}, p_{505}, p_{507}$  получаются перестановкой переменных из предикатов  $q_1, \dots, q_{10}$ , и поэтому они обладают требуемым свойством:

$$\begin{aligned}
p_{281}(x_1, x_2) &= q_1(x_2, x_1); \\
p_{401}(x_1, x_2) &= q_3(x_2, x_1); \\
p_{403}(x_1, x_2) &= q_5(x_2, x_2); \\
p_{473}(x_1, x_2) &= q_4(x_2, x_1); \\
p_{475}(x_1, x_2) &= q_6(x_2, x_1); \\
p_{505}(x_1, x_2) &= q_8(x_2, x_1); \\
p_{507}(x_1, x_2) &= q_{10}(x_2, x_1).
\end{aligned}$$

- 2) Для каждого из предикатов  $p_{307}$ ,  $p_{315}$ ,  $p_{435}$  мы предъявим некоторое множество  $Q = \{s_1, \dots, s_m\} \subseteq \{q_1, \dots, q_{10}\}$ , такое что

$$[\{p\}]_{p.p.} = [\{s_1, \dots, s_m\}]_{p.p.},$$

а доказательство факта  $[\{p\}]_{p.p.} = [\{s_1, \dots, s_m\}]_{p.p.}$  мы сведём к доказательству двух вспомогательных фактов:

- а)  $p \in [\{s_1, \dots, s_m\}]_{p.p.}$   
 б)  $(\forall s \in \{s_1, \dots, s_m\}) (s \in [\{p\}]_{p.p.})$ .

Итак,

- а)  $[\{p_{307}\}]_{p.p.} = [\{q_4, q_{10}\}]_{p.p.}$ , так как

$$\begin{aligned} p_{307}(x_1, x_2) &= q_4(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1); \\ q_4(x_1, x_2) &= \exists y_1 (p_{307}(x_1, y_1) \wedge p_{307}(y_1, x_2)); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 (p_{307}(x_1, y_2) \wedge p_{307}(y_2, y_1) \wedge p_{307}(x_2, y_1)). \end{aligned}$$

- б)  $[\{p_{315}\}]_{p.p.} = [\{q_6, q_{10}\}]_{p.p.}$ , так как

$$\begin{aligned} p_{315}(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1); \\ q_6(x_1, x_2) &= \exists y_1 (p_{315}(x_1, y_1) \wedge p_{315}(y_1, x_2)); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 (p_{315}(x_1, y_2) \wedge p_{315}(y_2, y_1) \wedge p_{315}(x_2, y_1)). \end{aligned}$$

- в)  $[\{p_{435}\}]_{p.p.} = [\{q_8, q_{10}\}]_{p.p.}$ , так как

$$\begin{aligned} p_{435}(x_1, x_2) &= q_8(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1); \\ q_8(x_1, x_2) &= \exists y_1 (p_{435}(x_1, y_1) \wedge p_{435}(y_1, x_2)); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 (p_{435}(y_1, x_1) \wedge p_{435}(y_1, y_2) \wedge p_{435}(y_2, x_2)). \end{aligned}$$

- 3) Предикаты  $p_{409}$ ,  $p_{411}$ ,  $p_{441}$  получаются перестановкой переменных из предикатов  $p_{307}$ ,  $p_{315}$ ,  $p_{435}$ , поэтому они также обладают требуемым свойством:

$$\begin{aligned} p_{409}(x_1, x_2) &= p_{307}(x_2, x_1); \\ p_{411}(x_1, x_2) &= p_{315}(x_2, x_1); \\ p_{441}(x_1, x_2) &= p_{435}(x_2, x_1). \end{aligned}$$

□

## 5. Доказательство леммы 2

Напомним, что в разделе 2.2 мы сопоставили каждой вершине  $v$  диаграммы 1 некоторое множество предикатов  $\pi(v) \subseteq \{q_1, \dots, q_{10}\}$ . Лемма 2 говорит о том, что для любого  $Q \subseteq \{q_1, \dots, q_{10}\}$  существует вершина  $v$  диаграммы, такая что

$$Pol(Q) = Pol(\pi(v)).$$

Введём индуктивное определение:

1)  $Classes(0) = \{[\emptyset]_{p.p.}\}.$

2)  $Classes(m) =$   
 $= Classes(m-1) \cup \{[C \cup \{q_m\}]_{p.p.} : C \in Classes(m-1)\}$   
 $(1 \leq m \leq 10).$

Учитывая, что  $[Q \cup \{p\}]_{p.p.} = [[Q]_{p.p.} \cup \{p\}]_{p.p.}$ , заметим, что

$$Classes(m) = \{[Q]_{p.p.} : Q \subseteq \{q_1, \dots, q_m\}\} \quad (0 \leq m \leq 10).$$

Поэтому, учитывая, что  $Pol(Q) = Pol([Q]_{p.p.})$ , утверждение леммы 2 можно переформулировать следующим образом:

$$(\forall C \in Classes(10)) (\exists v) (Pol(C) = Pol(\pi(v))).$$

А учитывая, что  $(Pol(Q) = Pol(Q')) \iff ([Q]_{p.p.} = [Q']_{p.p.})$  и тот факт, что  $(C \in Classes(m)) \Rightarrow ([C]_{p.p.} = C)$ , утверждение леммы 2 можно дополнительно переформулировать так:

$$(\forall C \in Classes(10)) (\exists v) (C = [\pi(v)]_{p.p.}).$$

Докажем этот факт индукцией по параметру  $m$  в обозначении  $Classes(m)$ .

1) Базис индукции. Пусть  $m = 0$ . Тогда

$$Classes(0) = \{[\emptyset]_{p.p.}\}.$$

Поэтому если  $C \in Classes(0)$ , то  $C = [\pi(v_1)]_{p.p.}$ , где согласно нашим обозначениям  $v_1$  обозначает верхнюю точку диаграммы 1.

- 2) Индукционный переход. Зафиксируем  $m \in \{1, \dots, 10\}$  и предположим, что

$$(\forall C \in \text{Classes}(m-1)) (\exists v) (C = [\pi(v)]_{p.p.}).$$

Покажем, что

$$(\forall C \in \text{Classes}(m)) (\exists v) (C = [\pi(v)]_{p.p.}).$$

Пусть  $C \in \text{Classes}(m)$ . Из определения  $\text{Classes}(m)$  имеем:

$$(C \in \text{Classes}(m-1)) \vee \\ \vee (\exists C' \in \text{Classes}(m-1)) (C = [C' \cup \{q_m\}]_{p.p.}).$$

Поэтому доказательство индукционного перехода сводится к доказательству факта

$$(\forall C \in \text{Classes}(m-1)) (\exists v) ([C \cup \{q_m\}]_{p.p.} = [\pi(v)]_{p.p.}). \\ (\text{induct-step-}m)$$

Докажем этот факт. Зафиксируем  $C \in \text{Classes}(m-1)$ . По предположению индукции  $C = [\pi(v)]_{p.p.}$  для некоторой вершины  $v$ . Далее,

- а) Если  $p_m \in C$ , то, очевидно,

$$[C \cup \{q_m\}]_{p.p.} = [C]_{p.p.} = [\pi(v)]_{p.p.}$$

Рассмотрение этих случаев ( $p_m \in C$ ) мы будем опускать в дальнейшем.

- б) Если  $p_m \notin C$ , то для завершения доказательства необходимо найти вершину  $v'$ , такую что

$$[\pi(v) \cup \{q_m\}]_{p.p.} = [\pi(v')]_{p.p.}. \quad (\text{induct-step-}m-v)$$

Следующие 10 подразделов статьи содержат доказательства индукционных переходов в форме  $(\text{induct-step-}m)$  для  $m \in \{1, \dots, 10\}$ . Доказательство  $m$ -ого индукционного перехода проводится последовательным разбором случаев для всех  $C \in \text{Classes}(m-1)$ . Справедливость вспомогательного факта  $(\text{induct-step-}m-v)$  мы обосновываем так: для

$C \in \text{Classes}(m - 1)$ , такого что  $C = [\pi(v)]_{p.p.}$ , мы явно указываем вершину  $v'$ , такую что

$$[C \cup \{q_m\}]_{p.p.} = [[\pi(v)]_{p.p.} \cup \{q_m\}]_{p.p.} = [\pi(v')]_{p.p.},$$

причём

$$(\pi(v) \cup \{q_m\}) \subseteq \pi(v').$$

Это равенство мы обосновываем так: для каждого  $p \in \pi(v') \setminus (\pi(v) \cup \{q_m\})$  мы указываем примитивную позитивную формулу над множеством предикатов  $\pi(v) \cup \{q_m\}$ , определяющую предикат  $p$  (т. е. показываем, что  $p \in [\pi(v) \cup \{q_m\}]_{p.p.}$ ).

Дополнительно на каждом индукционном шаге  $m$  мы явным образом строим множество  $\text{Classes}(m)$ .

В заключение, в дальнейших подразделах мы будем использовать обозначение:

$$C_j = [\pi(v_j)]_{p.p.} \quad (1 \leq j \leq 33).$$

### 5.1. Добавление предиката $q_1$

$$1) [C_1 \cup \{q_1\}]_{p.p.} = [[\emptyset]_{p.p.} \cup \{q_1\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2\}]_{p.p.} = C_2, \text{ так как}$$

$$q_2(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_1(x_1, y_1) \wedge q_1(x_2, y_1)).$$

Таким образом,  $\text{Classes}(1) = \{C_1, C_2\}$ .

### 5.2. Добавление предиката $q_2$

$$1) [C_1 \cup \{q_2\}]_{p.p.} = [[\emptyset]_{p.p.} \cup \{q_2\}]_{p.p.} = [\{q_2\}]_{p.p.} = C_3.$$

Таким образом,  $\text{Classes}(2) = \{C_1, C_2, C_3\}$ .

### 5.3. Добавление предиката $q_3$

$$1) [C_1 \cup \{q_3\}]_{p.p.} = [[\emptyset]_{p.p.} \cup \{q_3\}]_{p.p.} = [\{q_3, q_7\}]_{p.p.} = C_4, \text{ так как}$$

$$q_7(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_3(x_1, y_1) \wedge q_3(x_2, y_1)).$$

- 2)  $[C_2 \cup \{q_3\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_3\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$ , так как

$$\begin{aligned} q_4(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_1(x_1, y_1) \wedge q_3(y_1, x_2)); \\ q_5(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_3(x_1, y_1) \wedge q_1(x_2, y_1)); \\ q_6(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_3(y_1, x_2)); \\ q_7(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_3(x_1, y_1) \wedge q_3(x_2, y_1)); \\ q_8(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 (q_1(x_1, y_2) \wedge q_3(y_2, y_1) \wedge q_3(x_2, y_1)); \\ q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 (q_3(x_1, y_2) \wedge q_2(y_2, y_1) \wedge q_3(x_2, y_1)); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 (q_2(x_1, y_2) \wedge q_3(y_2, y_1) \wedge q_3(x_2, y_1)). \end{aligned}$$

- 3)  $[C_3 \cup \{q_3\}]_{p.p.} = [[\{q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_3\}]_{p.p.} = [\{q_2, q_3, q_6, q_7, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_6$ , так как

$$\begin{aligned} q_6(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_3(y_1, x_2)); \\ q_7(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_3(x_1, y_1) \wedge q_3(x_2, y_1)); \\ q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 (q_3(x_1, y_2) \wedge q_2(y_2, y_1) \wedge q_3(x_2, y_1)); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 (q_2(x_1, y_2) \wedge q_3(y_2, y_1) \wedge q_3(x_2, y_1)). \end{aligned}$$

Таким образом,  $Classes(3) = \{C_1, C_2, \dots, C_6\}$ .

#### 5.4. Добавление предиката $q_4$

- 1)  $[C_1 \cup \{q_4\}]_{p.p.} = [[\emptyset]_{p.p.} \cup \{q_4\}]_{p.p.} = [\{q_4\}]_{p.p.} = C_7$ .
- 2)  $[C_2 \cup \{q_4\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_4\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_4, q_6\}]_{p.p.} = C_8$ , так как

$$q_6(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_4(y_1, x_2)).$$

- 3)  $[C_3 \cup \{q_4\}]_{p.p.} = [[\{q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_4\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_4, q_6\}]_{p.p.} = C_8$ , так как

$$\begin{aligned} q_1(x_1, x_2) &= q_2(x_1, x_2) \wedge q_4(x_1, x_2); \\ q_6(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_4(y_1, x_2)). \end{aligned}$$

- 4)  $[C_4 \cup \{q_4\}]_{p.p.} = [[\{q_3, q_7\}]_{p.p.} \cup \{q_4\}]_{p.p.} = [\{q_3, q_4, q_7, q_8\}]_{p.p.} = C_9$ , так как

$$q_8(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_4(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)).$$

- 5)  $[C_6 \cup \{q_4\}]_{p.p.} = [[\{q_2, q_3, q_6, q_7, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} \cup \{q_4\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$ , так как

$$\begin{aligned} q_1(x_1, x_2) &= q_2(x_1, x_2) \wedge q_4(x_1, x_2); \\ q_5(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_4(y_1, x_1) \wedge q_3(y_1, x_2)); \\ q_8(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_4(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)). \end{aligned}$$

Таким образом,  $Classes(4) = \{C_1, C_2, \dots, C_9\}$ .

### 5.5. Добавление предиката $q_5$

- 1)  $[C_1 \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [[\emptyset]_{p.p.} \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [\{q_5, q_9\}]_{p.p.} = C_{10}$ , так как

$$q_9(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_5(x_1, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)).$$

- 2)  $[C_2 \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_5, q_6, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{11}$ , так как

$$\begin{aligned} q_6(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_1(x_1, y_1) \wedge q_5(y_1, x_2)); \\ q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_5(x_1, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 (q_1(x_1, y_2) \wedge q_5(y_2, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)). \end{aligned}$$

- 3)  $[C_3 \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [[\{q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_5, q_6, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{11}$ , так как

$$\begin{aligned} q_1(x_1, x_2) &= q_2(x_1, x_2) \wedge q_5(x_2, x_1); \\ q_6(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_5(y_1, x_2)); \\ q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_5(x_1, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 (q_2(x_1, y_2) \wedge q_5(y_2, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)). \end{aligned}$$

- 4)  $[C_4 \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [[\{q_3, q_7\}]_{p.p.} \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [\{q_3, q_5, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{12}$ , так как

$$\begin{aligned} q_8(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_5(y_1, x_1) \wedge q_3(y_1, x_2)); \\ q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_5(x_1, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 (q_5(x_1, y_1) \wedge q_5(y_2, y_1) \wedge q_3(y_2, x_2)). \end{aligned}$$

- 5)  $[C_6 \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [[\{q_2, q_3, q_6, q_7, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$ , так как

$$\begin{aligned} q_1(x_1, x_2) &= q_2(x_1, x_2) \wedge q_5(x_2, x_1); \\ q_4(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_5(y_1, x_1) \wedge q_3(y_1, x_2)); \\ q_8(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_5(y_1, x_1) \wedge q_3(y_1, x_2)). \end{aligned}$$

- 6)  $[C_7 \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [[\{q_4\}]_{p.p.} \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$ , так как

$$\begin{aligned} q_1(x_1, x_2) &= q_4(x_1, x_2) \wedge q_5(x_2, x_1); \\ q_2(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 (q_4(x_1, y_1) \wedge q_5(y_1, x_2) \wedge \\ &\quad \wedge q_4(y_2, x_1) \wedge q_5(x_2, y_2)); \\ q_3(x_1, x_2) &= q_4(x_1, x_2) \wedge q_5(x_1, x_2); \\ q_6(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_4(x_1, y_1) \wedge q_5(y_1, x_2)); \\ q_7(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_4(x_1, y_1) \wedge q_5(x_1, y_1) \wedge \\ &\quad \wedge q_4(x_2, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)); \\ q_8(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_4(x_1, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)); \\ q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_5(x_1, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 (q_4(x_1, y_2) \wedge q_5(y_2, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)). \end{aligned}$$

- 7)  $[C_8 \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2, q_4, q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$ , так как

$$\begin{aligned} q_3(x_1, x_2) &= q_4(x_1, x_2) \wedge q_5(x_1, x_2); \\ q_7(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_4(x_1, y_1) \wedge q_5(x_1, y_1) \wedge \\ &\quad \wedge q_4(x_2, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)); \\ q_8(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_4(x_1, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)); \\ q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_5(x_1, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_6(x_1, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)). \end{aligned}$$

- 8)  $[C_9 \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [[\{q_3, q_4, q_7, q_8\}]_{p.p.} \cup \{q_5\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$ , так как

$$\begin{aligned} q_1(x_1, x_2) &= q_4(x_1, x_2) \wedge q_5(x_2, x_1); \\ q_2(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 (q_4(x_1, y_1) \wedge q_5(y_1, x_2) \wedge \\ &\quad \wedge q_4(y_2, x_1) \wedge q_5(x_2, y_2)); \\ q_6(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_4(x_1, y_1) \wedge q_5(y_1, x_2)); \\ q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_5(x_1, y_1) \wedge q_5(x_2, y_1)); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_5(x_1, y_1) \wedge q_8(y_1, x_2)). \end{aligned}$$

Таким образом,  $Classes(5) = \{C_1, C_2, \dots, C_{12}\}$ .

## 5.6. Добавление предиката $q_6$

- 1)  $[C_1 \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [[\emptyset]_{p.p.} \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [\{q_2, q_6\}]_{p.p.} = C_{13}$ , так как

$$q_2(x_1, x_2) = q_6(x_1, x_2) \wedge q_6(x_2, x_1).$$

- 2)  $[C_2 \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_6\}]_{p.p.} = C_{14}$ .

- 3)  $[C_3 \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [[\{q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [\{q_2, q_6\}]_{p.p.} = C_{13}$ .

- 4)  $[C_4 \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [[\{q_3, q_7\}]_{p.p.} \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [\{q_2, q_3, q_6, q_7, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_6$ , так как

$$\begin{aligned} q_2(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_6(x_2, x_1); \\ q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 (q_3(x_1, y_2) \wedge q_6(y_1, y_2) \wedge \\ &\quad \wedge q_6(x_1, y_1) \wedge q_3(x_2, y_1)); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_6(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)). \end{aligned}$$

- 5)  $[C_7 \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [[\{q_4\}]_{p.p.} \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_4, q_6\}]_{p.p.} = C_8$ , так как

$$\begin{aligned} q_1(x_1, x_2) &= q_4(x_1, x_2) \wedge q_6(x_2, x_1); \\ q_2(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_6(x_2, x_1). \end{aligned}$$

$$6) [C_9 \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [[\{q_3, q_4, q_7, q_8\}]_{p.p.} \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_5, \text{ так как}$$

$$\begin{aligned} q_1(x_1, x_2) &= q_4(x_1, x_2) \wedge q_6(x_2, x_1); \\ q_2(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_6(x_2, x_1); \\ q_5(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1); \\ q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 (q_3(x_1, y_2) \wedge q_6(y_1, y_2) \wedge \\ &\quad \wedge q_6(x_1, y_1) \wedge q_3(x_2, y_1)); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_6(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)). \end{aligned}$$

$$7) [C_{10} \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [[\{q_5, q_9\}]_{p.p.} \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_5, q_6, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{11}, \text{ так как}$$

$$\begin{aligned} q_1(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_5(x_2, x_1); \\ q_2(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_6(x_2, x_1); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_6(x_1, y_1) \wedge q_9(y_1, x_2)). \end{aligned}$$

$$8) [C_{12} \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [[\{q_3, q_5, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} \cup \{q_6\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_5, \text{ так как}$$

$$\begin{aligned} q_1(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_5(x_2, x_1); \\ q_2(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_6(x_2, x_1); \\ q_4(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Таким образом,  $Classes(6) = \{C_1, C_2, \dots, C_{14}\}$ .

### 5.7. Добавление предиката $q_7$

$$1) [C_1 \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [[\emptyset]_{p.p.} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [\{q_7\}]_{p.p.} = C_{15}.$$

$$2) [C_2 \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{16}, \text{ так как}$$

$$\begin{aligned} q_8(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_1(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)); \\ q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 (q_1(y_1, x_1) \wedge q_7(y_1, y_2) \wedge q_1(y_2, x_2)); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)). \end{aligned}$$

- 3)  $[C_3 \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [[\{q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [\{q_2, q_7, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{17}$ , так как

$$q_9(x_1, x_2) = \exists y_1 \exists y_2 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2) \wedge \wedge q_7(x_1, y_2) \wedge q_2(y_2, x_2));$$

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)).$$

- 4)  $[C_7 \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [[\{q_4\}]_{p.p.} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [\{q_3, q_4, q_7, q_8\}]_{p.p.} = C_9$ , так как

$$q_3(x_1, x_2) = q_4(x_1, x_2) \wedge q_7(x_1, x_2);$$

$$q_8(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_4(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)).$$

- 5)  $[C_8 \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2, q_4, q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$ , так как

$$q_3(x_1, x_2) = q_4(x_1, x_2) \wedge q_7(x_1, x_2);$$

$$q_5(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_4(x_1, y_1) \wedge q_7(x_1, y_1) \wedge q_1(x_2, y_1));$$

$$q_8(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_1(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2));$$

$$q_9(x_1, x_2) = \exists y_1 \exists y_2 (q_1(y_1, x_1) \wedge q_7(y_1, y_2) \wedge q_1(y_2, x_2));$$

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)).$$

- 6)  $[C_{10} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [[\{q_5, q_9\}]_{p.p.} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [\{q_3, q_5, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{12}$ , так как

$$q_3(x_1, x_2) = q_5(x_1, x_2) \wedge q_7(x_1, x_2);$$

$$q_8(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_5(y_1, x_1) \wedge q_7(y_1, x_2));$$

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_9(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)).$$

- 7)  $[C_{11} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2, q_5, q_6, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$ , так как

$$q_3(x_1, x_2) = q_5(x_1, x_2) \wedge q_7(x_1, x_2);$$

$$q_4(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_1(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2) \wedge q_6(x_1, x_2));$$

$$q_8(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_1(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)).$$

$$8) [C_{13} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [[\{q_2, q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [\{q_2, q_3, q_6, q_7, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = \\ = C_6, \text{ так как}$$

$$q_3(x_1, x_2) = q_6(x_1, x_2) \wedge q_7(x_1, x_2); \\ q_9(x_1, x_2) = \exists y_1 \exists y_2 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2) \wedge \\ \wedge q_7(x_1, y_2) \wedge q_2(y_2, x_2)); \\ q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)).$$

$$9) [C_{14} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2, q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_7\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, \\ q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_5, \text{ так как}$$

$$q_3(x_1, x_2) = q_6(x_1, x_2) \wedge q_7(x_1, x_2); \\ q_4(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_1(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2) \wedge q_6(x_1, x_2)); \\ q_5(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_6(x_1, y_1) \wedge q_7(x_1, y_1) \wedge q_1(x_2, y_1)); \\ q_8(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_1(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)); \\ q_9(x_1, x_2) = \exists y_1 \exists y_2 (q_1(y_1, x_1) \wedge q_7(y_1, y_2) \wedge q_1(y_2, x_2)); \\ q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)).$$

Таким образом,  $Classes(7) = \{C_1, C_2, \dots, C_{17}\}$ .

## 5.8. Добавление предиката $q_8$

$$1) [C_1 \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\emptyset]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_7, q_8\}]_{p.p.} = C_{18}, \text{ так как}$$

$$q_7(x_1, x_2) = q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1).$$

$$2) [C_2 \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = \\ = C_{16}, \text{ так как}$$

$$q_7(x_1, x_2) = q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1); \\ q_9(x_1, x_2) = \exists y_1 \exists y_2 (q_1(y_1, x_1) \wedge q_8(y_2, y_1) \wedge \\ \wedge q_1(y_2, x_2) \wedge q_8(y_1, x_2)); \\ q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_8(y_1, x_2)).$$

- 3)  $[C_3 \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{16}$ ,  
так как

$$\begin{aligned} q_1(x_1, x_2) &= q_2(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2); \\ q_7(x_1, x_2) &= q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1); \\ q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 (q_2(x_1, y_2) \wedge q_8(y_2, y_1) \wedge q_8(y_1, x_1) \wedge \\ &\quad \wedge q_2(y_1, x_2) \wedge q_8(y_1, x_2)); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_8(y_1, x_2)). \end{aligned}$$

- 4)  $[C_4 \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_3, q_7\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_3, q_7, q_8\}]_{p.p.} = C_{19}$ .

- 5)  $[C_6 \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_2, q_3, q_6, q_7, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$ , так как

$$\begin{aligned} q_1(x_1, x_2) &= q_2(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2); \\ q_4(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2); \\ q_5(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1). \end{aligned}$$

- 6)  $[C_7 \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_4\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_3, q_4, q_7, q_8\}]_{p.p.} = C_9$ , так как

$$\begin{aligned} q_3(x_1, x_2) &= q_4(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1); \\ q_7(x_1, x_2) &= q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1). \end{aligned}$$

- 7)  $[C_8 \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2, q_4, q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$ , так как

$$\begin{aligned} q_3(x_1, x_2) &= q_4(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1); \\ q_5(x_1, x_2) &= q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1); \\ q_7(x_1, x_2) &= q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1); \\ q_9(x_1, x_2) &= \exists y_1 \exists y_2 (q_1(y_1, x_1) \wedge q_8(y_2, y_1) \wedge \\ &\quad \wedge q_1(y_2, x_2) \wedge q_8(y_1, x_2)); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_8(y_1, x_2)). \end{aligned}$$

- 8)  $[C_{10} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_5, q_9\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_3, q_5, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{12}$ , так как

$$\begin{aligned} q_3(x_1, x_2) &= q_5(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2); \\ q_7(x_1, x_2) &= q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1); \\ q_{10}(x_1, x_2) &= \exists y_1 (q_5(x_1, y_1) \wedge q_8(y_1, x_2)). \end{aligned}$$

- 9)  $[C_{11} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2, q_5, q_6, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$ , так как

$$q_3(x_1, x_2) = q_5(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2);$$

$$q_4(x_1, x_2) = q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2);$$

$$q_7(x_1, x_2) = q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1).$$

- 10)  $[C_{13} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_2, q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$ , так как

$$q_1(x_1, x_2) = q_2(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2);$$

$$q_3(x_1, x_2) = q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1);$$

$$q_4(x_1, x_2) = q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2);$$

$$q_5(x_1, x_2) = q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1);$$

$$q_7(x_1, x_2) = q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1);$$

$$q_9(x_1, x_2) = \exists y_1 \exists y_2 (q_2(x_1, y_2) \wedge q_8(y_2, y_1) \wedge q_8(y_1, x_1) \wedge q_2(y_1, x_2) \wedge q_8(y_1, x_2));$$

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_8(y_1, x_2)).$$

- 11)  $[C_{14} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2, q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_5$ , так как

$$q_3(x_1, x_2) = q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1);$$

$$q_4(x_1, x_2) = q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2);$$

$$q_5(x_1, x_2) = q_6(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1);$$

$$q_7(x_1, x_2) = q_8(x_1, x_2) \wedge q_8(x_2, x_1);$$

$$q_9(x_1, x_2) = \exists y_1 \exists y_2 (q_1(y_1, x_1) \wedge q_8(y_2, y_1) \wedge q_1(y_2, x_2) \wedge q_8(y_1, x_2));$$

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_8(y_1, x_2)).$$

- 12)  $[C_{15} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_7\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_7, q_8\}]_{p.p.} = C_{18}$ .

- 13)  $[C_{17} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [[\{q_2, q_7, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} \cup \{q_8\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{16}$ , так как

$$q_1(x_1, x_2) = q_2(x_1, x_2) \wedge q_8(x_1, x_2).$$

Таким образом,  $Classes(8) = \{C_1, C_2, \dots, C_{19}\}$ .

## 5.9. Добавление предиката $q_9$

1)  $[C_1 \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\emptyset]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_9\}]_{p.p.} = C_{20}$ .

2)  $[C_2 \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{21}$ ,  
так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_1(x_1, y_1) \wedge q_9(y_1, x_2)).$$

3)  $[C_3 \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_2, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{22}$ , так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_9(y_1, x_2)).$$

4)  $[C_4 \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_3, q_7\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_3, q_7, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{23}$ ,  
так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_9(x_1, y_1) \wedge q_3(y_1, x_2)).$$

5)  $[C_7 \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_4\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_4, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{24}$ , так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_4(x_1, y_1) \wedge q_9(y_1, x_2)).$$

6)  $[C_8 \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2, q_4, q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_4, q_6, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{25}$ , так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_1(x_1, y_1) \wedge q_9(y_1, x_2)).$$

7)  $[C_9 \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_3, q_4, q_7, q_8\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_3, q_4, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{26}$ , так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_9(x_1, y_1) \wedge q_3(y_1, x_2)).$$

8)  $[C_{13} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_2, q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_2, q_6, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{27}$ ,  
так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_2(x_1, y_1) \wedge q_9(y_1, x_2)).$$

9)  $[C_{14} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2, q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_6, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{28}$ , так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_1(x_1, y_1) \wedge q_9(y_1, x_2)).$$

- 10)  $[C_{15} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_7\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_7, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{29}$ , так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_9(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)).$$

- 11)  $[C_{18} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_7, q_8\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{30}$ , так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_9(x_1, y_1) \wedge q_7(y_1, x_2)).$$

- 12)  $[C_{19} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [[\{q_3, q_7, q_8\}]_{p.p.} \cup \{q_9\}]_{p.p.} = [\{q_3, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{31}$ , так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = \exists y_1 (q_9(x_1, y_1) \wedge q_3(y_1, x_2)).$$

Таким образом,  $Classes(9) = \{C_1, C_2, \dots, C_{31}\}$ .

### 5.10. Добавление предиката $q_{10}$

- 1)  $[C_1 \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\emptyset]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{32}$ , так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

- 2)  $[C_2 \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{21}$ , так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

- 3)  $[C_3 \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_2\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_2, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{22}$ , так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

- 4)  $[C_4 \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_3, q_7\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_3, q_7, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{23}$ , так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

- 5)  $[C_7 \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_4\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_4, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{24}$ , так как

$$q_{10}(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

6)  $[C_8 \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2, q_4, q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_4, q_6, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{25}$ , так как

$$q_9(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

7)  $[C_9 \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_3, q_4, q_7, q_8\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_3, q_4, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{26}$ , так как

$$q_9(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

8)  $[C_{10} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_5, q_9\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_5, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{33}$ .

9)  $[C_{13} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_2, q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_2, q_6, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{27}$ , так как

$$q_9(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

10)  $[C_{14} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_1, q_2, q_6\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_1, q_2, q_6, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{28}$ , так как

$$q_9(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

11)  $[C_{15} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_7\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_7, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{29}$ , так как

$$q_9(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

12)  $[C_{18} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_7, q_8\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{30}$ , так как

$$q_9(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

13)  $[C_{19} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_3, q_7, q_8\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_3, q_7, q_8, q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{31}$ , так как

$$q_9(x_1, x_2) = q_{10}(x_1, x_2) \wedge q_{10}(x_2, x_1).$$

14)  $[C_{20} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [[\{q_9\}]_{p.p.} \cup \{q_{10}\}]_{p.p.} = [\{q_9, q_{10}\}]_{p.p.} = C_{32}$ .

Таким образом,  $Classes(10) = \{C_1, C_2, \dots, C_{33}\}$ .

## 6. Доказательство леммы 3

На втором шаге доказательства (раздел 2) мы показали, что клонов трёхзначной логики, содержащих функции  $0, 1, 2, \min, \max$ , не более чем 33. При этом каждый такой клон является классом сохранения множества предикатов  $\pi(v)$  для некоторой вершины  $v$  диаграммы 1. Для завершения доказательства основной теоремы нам нужно показать, что различные вершины диаграммы определяют различные клоны, т. е. если  $v', v''$  — две различные вершины диаграммы 1, то

$$\text{Pol}(\pi(v')) \neq \text{Pol}(\pi(v'')).$$

Для того чтобы доказать этот факт, мы укажем список функций  $f_1, \dots, f_9$ , таких что для различных вершин  $v', v''$

$$(\text{Pol}(v') \cap \{f_1, \dots, f_9\}) \neq (\text{Pol}(v'') \cap \{f_1, \dots, f_9\}).$$

Пусть  $f_1, \dots, f_9$  — одноместные функции трёхзначной логики, определённые следующим образом:

$x$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$	$f_8(x)$	$f_9(x)$
0	1	1	2	0	2	0	2	0	1
1	0	1	1	0	2	0	1	2	2
2	0	0	0	1	1	2	2	2	2

В следующей таблице для каждой вершины  $v$  диаграммы символом «+» отмечены те и только те из функций  $f_1, \dots, f_9$ , которые сохраняют все предикаты из  $\pi(v)$ . Как можно видеть, у любых двух различных строк таблицы множества функций, помеченных символом «+», различаются, что завершает доказательство леммы 3.

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$
$v_1$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$v_2$		+		+	+	+			
$v_3$	+	+		+	+	+			
$v_4$	+						+	+	+
$v_5$									
$v_6$	+								
$v_7$				+		+		+	+
$v_8$				+		+			
$v_9$								+	+
$v_{10}$		+	+				+		
$v_{11}$		+							
$v_{12}$							+		
$v_{13}$	+	+		+		+			
$v_{14}$		+		+		+			
$v_{15}$	+				+		+	+	+
$v_{16}$					+				
$v_{17}$	+				+				
$v_{18}$					+		+	+	+
$v_{19}$							+	+	+
$v_{20}$	+	+	+	+	+		+		+
$v_{21}$		+		+	+				
$v_{22}$	+	+		+	+				
$v_{23}$	+						+		+
$v_{24}$				+					+
$v_{25}$				+					
$v_{26}$									+
$v_{27}$	+	+		+					
$v_{28}$		+		+					
$v_{29}$	+				+		+		+
$v_{30}$					+		+		+
$v_{31}$							+		+
$v_{32}$	+	+		+	+		+		+
$v_{33}$		+					+		

## Благодарности

Автор выражает благодарность к. ф.-м. н. Жуку Дмитрию Николаевичу за внимание к работе и полезные замечания.

## Список литературы

- [1] Geiger D. Closed systems of functions and predicates. Pacific journal of mathematics. 1968 Oct 1; 27(1), 95-100.
- [2] Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста. Кибернетика. 1969. №3. с. 1—10 (часть I); №5. с. 1—9 (часть II).
- [3] Baker K. A., Pixley A. F. Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems. Math. Zeitschrift 143 (1975), 165-174.

### **The lattice of all clones on the three-element set containing functions $0, 1, 2, \min, \max$ Moiseev S. V.**

This paper describes the lattice of all clones on the three-element set that contain all constant functions  $0, 1, 2$  and functions  $\min, \max$ . The clones are characterized as sets of predicates being preserved by them.

**Keywords:** clone theory, lattice of clones, three-valued logic.